КРАТКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
К. П. ЯКОВЛЕВА

ТОМ ВТОРОЙ

ОБЩАЯ МЕХАНИКА, СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ, ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

В составлении второго тома принимали участие
В. А. ЗИНОВЬЕВ, Г. Н. СВЕШНИКОВ, И. К. СНИТКО

СОДЕРЖАНИЕ

Отдел третий. ОБЩАЯ МЕХАНИКА

Г. Н. Свешников

Обозначения 9

А. КИНЕМАТИКА

Глава 3-1. **Кинематика точки** 10

§ 3-1. Основная система 10
§ 3-2. Уравнения движения точки и траектория 11
§ 3-3. Скорость точки 11
§ 3-4. Секторная скорость 15
§ 3-5. Ускорение точки 16

Глава 3-2. **Кинематика твердого тела** 19

§ 3-6. Конечные перемещения твердого тела 19
§ 3-7. Общее свойство скоростей точек движущегося тв рдого тела 20
§ 3-8. Поступательное движение 20
§ 3-9. Вращательное движение твердого тела 21
§ 3-10. Вращение вокруг центра 22
§ 3-11. Углы Эйлера 22
§ 3-12. Угловое ускорение вращающегося тела 24
§ 3-13. Ускорения точек вращающегося тела 24
§ 3-14. Плоское движение твердого тела 25
§ 3-15. Мгновенный центр скоростей 26
§ 3-16. Центроиды 27
§ 3-17. Ускорения точек плоской фигуры 28
§ 3-18. Круги Лагира и Бресса. Формула Савари 30
§ 3-19. Карданово движение 31
§ 3-20. Движение свободного тела 31
§ 3-21. Ускорение точек свободного тела 33

Глава 3-3. **Сложное движение** 33

§ 3-22. Переносное, относительное и абсолютное движения . . . 33
§ 3-23. Теорема параллелограмма скоростей 34
§ 3-24. Сложение вращений около пересекающихся осей 34
§ 3-25. Сложение вращений около параллельных осей 35
§ 3-26. Сложение поступательного и вращательного движений . 36
§ 3-27. Сложение вращений вокруг скрещивающихся осей . . . 36
§ 3-28. Ускорение точки в сложном движении 36

Б. СТАТИКА

Глава 3-4. **Статика материальной точки** 37

§ 3-29. Сила и ее вектор 37
§ 3-30. Уравновешенные на точке силы 39

§ 3-31. Равновесие точки на гладкой поверхности и гладкой линии 40
§ 3-32. Момент силы 41

Глава 3-5. Геометрическая статика твердого тела 43

§ 3-33. Свойства внешних сил, приложенных к твердому телу. . 43
§ 3-34. Сходящиеся силы 45
§ 3-35. Пары сил 46
§ 3-36. Приведение системы сил к данному центру 47
§ 3-37. Инварианты приведения 49
§ 3-38. Центральная ось 50
§ 3-39. Необходимые условия равновесия тела 51
§ 3-40. Плоская система сил 53
§ 3-41. Графическое приведение плоской системы сил 53
§ 3-42. Параллельные силы 55
§ 3-43. Центр тяжести 58
§ 3-44. Равновесие тяжелого тела, опирающегося на гладкую горизонтальную плоскость 64
§ 3-45. Вириал 65

В. ДИНАМИКА

Глава 3-6. Основные понятия динамики материальной точки 65

§ 3-46. Инерциальная система отсчета 65
§ 3-47. Масса материальной частицы 65
§ 3-48. Принцип независимости действия сил 66
§ 3-49. Кориолисовы силы 66
§ 3-50. Дифференциальные уравнения движения изолированной точки 67
§ 3-51. Движение тяжелой точки 68
§ 3-52. Центральные силы 69
§ 3-53. Свободное падение точки с учетом вращения Земли . . 69
§ 3-54. Прямолинейное движение точки 70
§ 3-55. Вертикальное падение точки при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости 70
§ 3-56. Прямолинейные колебания точки под действием позиционной силы 70
§ 3-57. Гармонические колебания точки 71
§ 3-58. Затухающие колебания 72
§ 3-59. Колебания при наличии кулонова трения 73
§ 3-60. Движение точки по заданной гладкой кривой 73
§ 3-61. Круговой математический маятник 74
§ 3-62. Относительное движение точки по заданной подвижной гладкой кривой 76
§ 3-63. Движение точки по заданной гладкой поверхности . . . 77
§ 3-64. Сферический маятник 78

Глава 3-7. Общая динамика системы 79

§ 3-65. Механическая система и ее внутренние силы 79
§ 3-66. Центр инерции 79
§ 3-67. Теорема о движении центра инерции 81
§ 3-68. Количество движения 81
§ 3-69. Уравнение Мещерского для поступательного движения ракеты 83
§ 3-70. Момент количества движения 84
§ 3-71. Кинетический момент системы 85
§ 3-72. Элементарная работа силы 87
§ 3-73. Силовое поле 88
§ 3-74. Кинетическая энергия точки 89

§ 3-75. Кинетическая энергия системы 91
§ 3-76. Консервативные системы 93

Глава 3-8. **Динамика твердого тела** 94

§ 3-77. Моменты инерции массы тела 94
§ 3-78. Эллипсоид и тензор моментов инерции 96
§ 3-79. Кинетический момент тела 101
§ 3-80. Дифференциальное уравнение вращения тела около неподвижной оси 102
§ 3-81. Реакция закрепленных точек оси вращающегося тела . . 103
§ 3-82. Физический маятник 105
§ 3-83. Крутильные колебания 105
§ 3-84. Плоское движение тела 106
§ 3-85. Сумма элементарных работ сил, приложенных к точкам твердого тела 107
§ 3-86. Кинетическая энергия твердого тела 108
§ 3-87. Динамические уравнения Эйлера для вращения тела вокруг неподвижной точки 109
§ 3-88. Уравнения движения свободного тела 110
§ 3-89. Вращение гироскопа 111
§ 3-90. Регулярная прецессия гироскопа 111

Глава 3-9. **Аналитическая статика** 112

§ 3-91. Связи и виртуальные перемещения 112
§ 3-92. Обобщенные координаты системы 113
§ 3-93. Виртуальные работы и обобщенные силы 115
§ 3-94. Обобщенная силовая функция 116
§ 3-95. Совершенные связи и начало возможных перемещений . 117
§ 3-96. Множители Лагранжа 118
§ 3-97. Уравнения равновесия голономной системы в обобщенных координатах 118

Глава 3-10. **Начало д'Аламбера** 119

§ 3-98. Сила инерции 119
§ 3-99. Кинетостатический метод 120
§ 3-100. Общее уравнение движения систем с совершенными связями 122

Глава 3-11. **Дифференциальные уравнения движения голономных систем** 122

§ 3-101. Уравнения Лагранжа первого рода 122
§ 3-102. Обобщенные скорости 123
§ 3-103. Кинетическая энергия в обобщенных скоростях . . . 124
§ 3-104. Сумма виртуальных работ сил инерции 126
§ 3-105. Уравнения Лагранжа второго рода 126
§ 3-106. Интеграл энергии 128
§ 3-107. Обобщенные импульсы 129
§ 3-108. Канонические уравнения 129

Глава 3-12. **Малые колебания системы** 130

§ 3-109. Устойчивое равновесие 130
§ 3-110. Приближенные выражения кинетической и потенциальной энергии при малых колебаниях 131
§ 3-111. Свободные малые колебания системы с одной степенью свободы 132
§ 3-112. Свободные малые колебания системы с двумя степенями свободы 133
§ 3-113. Затухающие колебания системы с одной степенью свободы 134
§ 3-114. Вынужденные колебания при наличии сопротивления . . 137
§ 3-115. Вынужденные колебания без сопротивления 140

Глава 3-13. **Удар** 142
§ 3-116. Мгновенный импульс 142
§ 3-117. Соударение точки с неподвижной гладкой поверхностью 143
§ 3-118. Прямое центральное соударение двух тел 144
§ 3-119. Действие удара на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси 145
§ 3-120. Изменение кинетической энергии при ударе от введения длительных совершенных связей 146
§ 3-121. Изменение кинетической энергии при прямом центральном соударении тел 146

Отдел четвертый. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

И. К. Снитко

Обозначения 147

Глава 4-1. **Общие сведения о напряжениях и деформациях** . 150
§ 4-1. Напряженное состояние 150
§ 4-2. Деформации 153
§ 4-3. Закон Гука 154
§ 4-4. Теории прочности 156
§ 4-5. Концентрация напряжений и динамическая прочность . 158
§ 4-6. Внутренние силы стержней и пластинок 160

Глава 4-2. **Растяжение и сжатие стержней** 161
§ 4-7. Основные формулы 161
§ 4-8. Диаграмма растяжения. Механические характеристики 162
§ 4-9. Допускаемые напряжения. Запас прочности. Способы расчетов 165
§ 4-10. Учет собственного веса 174
§ 4-11. Статически неопределимые задачи 175
§ 4-12. Расчет на действие температуры 176
§ 4-13. Напряжения и деформации в наклонных направлениях . 177
§ 4-14. Тонкостенные оболочки вращения 177
§ 4-15. Фермы 179

Глава 4-3. **Сдвиг, срез** 182
§ 4-16. Общие формулы 182
§ 4-17. Клепаные соединения 183
§ 4-18. Сварные соединения 184
§ 4-19. Врубки 184

Глава 4-4. **Кручение** 185
§ 4-20. Формулы для расчета разных профилей 185
§ 4-21. Чистое и стесненное кручение тонких открытых профилей 188
§ 4-22. Расчет вала. Эпюры 190

Глава 4-5. **Изгиб** 191
§ 4-23. Основные формулы 191
§ 4-24. Геометрические характеристики сечений 192
§ 4-25. Формулы и табличные значения моментов инерции и сопротивления 195
§ 4-26. Общие уравнения для балок с прямой осью. Эпюры . . 208
§ 4-27. Балки переменного сечения 214
§ 4-28. Статически неопределимые балки 218
§ 4-29. Балки на упругом основании 224

§ 4-30. Простые плоские рамы 229
§ 4-31. Криволинейные стержни 234
§ 4-32. Расчеты балок 237

Глава 4-6. **Пластинки** 240

§ 4-33. Прямоугольные пластинки 240
§ 4-34. Круглые и эллиптические пластинки 243

Глава 4-7. **Устойчивость** 245

§ 4-35. Общие уравнения для прямых стержней 245
§ 4-36. Стержни переменной жесткости 250
§ 4-37. Стержни составные и на упругих опорах 252
§ 4-38. Кольца и арки 254
§ 4-39. Пластинки и оболочки 255

Глава 4-8. **Сложное сопротивление** 256

§ 4-40. Косой изгиб и внецентренное сжатие 256
§ 4-41. Кручение с изгибом 258

Глава 4-9. **Пружины и рессоры** 259

§ 4-42. Цилиндрическая пружина 259
§ 4-43. Коническая пружина 260

Глава 4-10. **Толстостенные сосуды** 260

§ 4-44. Расчеты в упругой стадии 260
§ 4-45. Расчеты в пластической и упруго-пластической стадиях 261

Глава 4-11. **Динамические напряжения** 262

§ 4-46. Колебание систем с одной степенью свободы 262
§ 4-47. Колебание систем с n степенями свободы 264
§ 4-48. Удар 265

Отдел пятый. ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

В. А. Зиновьев

Обозначения 267

Глава 5-1. **Структура механизмов** 273

§ 5-1. Механизм. Кинематические пары. Кинематическая цепь . 273
§ 5-2. Структурные свойства плоских механизмов. Образование плоских механизмов по Ассуру 277

Глава 5-2. **Кинематическое исследование плоских механизмов** 279

§ 5-3. Определение положений звеньев 279
§ 5-4. Решение задачи о скоростях и ускорениях 281

Глава 5-3. **Кинематическое исследование фрикционных и зубчатых механизмов** 287

§ 5-5. Обыкновенные фрикционные и зубчатые механизмы . . . 287
§ 5-6. Дифференциальные и планетарные механизмы 289

Глава 5-4. **Кинематическое исследование плоских кулачковых и мальтийских механизмов** 292

§ 5-7. Виды трехзвенных кулачковых механизмов 292
§ 5-8. Кинематическое исследование кулачковых механизмов . . 293
§ 5-9. Мальтийские механизмы 296

Глава 5-5. Кинематическое исследование некоторых пространственных механизмов 296

§ 5-10. Основные зависимости аналитической геометрии 296
§ 5-11. Кривошипно-шатунный механизм 298
§ 5-12. Кривошипно-коромысловый механизм 300

Глава 5-6. Теория зубчатого зацепления 301

§ 5-13. Построение искомого профиля, сопряженного с заданным 301
§ 5-14. Эвольвентное зацепление 303
§ 5-15. Зацепление рейки с зубчатым колесом 306
§ 5-16. Зацепление колес, сопряженных с одним и тем же исходным контуром 309
§ 5-17. Зубчатые зацепления с косозубыми колесами 312
§ 5-17а. Зубчатое зацепление М. Л. Новикова 313
§ 5-18. Коническое зубчатое зацепление 315
§ 5-19. Червячное зацепление 316

Глава 5-7. Силы, действующие на механизм 317

§ 5-20. Движущие силы и силы производственного сопротивления 317
§ 5-21. Трение 319
§ 5-22. Силы инерции 320

Глава 5-8. Исследование движения машинного агрегата . . . 322

§ 5-23. Приведение сил и масс 322
§ 5-24. Дифференциальное уравнение движения звена приведения 323
§ 5-25. Ограничение периодических колебаний скорости агрегата 327
§ 5-26. Регулирование непериодических колебаний скорости агрегата 331

Глава 5-9. Силовое исследование механизмов 333

§ 5-27. Кинематические пары 333
§ 5-28. Фрикционные механизмы 339
§ 5-29. Зубчатые механизмы 340
§ 5-30. Плоские механизмы с низшими парами 348
§ 5-31. Кулачковые механизмы 352

Глава 5-10. Уравновешивание механизмов 354

§ 5-32. Уравновешивание вращающихся звеньев 354
§ 5-33. Уравновешивание механизмов на фундаменте 357

Глава 5-11. Проектирование механизмов 359

§ 5-34. Основные задачи проектирования 359
§ 5-35. Фрикционные и зубчатые механизмы 360
§ 5-36. Ременные передачи 366
§ 5-37. Мальтийские механизмы 368
§ 5-38. Кулачковые механизмы 369
§ 5-39. Механизмы с низшими парами 373

Приложение. **Некоторые неметрические системы мер** . . 381

Предметный указатель 402

ОТДЕЛ ТРЕТИЙ

ОБЩАЯ МЕХАНИКА

Г. Н. Свешников

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинский алфавит

a — инерциальный коэффициент системы с одной степенью свободы

c — квазиупругий коэффициент системы с одной степенью свободы

dA — элементарная работа ($кГс \cdot м$)

$\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ — внутренняя сила взаимодействия двух точек системы

g — ускорение силы тяжести ($м \cdot сек^{-2}$)

H — характеристическая функция

I_{LL} — момент инерции около оси LL

I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} — произведения инерции в координатных осях

k — коэффициент восстановления при ударе

L — кинетический потенциал

$\mathbf{L}_O$ — вектор кинетического момента системы около центра O

l_O — вектор момента количества движения точки около центра O

$\mathbf{M}_O$ — вектор момента около центра O

M_{LL} — момент около оси LL

m — масса ($кГс \cdot сек^2 \cdot м^{-1}$)

$\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ — вектор силы

p_k — обобщенные импульсы

$\mathbf{Q}$ — вектор количества движения системы

Q_k — обобщенные силы

$\mathbf{q}$ — вектор количества движения точки

q_k — обобщенные координаты системы

$\mathbf{S}$ — вектор мгновенного импульса

T — кинетическая энергия

U — силовая функция

$\mathbf{V}$ — вектор скорости точки

v — алгебраическая скорость ($м \cdot сек^{-1}$)

$\mathbf{w}$ — вектор ускорения точки

Греческий алфавит

$\delta\mathbf{r}$ — вектор виртуального перемещения точки

ε — алгебраическое угловое ускорение ($сек^{-2}$)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ — вектор углового ускорения тела

λ — коэффициент динамичности
2τ — период колебания
ω — алгебраическая угловая скорость ($сек^{-1}$)
$\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости тела

Общая механика есть раздел механики, в котором изучаются законы механического движения и механического взаимодействия, общие для любых механических систем.

А. КИНЕМАТИКА

Кинематика — раздел общей механики, в котором изучается механическое движение, рассматриваемое без учета сил, приложенных к движущимся объектам.

Глава 3-1

КИНЕМАТИКА ТОЧКИ

§ 3-1. Основная система

Реальное или условное твердое тело, по отношению к которому определяется положение других тел, называется *системой отсчета*. Если в данной задаче положение системы отсчета в физическом пространстве роли не играет, то такая система отсчета условно принимается за неподвижную и называется *основной*, или *абсолютной*. Для определения положения точки применяются различные системы координат. В прямоугольной системе положение материальной точки M (рис. 3-1) по отношению к выбранной системе отсчета определяется или радиусом-вектором $\mathbf{r}$, проведенным из произвольно выбранного на системе отсчета начала O, или координатами x, y, z по прямоугольным осям xyz, образующим правую координатную систему. Радиус-вектор $\mathbf{r}$ записывается через единичные векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ осей и координаты x, y, z точки M формулой

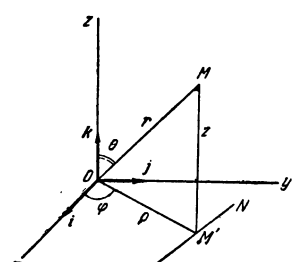


Рис. 3-1.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z. \qquad (3\text{-}1)$$

При этом координаты x, y, z равны проекциям радиуса-вектора на соответствующие оси:

$$r_x = x,\ r_y = y,\ r_z = z. \qquad (3\text{-}2)$$

Вместо прямоугольных координат можно пользоваться цилиндрическими и сферическими. Цилиндрические координаты состоят из полярного радиуса ρ проекции M' точки M на плоскость xy, полярного угла φ этой проекции и координаты z. С прямоугольными координатами цилиндрические связаны формулами:

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z. \qquad (3\text{-}3)$$

Сферические координаты состоят из радиуса r, его угла θ с осью z и угла φ радиуса-вектора ρ проекции M' точки M на плоскость xy. С прямоугольными координатами сферические связаны формулами:

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta. \qquad (3\text{-}4)$$

§ 3-2. Уравнения движения точки и траектория

При движении точки ее радиус-вектор $\mathbf{r}$, а потому и координаты x, y, z являются функциями времени, т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}f_1(t) + \mathbf{j}f_2(t) + \mathbf{k}f_3(t), \quad x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (3\text{-}5)$$

формулы, выражающие радиус-вектор или координаты точки как функции времени, называются соответственно *векторным* или *координатными уравнениями движения*.

Геометрическое место последовательных положений движущейся точки в рассматриваемой системе отсчета называется *траекторией точки* в рассматриваемой системе отсчета. Траектория в то же время является геометрическим местом концов радиусов-векторов точки для различных моментов времени. Поэтому уравнения (3-5) движения точки в то же время служат параметрическими уравнениями кривой, на которой лежит траектория. Траектория не зависит от выбора начала на системе отсчета. Если дана кривая C (рис. 3-2), на которой лежит траектория, на этой кривой выбрано начало A_0 для отсчета длины дуги и установлены положительное и отрицательное направления отсчета, то в любой момент t движущаяся точка своим положением A на кривой C определяет длину дуги $s = \smile A_0A$. Формула

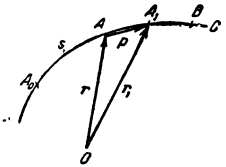


Рис. 3-2.

$$s = f(t), \quad (3\text{-}6)$$

выражающая эту дугу как функцию времени t, называется *законом движения* точки по данной кривой C.

Изменение положения точки в рассматриваемой системе отсчета, определяемое вектором $\mathbf{AA}_1$, проведенным из начального положения A в конечное A_1, называется *перемещением* точки. Если это перемещение происходит за бесконечно малый промежуток времени, то оно само бесконечно мало и называется *элементарным перемещением*. Если данный промежуток времени от момента t_A до момента t_B, которым соответствуют точки A и B, разбит на бесконечно малые части Δt_k, которым соответствуют бесконечно малые перемещения $\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k$, причем $A_0 = A$, $A_n = B$, то предел суммы абсолютных значений элементарных перемещений $\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k$ называется *путем точки* за данный конечный промежуток времени, т. е. путь L выражается формулой

$$L = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} |\mathbf{A}_{k-1}\mathbf{A}_k|.$$

Вообще, путь L не равен длине дуги $\smile AB$.

§ 3-3. Скорость точки

Скорость точки есть пространственно-временная мера движения, характеризующая изменение положения точки в данное мгновение в данной системе отсчета. Вектором $\mathbf{V}$ скорости движущейся точки в данный момент t называется предел отношения вектора перемещения $\mathbf{p}$

(рис. 3-3) за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ к величине этого промежутка при стремлении его к нулю, т. е.

$$\mathbf{V} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\mathbf{p}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}. \tag{3-7}$$

Последний предел называется геометрической, или векторной, производной радиуса-вектора $\mathbf{r}$ движущейся точки по времени и обозначается $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Из формул (3-5) для $\mathbf{r}$ следует:

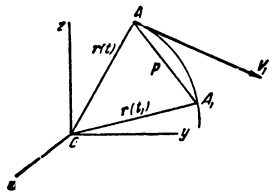


Рис. 3-3.

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} f_1'(t) + \mathbf{j} f_2'(t) + \mathbf{k} f_3'(t) = \mathbf{i} \frac{dx}{dt} + \mathbf{j} \frac{dy}{dt} + \mathbf{k} \frac{dz}{dt}. \tag{3-8}$$

Отсюда для модуля и проекций вектора скорости на оси системы отсчета получаются формулы:

$$\left.\begin{aligned} V_x = \frac{dx}{dt} = f_1'(t), \quad V_y = \frac{dy}{dt} = f_2'(t), \quad V_z = \frac{dz}{dt} = f_3'(t), \\ |\mathbf{V}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

Через дифференциал ds дуги кривой, на которой лежит траектория, модуль вектора скорости выражается формулой

$$|\mathbf{V}| = \frac{|ds|}{dt}. \tag{3-10}$$

Направляющие косинусы вектора скорости относительно осей системы отсчета выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\mathbf{V}, x) = \frac{\mathbf{V}_x}{|\mathbf{V}|} = \frac{dx}{|ds|}, \quad \cos(\mathbf{V}, y) = \frac{\mathbf{V}_y}{|\mathbf{V}|} = \frac{dy}{|ds|}, \\ \cos(\mathbf{V}, z) = \frac{\mathbf{V}_z}{|\mathbf{V}|} = \frac{dz}{|ds|}. \end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

Проекция V_τ вектора скорости на касательную к траектории, проведенную в направлении отсчета дуг $\mathbf{s}$, имеет величину

$$\mathbf{V}_\tau = \frac{ds}{dt} = \pm |\mathbf{V}|. \tag{3-12}$$

Эта проекция называется *алгебраической скоростью* и обозначается v. Размерность алгебраической скорости и модуля вектора ско-

рости есть

$$[v]=[|\mathbf{V}|]=\frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]}=\frac{м}{сек}. \tag{3-13}$$

Вектор скорости прикладывается в конце радиуса-вектора, соответствующего данному моменту t, и располагается на касательной к траектории в сторону отсчета дуг, если $v>0$, и в противоположную сторону, если $v<0$. Если v в течение движения постоянно, то движение называется *равномерным*. По данной постоянной величине v_0 скорости и по значению s_0 дуги в момент $t_0=0$ закон равномерного движения выражается формулой

$$s=v_0t+s_0. \tag{3-14}$$

При пользовании цилиндрическими и сферическими координатами вместо проекций вектора на оси xyz берутся его проекции на подвижные оси. В случае цилиндрических координат этими осями служат прямая OM'(рис. 3-1), по которой направлен радиус ρ проекции M' точки M на плоскости xy, перпендикулярная к ней ось $M'N$, проведенная по плоскости xy в сторону возрастания угла φ, и ось $M'M$, параллельная оси Oz. Проекции вектора скорости на эти оси выражаются формулами:

$$V_\rho=\frac{d\rho}{dt},\quad V_\varphi=\rho\frac{d\varphi}{dt},\quad V_z=\frac{dz}{dt}. \tag{3-15}$$

В случае сферических координат в качестве подвижных осей берутся прямая OM (рис. 3-4), по которой направлен радиус-вектор $\mathbf{r}$, перпендикулярная к нему прямая MK в плоскости OMM', направленная в сторону возрастания угла θ, и прямая ML, перпендикулярная к плоскости OMM', направленная в сторону возрастания угла φ. Проекции вектора скорости на эти оси выражаются формулами:

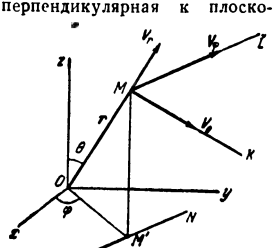


Рис. 3-4.

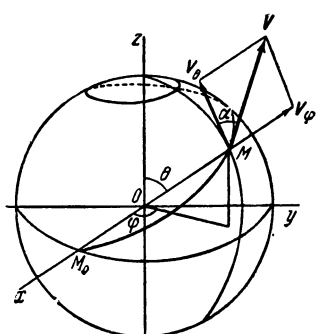


Рис. 3-5.

$$V_r=\frac{dr}{dt},\quad V_\theta=r\frac{d\theta}{dt},\quad V_\varphi=r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3-16}$$

Пример. Материальная точка движется равномерно по поверхности сферы радиуса a от экватора к полюсу так, что ее скорость $\mathbf{V}$ образует с меридианом острый угол α (рис. 3-5). Определить траекторию, называемую *локсодромой*, и время, в течение которого точка, начиная движение от экватора, достигнет полюса сферы. Так как в этом случае

$V_\theta = -v\cos\alpha$ и $V_\varphi = v\sin\alpha$, то $a\dfrac{d\theta}{dt} = -v\cos\alpha$, $a\sin\theta\dfrac{d\varphi}{dt} = v\sin\alpha$, откуда $\dfrac{d\theta}{\sin\theta} = -\dfrac{d\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}$. Следовательно, $\ln\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = -\dfrac{\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} + C$. Пусть при $\varphi = 0$ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Тогда $C = 0$, и уравнение локсодромы получает вид: $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} = e^{-\frac{\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}}$. При $\theta = 0$ $\varphi = \infty$ и точка достигнет полюса после бесконечного числа оборотов по сфере. Так как $ds = vdt = a\sqrt{d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2} = a\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\, d\theta = \dfrac{a\, d\theta}{\cos\alpha}$, то длина L пути от экватора до полюса будет $L = \int_0^{\pi/2} \dfrac{ad\theta}{\cos\alpha} = \dfrac{\pi a}{2\cos\alpha}$ и время движения $T = \dfrac{L}{v} = \dfrac{\pi a}{2v\cos\alpha}$.

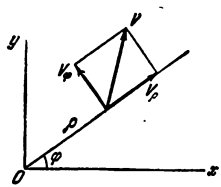


Рис. 3-6.

В случае плоского движения (рис. 3-6) по плоскости xy, $z = 0$ формулы (3-15) дают проекции вектора V на полярный радиус-вектор ρ и на перпендикуляр к нему.

Модуль скорости в полярных координатах выражается формулой

$$|V| = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2}.$$

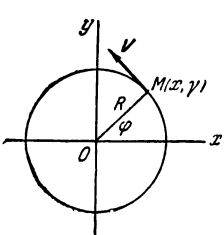


Рис. 3-7.

В случае кругового движения (рис. 3-7) $\rho = R = \text{const}$. Скорость направлена перпендикулярно к радиусу OM, и ее проекция на касательную, направленную в сторону возрастания полярного угла φ (против хода часовой стрелки), имеет величину $V_\tau = R\dfrac{d\varphi}{dt}$. Производная $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$ называется *алгебраической угловой скоростью* точки в круговом движении. Она измеряется единицей $[\omega] = сек^{-1}$. Алгебраическая скорость v в круговом движении имеет величину

$$v = R\omega. \tag{3-17}$$

Проекции скорости на оси x и y имеют значения:

$$v_x = -y\omega, \quad v_y = x\omega. \tag{3-18}$$

Круговое движение равномерно при $\omega = \omega_0 = \text{const}$. Угол φ в равномерном круговом движении выражается формулой

$$\varphi = \omega_0 t + \varphi_0, \tag{3-19}$$

где φ_0 — значение угла φ при $t = 0$. Период T полного оборота при круговом движении с угловой скоростью ω выражается формулой

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{3-20}$$

Угловую скорость ω можно выразить числом n оборотов в минуту по

формуле

$$\omega = \frac{\pi n}{30}. \tag{3-21}$$

Проекция M' (рис. 3-8) на ось x точки M, совершающей равномерное круговое движение по окружности радиуса a, движется по закону

$x = a\cos(\omega t + \varphi_0)$ или, полагая $\varphi_0 = \alpha - \frac{\pi}{2}$,

$$x = a\sin(\omega t + \alpha). \tag{3-22}$$

Это движение называется *гармоническим прямолинейным колебанием*. Расстояние $2a$ между крайними точками A_1 и A_2 называется *размахом колебаний*, середина O между точками A_1 и A_2 называется *центром* колебания; наибольшее отклонение $OA_1 = OA_2 = a$ колеблющейся точки от центра называется *амплитудой* колебания; величина $\omega t + \alpha$ называется *фазой* колебания.

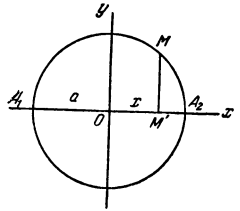


Рис. 3-8.

Если закон прямолинейного движения имеет вид:

$$x = a_1\sin(\omega t + \alpha_1) + a_2\sin(\omega t + \alpha_2), \tag{3-23}$$

то это движение представляет собой *гармоническое* колебание (3-22), где

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}, \tag{3-24}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_1\sin\alpha_1 + a_2\sin\alpha_2}{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2}. \tag{3-25}$$

Если уравнение плоского движения имеет форму

$$x = a_1\sin(\omega t + \alpha_1), \quad y = a_2\sin(\omega t + \alpha_2), \tag{3-26}$$

то траектория лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2\frac{x}{a_1}\frac{y}{a_2}\cos\theta = \sin^2\theta, \tag{3-27}$$

где $\theta = \alpha_1 - \alpha_2$. При $\theta = 0$ траектория лежит на прямой $\frac{x}{a_1} - \frac{y}{a_2} = 0$,

а при $\theta = \pi$ — на прямой $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{a_2} = 0$.

Рис. 3-9.

§ 3-4. Секторная скорость

Секторной скоростью называется пространственно-временна́я характеристика движения точки по отношению к данному центру. Секторная скорость измеряется пределом отношения приращения площади S (рис. 3-9), описываемой радиусом-вектором ρ точки, имеющим начало в данном центре O, к соответствующему промежутку времени, при стремлении этого промежутка к нулю. Секторная скорость применяется главным образом к исследованию плоского движения и в полярных координатах выражается формулой

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}\rho^2\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3-28}$$

§ 3-5. Ускорение точки

Ускорением точки называется пространственно-временна́я мера изменения движения, характеризующая изменение скорости точки в данный момент в данной системе отсчета. Вектором ускорения $\mathbf{w}$ в данный момент t называется предел отношения приращения $\Delta\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}$ вектора скорости за промежуток времени $\Delta t = t_1 - t$ к величине этого промежутка при стремлении его к нулю, т. е.

$$\mathbf{w} = \lim_{t_1 \to t} \frac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}}{t_1 - t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{V}}{\Delta t}. \tag{3-29}$$

Последний предел называется *геометрической производной* вектора $\mathbf{V}$ скорости по времени и обозначается $\frac{d\mathbf{V}}{dt}$. Из формулы (3-8) для вектора $\mathbf{V}$ следует:

$$\mathbf{w} = \mathbf{i} f_1''(t) + \mathbf{j} f_2''(t) + \mathbf{k} f_3''(t) = \mathbf{i}\frac{d^2x}{dt^2} + \mathbf{j}\frac{d^2y}{dt^2} + \mathbf{k}\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3-30}$$

Отсюда для проекции $\mathbf{w}$ на оси системы отсчета и для его модуля получаются формулы:

$$\left.\begin{aligned} w_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV_x}{dt},\ w_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dV_y}{dt},\ w_z = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dV_z}{dt}, \\ |\mathbf{w}| = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3-31}$$

Модуль $[\mathbf{w}]$ вектора ускорения измеряется единицами:

$$[\mathbf{w}] = \frac{[\text{длина}]}{[\text{время}]^2} = \frac{м}{сек^2}. \tag{3-32}$$

Вектор $\mathbf{w}$ ускорения приложен (рис. 3-10) в конце A радиуса-вектора $\mathbf{r}$, соответствующего данному моменту t, и лежит в соприкасающейся плоскости траектории, т. е. в плоскости, проходящей через касательную AT и главную нормаль An. При разложении вектора ускорения на два компонента по касательной и главной нормали он выражается формулой

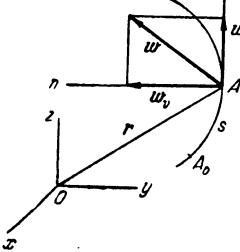


Рис. 3-10.

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}, \tag{3-33}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной AT, проведенный в положительном направлении отсчета дуг по кривой, на которой лежит траектория; ρ — радиус кривизны этой кривой в данной точке A; $\boldsymbol{\nu}$ — орт главной нормали, направленной к центру кривизны (в сторону вогнутости); v — алгебраическая скорость в данный момент. Первый компонент $\mathbf{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}$ называется *касательным* (тангенциальным) ускорением и соответствует изменению скорости вдоль ее направления, второй компонент $\mathbf{w}_\nu = \frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{\nu}$ называется *нормальным* (*центростремительным*) ускорением

и соответствует изменению скорости перпендикулярно к ее направлению.

Пример. Уравнения движения имеют вид: $x = a\cos\omega t$, $y = a\sin\omega t$, $z = bt$, где a, b, ω — постоянные. Найти радиус кривизны траектории (винтовой линии на круглом цилиндре). Так как в данном примере $V_x = -a\omega\sin\omega t$, $V_y = a\omega\cos\omega t$, $V_z = b$, то $v = \sqrt{a^2\omega^2 + b^2}$, т. е. движение равномерное. Следовательно, $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\nu$; $|\mathbf{w}| = \frac{v^2}{\rho}$; $\rho = \frac{v^2}{|\mathbf{w}|}$. Так как $w_x = -a\omega^2\cos\omega t$, $w_y = -a\omega^2\sin\omega t$, $w_z = 0$, то $|w| = a\omega^2$ и $\rho = \frac{a^2\omega^2 + b^2}{a\omega^2}$.

При равномерном движении $\mathbf{w}_\tau = 0$ и вектор ускорения направлен перпендикулярно к вектору скорости. Если v и $\frac{dv}{dt}$ одного знака, то $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) < \frac{\pi}{2}$, абсолютная величина $|v|$ скорости возрастает со временем и движение называется *ускоренным*. Если v и $\frac{dv}{dt}$ разных знаков, то $\angle(\mathbf{v}, \mathbf{w}) > \frac{\pi}{2}$, абсолютная величина $|v|$ скорости убывает со временем и движение называется *замедленным*. Если w_τ для всех моментов имеет одно и то же значение $w_\tau = a$, то движение называется *равнопеременным*. По данной величине a и значениям v_0 и s_0 скорости и длины дуги в момент $t_0 = 0$ скорость v и длина s дуги выражаются формулами:

$$v = at + v_0, \quad s = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0. \tag{3-34}$$

В момент $t^* = -\frac{v_0}{a}$ скорость обращается в нуль, до этого момента, при $t < t^*$, равнопеременное движение замедленное, после, при $t > t^*$, — ускоренное.

При прямолинейном движении $\rho = \infty$, $\mathbf{w}_\nu = 0$ и вектор ускорения направлен по той же прямой, на которой лежит траектория.

В криволинейном движении $\mathbf{w}_\nu = 0$ в точках перегиба и возврата. В случае прямолинейного равномерного движения вектор $\mathbf{w}$ ускорения равен нулю.

Если даны уравнения движения (3-5), то касательное и нормальное ускорения можно вычислить по формулам:

$$\left.\begin{aligned} w_\tau &= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}}{v}; \\ w_\nu &= \frac{\sqrt{(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2 + (\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \end{aligned}\right\} \tag{3-35}$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ и т. д.

Проекции ускорения на подвижные оси, для проекций скорости на которые даны формулы (3-15) и (3-16), выражаются так: для цилиндрических координат

$$w_\rho = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2; \quad w_\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right); \quad w_z = \frac{d^2z}{dt^2}; \tag{3-36}$$

для сферических координат

$$\left.\begin{aligned} w_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin^2\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2; \\ w_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta\right); \\ w_\theta &= \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) - r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \sin\theta\cos\theta\right]. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}37)$$

В случае плоского движения по плоскости (xy) $z = 0$ и две первые формулы (3-36) дают проекции вектора ускорения на полярный радиус-вектор ρ и на перпендикуляр к нему, проведенный в сторону возрастания полярного угла φ. В случае кругового движения (рис. 3-11) $\rho = OA = R$ и формулы дают:

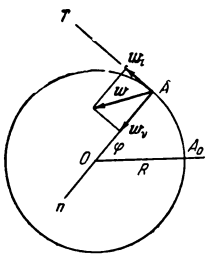


Рис. 3-11.

$$w_\rho = -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2, \quad w_\varphi = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Так как в случае кругового движения $w_\rho = -w_\nu$, $w_\varphi = w_\tau$, $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, то

$$w_\nu = R\omega^2, \quad w_\tau = R\frac{d\omega}{dt}. \quad (3\text{-}38)$$

Производная от угловой скорости ω кругового движения называется *алгебраическим угловым ускорением* и обозначается ε:

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon. \quad (3\text{-}39)$$

Измеряется угловое ускорение единицами: $[\varepsilon] = \frac{1}{сек^2}$. Отсюда в случае кругового движения

$$w_\tau = R\varepsilon. \quad (3\text{-}40)$$

Следовательно,

$$|\mathbf{w}| = R\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \quad (3\text{-}41)$$

Угол μ (рис. 3-12), составляемый вектором $\mathbf{w}$ с радиусом AO, определяется формулой

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}. \quad (3\text{-}42)$$

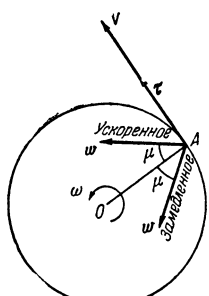


Рис. 3-12.

Так как $\mathbf{V} = R\omega\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{w}_\tau = R\varepsilon\boldsymbol{\tau}$, то при $\omega\varepsilon > 0$ круговое движение ускоренное, а при $\omega\varepsilon < 0$ — замедленное. В первом случае для получения направления вектора $\mathbf{w}$ радиус AO надо повернуть около точки A на угол μ в сторону, *противоположную* направлению, в котором происходит круговое движение, а во втором — в ту же.

В случае прямолинейного гармонического колебания (3-22) ускорение w' алгебраически выражается формулой

$$w' = \frac{d^2x}{dt^2} = -a\omega^2\sin(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x, \quad (3\text{-}43)$$

Так как при равномерном круговом движении точки M, проекция M' которой совершает гармоническое колебание, $w_x = \frac{d(-\omega y)}{dt} = -\omega^2 x$, то ускорение w' проекции M' равно проекции ускорения $\mathbf{w}$ точки M. Направлено $\mathbf{w}'$ всегда к центру колебания O.

Глава 3-2

КИНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3-6. Конечные перемещения твердого тела

Положение твердой плоской фигуры при движении по неподвижной плоскости определяется положением какого-нибудь ее отрезка AB. Если в двух положениях фигуры этот отрезок занимает параллельные положения A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 3-13), то и все отрезки фигуры

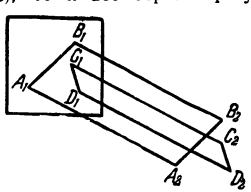


Рис. 3-13.

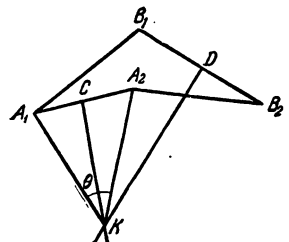


Рис. 3-14.

занимают параллельные положения. Перемещения всех точек фигуры геометрически равны между собой: $\mathbf{A_1A_2} = \mathbf{B_1B_2} = \mathbf{C_1C_2} = \ldots$ Такое перемещение фигуры называется *поступательным*.

Если отрезок AB занимает в первом и во втором положениях фигуры непараллельные положения A_1B_1 и A_2B_2 (рис. 3-14), то все перемещение фигуры можно выполнить одним поворотом на угол $\theta = \angle A_1KA_2$ вокруг центра K, лежащего на пересечении перпендикуляров к перемещениям A_1A_2 и B_1B_2 в их срединах C и D. В этом состоит *теорема Эйлера — Шаля*. Положение тела, имеющего закрепленную точку O, определяется положением двух точек A и B, не лежащих на одной прямой с центром O. Если при перемещении тела из первого положения во второе точки A и B совершили перемещения A_1A_2 и B_1B_2 (рис. 3-15), то перемещение тела из первого положения во второе можно выполнить одним поворотом на двугранный угол $A_1OKA_2 = B_1OKB_2$ вокруг оси OK, по которой пересекаются плоскости, проведенные перпендикулярно к перемещениям A_1A_2 и B_1B_2 в их срединах C и D. В этом состоит *теорема д'Аламбера — Эйлера*. Такая ось OK — единственная и не зависит от выбора точек A и B. Общее перемещение тела, при котором отрезок AB из по-

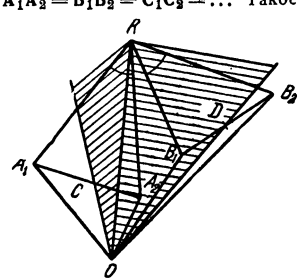


Рис. 3-15.

ложения A_1B_1 (рис. 3-16) переходит в положение A_2B_2, можно выполнить, переместив сначала тело поступательно так, чтобы точка A перешла из положения A_1 в положение A_2, а затем повернуть тело вокруг оси A_2K или сначала переместить тело поступательно так, чтобы точка B перешла из положения B_1 в положение B_2, а затем повернуть тело вокруг оси B_2L. При этом оси A_2K и B_2L будут параллельны и двугранные углы, на которые тело вокруг этих осей поворачивается, будут между собой равны. Проекции A_2A' и B_2B' перемещений A_1A_2 и B_1B_2 двух точек A и B тела на постоянное направление оси поворота равны между собой: $A_2A'=B_2B'$. В теле можно найти такую точку C, перемещение которой C_1C_2 равно постоянной величине проекции перемещения любой точки тела на постоянное направление оси поворота, и тогда перемещение тела можно выполнить, повертывая его вокруг оси C_1C_2 на определенный двугранный угол и сообщая ему поступательное перемещение C_1C_2. Такая комбинация поворота вокруг оси и поступательного перемещения вдоль этой же оси называется *винтовым перемещением.*

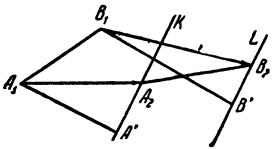


Рис. 3-16.

§ 3-7. Общее свойство скоростей точек движущегося твердого тела

При любом движении твердого тела в каждый момент проекции скоростей двух точек тела на ось, соединяющую положения этих точек, равны между собой. Если обозначить вектор AB через $\mathbf{l}$ (рис. 3-17), то эта теорема выражается равенством скалярных произведений:

$$(\mathbf{l}, \mathbf{V}_A) = (\mathbf{l}, \mathbf{V}_B). \qquad (3\text{-}44)$$

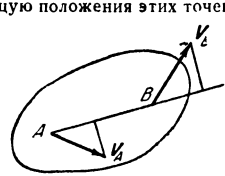


Рис. 3-17.

Если заданы в согласии с этой теоремой скорости $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ трех точек A_1, A_2, A_3 тела, не лежащих на одной прямой, то скорость любой точки A, не лежащей на плоскости $A_1A_2A_3$, можно вычислить при помощи векторов $\mathbf{l}_1=\mathbf{A}_1\mathbf{A}$, $\mathbf{l}_2=\mathbf{A}_2\mathbf{A}$, $\mathbf{l}_3=\mathbf{A}_3\mathbf{A}$ из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} l_{1x}V_x+l_{1y}V_y+l_{1z}V_z&=(\mathbf{l}_1,\ \mathbf{V}_1),\\ l_{2x}V_x+l_{2y}V_y+l_{2z}V_z&=(\mathbf{l}_2,\ \mathbf{V}_2),\\ l_{3x}V_x+l_{3y}V_y+l_{3z}V_z&=(\mathbf{l}_3,\ \mathbf{V}_3). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}45)$$

§ 3-8. Поступательное движение

Движение твердого тела называется *поступательным*, если любая прямая, взятая в теле, занимает во все моменты движения положения, параллельные между собой. При поступательном движении тела перемещения всех его точек за один и тот же произвольно выбранный промежуток времени равны между собой. Для данного момента времени скорости и ускорения всех точек поступательно движущегося тела оди-

наковы. Если в данный момент времени скорости трех точек тела, не лежащих на одной прямой, равны между собой, то скорости всех точек тела в этот момент одинаковы и состояние движения тела называется *мгновенно поступательным*.

§ 3-9. Вращательное движение твердого тела

Движение твердого тела называется *вращательным*, если любая плоскость, проведенная через точку тела и некоторую неподвижную прямую, лишь поворачивается вокруг этой прямой. Эта неподвижная прямая называется *осью вращения*. Движение тела будет обязательно вращательным, если две его точки остаются неподвижными относительно взятой системы отсчета; прямая, соединяющая эти точки, и будет осью вращения. При вращательном движении тела все его точки описывают окружности в плоскостях, перпендикулярных к оси вращения с центрами на этой оси. Положение тела, вращающегося около оси zz (рис. 3-18), определяется *углом поворота* φ, равным линейному углу двугранного, составленного какой-нибудь плоскостью П, проведенной через ось вращения zz, с неподвижной плоскостью Π_0, проведенной через ту же ось. Формула, выражающая этот угол в зависимости от времени, т. е.

$$\varphi = f(t), \qquad (3\text{-}46)$$

называется *уравнением вращения тела*. Угол φ считается положительным, если при наблюдении с положительного конца оси вращения он отложен от неподвижной плоскости Π_0 к подвижной П против хода часовой стрелки, и отрицательным — в обратном случае. Производная $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ называется *угловой скоростью тела*, а производная $\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon$ — *угловым ускорением тела*. Угловая скорость и угловое ускорение тела равны угловой скорости и угловому ускорению любой точки тела в ее круговом движении по окружности с центром на оси вращения.

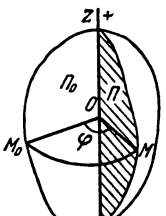


Рис. 3-18.

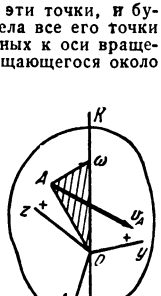


Рис. 3-19.

Угловую скорость вращающегося тела изображают в виде вектора $\boldsymbol{\omega}$, равного по модулю абсолютной величине $|\omega|$ и отложенного по оси вращения от произвольной точки O в ту сторону оси, при наблюдении с которой вращение тела происходит против хода часовой стрелки. Проекция ω_{zz} вектора $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости на ось вращения равна алгебраически величине ω угловой скорости тела: $\omega_{zz} = \omega$. Вектор $\mathbf{V}_A$ (рис. 3-19) скорости любой точки A тела при вращательном движении определяется формулой Эйлера:

$$\mathbf{V}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}, \qquad (3\text{-}47)$$

где O есть любая точка на оси вращения. Если эту точку O принять за начало правой системы координатных осей, то через координаты

x, y, z точки A и проекции ω_x, ω_y, ω_z вектор $\mathbf{V}_A$ выражается формулой

$$\mathbf{V}_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}, \tag{3-48}$$

откуда проекции V_x, V_y, V_z выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} V_x = \begin{vmatrix} \omega_y & \omega_z \\ y & z \end{vmatrix} = \omega_y z - \omega_z y; \quad V_y = \begin{vmatrix} \omega_z & \omega_x \\ z & x \end{vmatrix} = \omega_z x - \omega_x z; \\ V_z = \begin{vmatrix} \omega_x & \omega_y \\ x & y \end{vmatrix} = \omega_x y - \omega_y x. \end{aligned}\right\} \tag{3-49}$$

§ 3-10. Вращение вокруг центра

Движение тела называется вращением вокруг центра или сферическим, если точки тела описывают траектории, лежащие на сферах с одним и тем же неподвижным центром, называемым *центром вращения*.

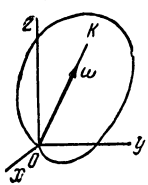


Рис. 3-20.

Движение тела будет обязательно сферическим, если одна точка тела остается неподвижной относительно взятой системы отсчета. При вращении тела около центра O в любой момент t существует такая прямая OK (рис. 3-20), что скорости всех точек тела в этот момент таковы же, какие получились бы при вращении тела вокруг этой прямой как вокруг неподвижной оси с некоторой угловой скоростью ω. Эта прямая OK называется мгновенной осью вращения, а угловая скорость ω — *мгновенной угловой скоростью* тела. Мгновенная ось вращения — предельное положение такой оси, вокруг которой по теореме д'Аламбера (§ 3-6) следует повернуть тело на бесконечно малый угол за бесконечно малый промежуток времени, чтобы перевести это тело из данного положения в другое, бесконечно близкое к первому. Мгновенная ось — прямая пересечения плоскостей, проведенных через точки тела перпендикулярно к векторам их скоростей. В любых осях xyz уравнения мгновенной оси имеют вид:

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}, \tag{3-50}$$

где ω_x, ω_y, ω_z обозначают проекции вектора ω мгновенной угловой скорости. Конус, составленный положениями в различные моменты времени мгновенной оси относительно неподвижной системы отсчета, называется *неподвижным аксоидом*, а конус, образованный в теле точками, через которые в различные моменты времени проходит мгновенная ось, называется *подвижным аксоидом*. При вращении тела подвижный аксоид катится по неподвижному, прикасаясь к нему по общей образующей, которая и является мгновенной осью для взятого момента времени.

§ 3-11. Углы Эйлера

Аналитически положение тела, вращающегося около неподвижного центра O, определяется девятью косинусами углов, составляемых с неподвижными осями xyz осями $x'y'z'$, жестко связанными с вращаю-

щимся телом. Эти косинусы располагаются в таблицу:

	x'	y'	z'
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

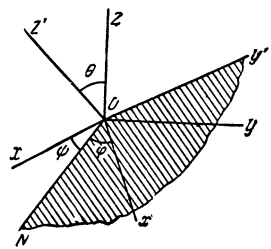


Рис. 3-21.

При вращении тела эти косинусы — функции времени, и проекции $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ мгновенной угловой скорости ω на *подвижные* оси выражаются через эти функции и их производные формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\omega_{x'} &= \dot{\alpha}_2\alpha_3 + \dot{\beta}_2\beta_3 + \dot{\gamma}_2\gamma_3 = -(\alpha_2\dot{\alpha}_3 + \beta_2\dot{\beta}_3 + \gamma_2\dot{\gamma}_3),\\
\omega_{y'} &= \dot{\alpha}_3\alpha_1 + \dot{\beta}_3\beta_1 + \dot{\gamma}_3\gamma_1 = -(\alpha_3\dot{\alpha}_1 + \beta_3\dot{\beta}_1 + \gamma_3\dot{\gamma}_1),\\
\omega_{z'} &= \dot{\alpha}_1\alpha_2 + \dot{\beta}_1\beta_2 + \dot{\gamma}_1\gamma_2 = -(\alpha_1\dot{\alpha}_2 + \beta_1\dot{\beta}_2 + \gamma_1\dot{\gamma}_2).
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}51)$$

Девять направляющих косинусов осей $x'y'z'$ можно выразить через три угла Эйлера. Прямая ON (рис. 3-21) пересечения плоскостей xy и $x'y'$ называется *линией узлов*. Положительное направление на оси ON устанавливается так, чтобы при наблюдении плоскости zz' с положительного конца оси N поворот от оси z к оси z' на *наименьший* угол происходил против хода часовой стрелки. Угол положительного направления оси N узлов с положительным направлением оси x, измеряемый алгебраически наблюдением с положительного конца оси z, называется *углом прецессии*: $\angle xON = \psi$.

Угол положительного направления оси x' с положительным направлением ON оси узлов, измеряемый алгебраически наблюдением с положительного конца оси z', называется *углом собственного вращения*: $\angle NOx' = \varphi$. Угол положительного направления оси z' с положительным направлением оси z, измеряемый алгебраически наблюдением с положительного конца оси ON узлов, называется *углом нутации*: $\angle zOz' = \theta$. Углы ψ, φ, θ называются *углами Эйлера*. Направляющие косинусы подвижных осей $x'y'z'$ с неподвижными выражаются через углы Эйлера формулами:

$$\left.\begin{aligned}
&\cos(x, x') = \alpha_1 = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
&\cos(x, y') = \alpha_2 = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
&\cos(x, z') = \alpha_3 = \sin\psi\sin\theta,\\
&\cos(y, x') = \beta_1 = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\theta,\\
&\cos(y, y') = \beta_2 = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\theta,\\
&\cos(y, z') = \beta_3 = -\cos\psi\sin\theta,\\
&\cos(z, x') = \gamma_1 = \sin\varphi\sin\theta,\\
&\cos(z, y') = \gamma_2 = \cos\varphi\sin\theta,\\
&\cos(z, z') = \gamma_3 = \cos\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}52)$$

При вращении тела эйлеровы углы ψ, φ, θ — функции времени и угловая скорость ω тела выражается через эти углы и их производные $\frac{d\psi}{dt}=\dot{\psi}$, $\frac{d\varphi}{dt}=\dot{\varphi}$, $\frac{d\theta}{dt}=\dot{\theta}$ формулой

$$\omega^2=\dot{\psi}^2+\dot{\varphi}^2+\dot{\theta}^2+2\dot{\psi}\dot{\varphi}\cos\theta. \tag{3-53}$$

Проекции ω_x, ω_y, ω_z мгновенной угловой скорости ω на неподвижные оси xyz выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned}\omega_x&=\dot{\varphi}\sin\psi\sin\theta+\dot{\theta}\cos\psi;\quad \omega_y=-\dot{\varphi}\cos\psi\sin\theta+\dot{\theta}\sin\psi;\\ \omega_z&=\dot{\psi}+\dot{\varphi}\cos\theta.\end{aligned}\right\} \tag{3-54}$$

Проекции $\omega_{x'}=p$, $\omega_{y'}=q$, $\omega_{z'}=r$ мгновенной угловой скорости ω на подвижные оси $x'y'z'$, жестко связанные с телом, имеют значения: $p=\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi+\dot{\theta}\cos\varphi$; $q=\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi-\dot{\theta}\sin\varphi$; $r=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi}$. (3-55)

§ 3-12. Угловое ускорение вращающегося тела

Угловым ускорением называется пространственно-временна́я мера изменения вращения твердого тела, характеризующая изменение угловой скорости в данное мгновение. Выражается угловое ускорение в виде вектора ε, равного пределу отношения разности $\omega_1-\omega$ значений вектора мгновенной угловой скорости в моменты t и $t_1=t+\Delta t$ к величине $\Delta t=t_1-t$ промежутка времени, при стремлении этого промежутка к нулю:

$$\varepsilon=\lim_{t_1\to t}\frac{\omega_1-\omega}{t_1-t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}. \tag{3-56}$$

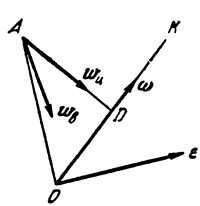


Рис. 3-22.

Проекции вектора ε на неподвижные оси xyz выражаются формулами: $\varepsilon_x=\frac{d\omega_x}{dt}$, $\varepsilon_y=\frac{d\omega_y}{dt}$, $\varepsilon_z=\frac{d\omega_z}{dt}$, а на подвижные оси $x'y'z'$, жестко связанные с телом, — формулами:

$$\varepsilon_{x'}=\frac{d\omega_{x'}}{dt},\quad \varepsilon_{y'}=\frac{d\omega_{y'}}{dt},\quad \varepsilon_{z'}=\frac{d\omega_{z'}}{dt}.$$

Прикладывается вектор ε (рис. 3-22) в неподвижном центре O вращения. При вращении около неподвижной оси (рис. 3-19) вектор ε направлен по оси вращения и $|\varepsilon|$ равен абсолютному значению $|\varepsilon|$ углового ускорения точек тела в их круговых движениях.

§ 3-13. Ускорения точек вращающегося тела

Вектор $\mathbf{w}$ ускорения точки A тела выражается через ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ и вектор скорости $\mathbf{V}$ формулой Ривальса:

$$\mathbf{w}=\varepsilon\times\mathbf{r}+\omega\times\mathbf{V}=\varepsilon\times\mathbf{r}+\omega\times(\omega\times\mathbf{r}). \tag{3-57}$$

Первое слагаемое $\varepsilon\times\mathbf{r}=\mathbf{w}_B$ называется *вращательным ускорением*; оно направлено перпендикулярно к плоскости $(\mathbf{r},\varepsilon)$. Второе слагаемое

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} = \mathbf{w}_{\text{ц}}$ называется *центростремительным* (или осестремительным) *ускорением*. Оно направлено по перпендикуляру AD, опущенному из точки A на мгновенную ось OK, и имеет модуль $|\mathbf{w}_{\text{ц}}| = \omega^2 \cdot AD$.

Вращательное и центростремительное ускорения, вообще, не являются касательным и нормальным ускорениями точки. Но в частном случае вращения вокруг *неподвижной* оси $\mathbf{w}_{\text{в}} = \mathbf{w}_{\tau}$ и $\mathbf{w}_{\text{ц}} = \mathbf{w}_{\nu}$. Проекции вектора $\mathbf{w}$ ускорения на неподвижные оси xyz и оси $x'y'z'$, жестко связанные с телом, определяются через соответственные координаты x, y, z и x', y', z' точки формулами:

$$\left.\begin{aligned}
w_x &= \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x,\\
w_y &= \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y,\\
w_z &= \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z,\\
w_{x'} &= \varepsilon_{y'} z' - \varepsilon_{z'} y' + \omega_{x'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 x',\\
w_{y'} &= \varepsilon_{z'} x' - \varepsilon_{x'} z' + \omega_{y'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 y',\\
w_{z'} &= \varepsilon_{x'} y' - \varepsilon_{y'} x' + \omega_{z'}(\omega_{x'} x' + \omega_{y'} y' + \omega_{z'} z') - \omega^2 z'.
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}58)$$

§ 3-14. Плоское движение твердого тела

Плоским или *плоско-параллельным* движением тела называется такое, при котором все точки тела движутся относительно данной системы отсчета только в плоскостях, параллельных неподвижной в этой же системе плоскости, называемой *плоскостью движения*. Траектории, скорости и ускорения точек тела при плоском движении математически одинаковы с траекториями, скоростями и ускорениями проекций этих точек на плоскость движения. Потому теория плоского движения тела сводится к теории движения по неподвижной плоскости твердой фигуры, представляющей проекцию тела на плоскость движения.

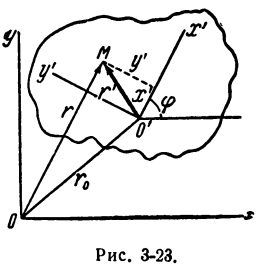


Рис. 3-23.

Для определения положения подвижной фигуры на неподвижной плоскости xy (рис. 3-23) выбираем на фигуре произвольно точку O', называемую *основной* или *полюсом*, и принимаем ее за начало осей x' и y', жестко связанных с фигурой. Тогда положение фигуры на плоскости xy определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ основной точки O' и углом φ оси x' с осью x, называемым углом *поворота* фигуры вокруг полюса. При движении фигуры $\mathbf{r}_0$ и координаты x_0, y_0 полюса O', а также угол φ поворота являются функциями времени, и формулы

$$x = f_1(t), \qquad y = f_2(t), \qquad \varphi = f_3(t) \qquad (3\text{-}59)$$

называются *уравнениями плоского движения*. Производная $\frac{d\varphi}{dt}$ от угла поворота фигуры вокруг полюса от выбора полюса не зависит и называется *угловой скоростью* ω фигуры: $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Вектор $\boldsymbol{\omega}$, направленный перпендикулярно к плоскости движения и имеющий проекцию $\omega_z = \frac{d\varphi}{dt}$ на ось z, составляющую с осями x и y

правую систему, называется *вектором угловой скорости* фигуры. Через вектор $\mathbf{V}_0$ скорости полюса O', вектор угловой скорости фигуры и радиус-вектор $\mathbf{r}'$ точки M относительно полюса O' вектор $\mathbf{V}$ скорости этой точки выражается формулой

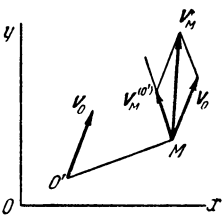


Рис. 3-24.

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'. \tag{3-60}$$

При поступательном движении фигуры $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0$, т. е. $\boldsymbol{\omega} = 0$; при вращении вокруг *неподвижного* полюса $\mathbf{V}_0 = 0$, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ и $\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$. Произведение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$ называется вращательной скоростью точки M вокруг полюса O' и обозначается $\mathbf{V}_M^{(O')} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'$, так что $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_0 + \mathbf{V}_M^{(O')}$. При этом (рис. 3-24) $\mathbf{V}_M^{(O')} \perp O'M$; $\left|\mathbf{V}_M^{(O')}\right| = O'M \cdot |\omega|$. Проекции $\mathbf{V}_x$ и $\mathbf{V}_y$ вектора скорости $\mathbf{V}$ определяются через координаты x, y точки M относительно неподвижных осей xy формулами:

$$V_x = V_{0x} - \omega (y - y_0), \qquad V_y = V_{0y} + \omega (x - x_0). \tag{3-61}$$

Направление $\mathbf{V}_M^{(O')}$ при наблюдении с конца вектора $\boldsymbol{\omega}$ указывает обход вокруг полюса против хода часовой стрелки. На подвижные оси $x'y'$, жестко связанные с движущейся фигурой, проекции $V_{x'}$ и $V_{y'}$ скорости $\mathbf{V}$ выражаются через координаты x', y' формулами:

$$\left.\begin{aligned} V_{x'} &= V_{0x} \cos\varphi + V_{0y} \sin\varphi - \omega y', \\ V_{y'} &= -V_{0x} \sin\varphi + V_{0y} \cos\varphi + \omega x'. \end{aligned}\right\} \tag{3-62}$$

§ 3-15. Мгновенный центр скоростей

Если с плоской фигурой жестко соединить всю плоскость, на которой лежит эта фигура, то эта присоединенная плоскость будет вместе с фигурой двигаться по неподвижной плоскости с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ и скорости точек присоединенной плоскости вычисляются по тем же формулам (3-61) и (3-62). Если для данного момента времени $\omega \neq 0$, то на присоединенной плоскости найдется единственная точка P, скорость которой в данный момент равна нулю. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*, или *мгновенным центром вращения* фигуры. Координаты x_P, y_P мгновенного центра по неподвижным осям определяются формулами:

$$x_P = x_0 - \frac{V_{0y}}{\omega}, \quad y_P = y_0 + \frac{V_{0x}}{\omega}, \tag{3-63}$$

а координаты x'_P, y'_P по неподвижным осям, жестко связанным с фигурой, — формулами:

$$x'_P = \frac{V_{0x} \sin\varphi - V_{0y} \cos\varphi}{\omega}, \quad y'_P = \frac{V_{0x} \cos\varphi + V_{0y} \sin\varphi}{\omega}. \tag{3-64}$$

Геометрически точка P строится как пересечение перпендикуляров, восставленных в двух точках фигуры на ее плоскости к прямым, по которым направлены скорости этих точек.

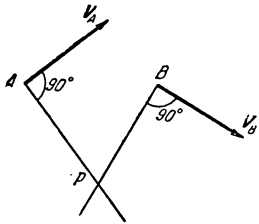


Рис. 3-25.

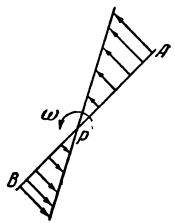


Рис. 3-26.

Если за полюс O' (рис. 3-25) принять мгновенный центр скорости P, то для данного момента t формула (3-60) примет вид:

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' = \mathbf{V}_M^{(P)}, \tag{3-65}$$

т. е. скорости всех точек фигуры в данный момент таковы же, какие получились бы при вращении рисунка вокруг неподвижной точки P с мгновенной угловой скоростью ω. Эпюра скоростей точек, лежащих на одной прямой AB с мгновенным центром P, представляет собой прямоугольный треугольник с вершиной в точке P (рис. 3-26).

Для вращательных скоростей $\mathbf{V}_M^{(O')}$ точек, лежащих на одной прямой с полюсом O' (рис. 3-27), эпюрой служит прямоугольный треугольник с вершиной в полюсе O', а потому концы векторов $\mathbf{V}_M$ скоростей точек M лежат на одной прямой, параллельной гипотенузе этого треугольника.

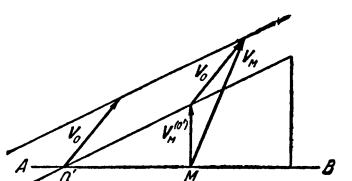


Рис. 3-27.

§ 3-16. Центроиды

Геометрическое место мгновенных центров скоростей на неподвижной плоскости называется *неподвижной центроидой*, а геометрическое место мгновенных центров скоростей на подвижной плоскости, жестко связанной с движущейся плоской фигурой, называется *подвижной центроидой*. При движении фигуры подвижная центроида катится по неподвижной, прикасаясь к ней в каждый момент в точке, которая служит мгновенным центром скоростей для данного момента времени (рис. 3-28).

Если центроиды в некоторый момент t_0 соприкасались точками P_0 и P_0' и в данный момент соприкасаются точкой P, то $\smile P_0P = \smile P_0'P$. Если представить себе свободную точку, которая движется так, что в

любой момент t совпадает с соответствующим мгновенным центром P, то траекторией этой точки на неподвижной плоскости будет неподвижная центроида, а на плоскости, жестко связанной с движущейся фигурой, — подвижная центроида. Скорость этой точки в неподвижной и подвижной плоскостях одна и та же и называется *скоростью мгновенного центра*. Алгебраическая величина u_p этой скорости выражается через алгебраическую величину ω угловой скорости фигуры и радиусы ρ и ρ' кривизны неподвижной и подвижной центроид формулой

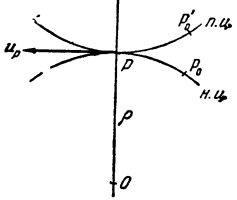


Рис. 3-28.

$$u_p = \frac{\omega}{\frac{1}{\rho} \pm \frac{1}{\rho'}}, \qquad (3\text{-}66)$$

где знак «+» соответствует тому случаю, когда центроиды расположены по разные стороны от общей касательной в точке P, знак «—» тому, когда они лежат по одну сторону от этой касательной.

§ 3-17. Ускорения точек плоской фигуры

Из формулы (3-60) для вектора V скорости точки плоской фигуры получается формула для вектора ускорения:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}'}{dt},$$

где $\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ обозначает вектор углового ускорения фигуры; этот вектор $\boldsymbol{\varepsilon}$, так же как и вектор $\boldsymbol{\omega}$, направлен перпендикулярно к плоскости движения. Так как

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{V}_M^{(O')} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \quad \text{то} \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'),$$

или

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}'. \qquad (3\text{-}67)$$

Слагаемое $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}'$, как и в случае вращения тела около неподвижной точки, называется *вращательным ускорением*; оно направлено перпендикулярно к радиусу-вектору $\mathbf{r}'$ и имеет модуль, равный $|\varepsilon| \cdot r'$. Слагаемое $\omega^2 \mathbf{r}'$ направлено всегда к полюсу O' и называется *центростремительным ускорением*. Проекции w_x и w_y вектора ускорения на неподвижные оси выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} w_x &= w_{0x} - \varepsilon (y - y_0) - \omega^2 (x - x_0), \\ w_y &= w_{0y} + \varepsilon (x - x_0) - \omega^2 (y - y_0). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}68)$$

Сумма вращательного и центростремительного ускорений $\boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' - \omega^2 \mathbf{r}'$ дает вектор $\mathbf{w}_M^{(O')}$, представляющий ускорение точки M в ее воображаемом круговом движении по окружности с центром в полюсе O', происходящем с алгебраической угловой скоростью $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ и алгебраи-

ческим угловым ускорением $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, так что этот вектор $\mathbf{w}_M^{(O')}$ определяется формулами (3-41) и (3-42) для ускорения в круговом движении, а формула (3-67) принимает вид:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_M^{(O')}. \tag{3-69}$$

Если для данного момента $\omega^4 + \varepsilon^2 \neq 0$, то $\mathbf{w}_M^{(O')} \neq 0$ и на плоскости, жестко соединенной с движущейся фигурой, можно построить единственную точку Q, ускорение которой в этот момент равно нулю. Эта точка называется *мгновенным центром ускорений*. Координаты x_Q, y_Q мгновенного центра Q ускорений по неподвижным осям xy выражаются через координаты x_0, y_0 полюса и его ускорение w_0 формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_Q &= x_0 + \frac{\omega^2 w_{0x} - \varepsilon w_{0y}}{\omega^4 + \varepsilon^2}, \\ y_Q &= y_0 + \frac{\omega^2 w_{0y} + \varepsilon w_{0x}}{\omega^4 + \varepsilon^2}. \end{aligned}\right\} \tag{3-70}$$

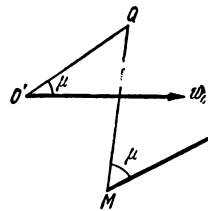


Рис. 3-29.

По заданному ускорению $\mathbf{w}_0$ (рис. 3-29) полюса центр ускорения можно построить, повернув вектор $\mathbf{w}_0$ вокруг полюса O' на угол μ, определяемый формулой $\operatorname{tg}\mu = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, в направлении вращательной скорости $\mathbf{v}_Q^{(O')}$, если $\omega\varepsilon > 0$, и в направлении, противоположном ей, при $\omega\varepsilon < 0$; на повернутом направлении следует отложить $O'Q = \frac{|\mathbf{w}_0|}{\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}}$. При данном центре Q ускорений для любой точки M ее ускорение $\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_M^{(Q)}$, т. е. $|\mathbf{w}_M| = QM\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}$; $\angle(\mathbf{w}_M, MQ) = \mu$.

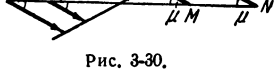


Рис. 3-30.

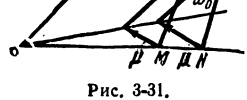


Рис. 3-31.

Эпюра ускорений $\mathbf{w}_M$ точек, лежащих на одной прямой с центром Q ускорений, представляет собой треугольник (рис. 3-30) с вершиной в центре Q и острым углом μ. Такую же эпюру с вершиной в полюсе O' дают ускорения $\mathbf{w}_M^{(O')}$ точек, лежащих на одной прямой с полюсом, а концы векторов $\mathbf{w}_M$ ускорений этих точек лежат на прямой, параллельной стороне эпюры ускорений $\mathbf{w}_M^{(O')}$, противолежащей углу μ (рис. 3-31).

§ 3-18. Круги Лагира и Бресса. Формула Савари

Ускорение $\mathbf{w}_p$ точки P, в данный момент совпадающей с центром скоростей (рис. 3-32), направлено перпендикулярно к общей касательной к центроидам. Если направление этого ускорения принять за положительное направление нормали, а положительное направление касательной получить поворотом положительного направления нормали на прямой угол против хода часовой стрелки, то положительная величина w_p ускорения точки P определяется через алгебраические значения угловой скорости ω и скорости u движения мгновенного центра по центроидам формулой

$$w_p = \omega u, \tag{3-71}$$

так что ω и u одного знака. Для любой точки M (рис. 3-33) фигуры нормальное ускорение $\mathbf{w}_\nu$ направлено по прямой MP, а касательное — по перпендикулярной прямой MT. Принимая за положительное направление нормали направление от M к P, а положительное направление касательной выбирая так, чтобы оси TMP образовывали правую

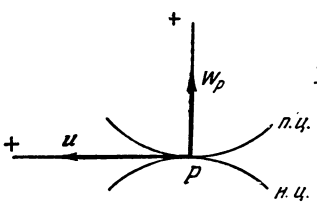


Рис. 3-32.

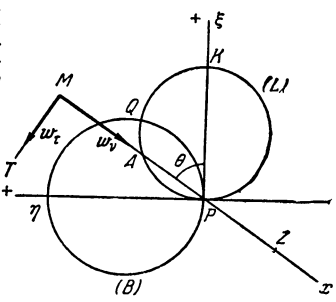


Рис. 3-33.

систему, получим для алгебраических величин касательного и нормального ускорений формулы:

$$w_\tau = p\varepsilon - \omega u \sin\theta; \quad w_\nu = \omega^2 (p - k\cos\theta), \tag{3-72}$$

где $p = PM$; $k = \dfrac{u}{\omega}$. Точки фигуры, для которых в данный момент $w_\nu = 0$, определяются равенством $p = k\cos\theta$, которое представляет собой полярное уравнение окружности, описанной как на диаметре на отрезке $PK = k$. Эта окружность называется *кругом Лагира*, или *окружностью перегибов*, потому что $w_\nu = 0$ в точках перегиба траектории. Точки фигуры, для которых в данный момент $w_\tau = 0$, определяются равенством $p = \dfrac{\omega u}{\varepsilon}\sin\theta$, которое представляет собой полярное уравнение окружности с центром на оси $P\eta$ в точке $\eta = \dfrac{\omega u}{2\varepsilon}$. Эта окружность называется кругом Бресса. Точка пересечения кругов Лагира и Бресса служит центром ускорения. Центр Z кривизны траектории точки M лежит на нормали MP. Если обозначить через R алгебраиче-

ское значение радиуса $R=MZ$ кривизны, а через A точку пересечения радиуса-вектора PM с кругом Лагира, то алгебраические значения длин отрезков MZ, MA и MP связаны формулой Савари:

$$MZ\cdot MA=(MP)^2. \tag{3-73}$$

Если положить $R-p=\rho$, то формула (3-73) примет вид:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\rho}=\frac{1}{k\cos\theta}. \tag{3-73'}$$

§ 3-19. Карданово движение

Движение плоской фигуры по неподвижной плоскости называется *кардановым*, если две точки этой фигуры движутся по двум неподвижным взаимно-перпендикулярным прямым. Если расстояние AB (рис. 3-34) между точками A и B, движущимися по неподвижным осям x и y, равно $2l$, то траектория любой точки M с координатами x', y' по осям $x'y'$, жестко связанным с движущейся фигурой, представляет собой эллипс с уравнением

$$ax^2+by^2-2cxy=d,$$

где

$$a=x'^2+(l+y')^2,\ b=x'^2+(l-y')^2,$$
$$c=2lx',\quad d=(x'^2+y'^2-l^2)^2.$$

Для точек, лежащих на окружности $x'^2+y'^2=l^2$ с центром C в средине отрезка AB, этот эллипс обращается в проходящую через начало O прямую $\frac{x}{\sqrt{l-y'}}=\frac{y}{\sqrt{l+y'}}$. Мгновенный центр P скоростей лежит на пересечении перпендикуляров AP и BP к неподвижным прямым Ox и Oy. Неподвижной центроидой служит окружность с центром в точке O радиуса $2l$, а подвижной — окружность с центром с точке C радиуса l. Центр Q ускорений лежит на подвижной окружности и $\angle OCQ=2\mu$, где $\operatorname{tg}\mu=\frac{|\varepsilon|}{\omega^2}$, а угол μ откладывается от радиуса OC в направлении мгновенного вращения, если $\omega\varepsilon>0$, и в обратном, если $\omega\varepsilon<0$.

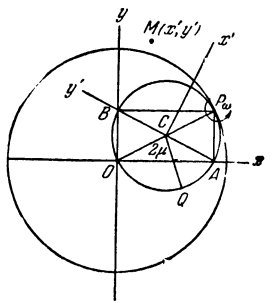


Рис. 3-34.

§ 3-20. Движение свободного тела

Положение свободного тела по отношению к неподвижным осям xyz системы отсчета определяется положением произвольно выбранного в теле полюса $O'(x_0, y_0, z_0)$ (рис. 3-35) и углами Эйлера осей $x'y'z'$, жестко связанных с телом, с подвижными осями $\xi\eta\zeta$, движущимися поступательно и остающимися параллельными неподвижным осям xyz. Движение тела определяется заданием величин x_0, y_0, z_0, ψ, φ, θ как функций времени. Уравнения движения любой точки M тела, определяемой ее постоянными координатами x', y', z' по осям $x'y'z'$, даются формулами:

$$\left.\begin{aligned}x&=x_0+\alpha_1x'+\alpha_2y'+\alpha_3z',\\ y&=y_0+\beta_1x'+\beta_2y'+\beta_3z',\\ z&=z_0+\gamma_1x'+\gamma_2y'+\gamma_3z',\end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

где коэффициентами при x', y', z' служат направляющие косинусы осей

$x'y'z'$ (см. § 3-11). Так как для любой точки M ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ относительно неподвижных осей выражается через радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ полюса O' и относительный радиус-вектор $\mathbf{r}'$ формулой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'$, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}$, а так как $\frac{d\mathbf{r}'}{dt}$ представляет собой скорость точки M при вращении тела около неподвижного полюса O', если за систему отсчета принять оси $O'\xi\eta\zeta$, то скорость $\mathbf{V}$ точки M выражается формулой

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}', \tag{3-75}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ есть мгновенная угловая скорость вращения вокруг полюса O'. Эта угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ не зависит от выбора полюса O' и потому называется *абсолютной угловой скоростью* свободного тела. В свободном теле в общем случае нет точки, скорость которой в данный момент равняется нулю. Для существования такой точки необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{\omega} \neq 0$ и $\mathbf{V} \perp \boldsymbol{\omega}$. Если $\boldsymbol{\omega} \neq 0$, то проекция $\mathbf{V}_0$ на направление вектора $\boldsymbol{\omega}$ для всех полюсов O' одна и та же. В теле можно указать

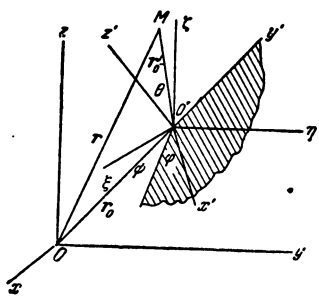


Рис. 3-35.

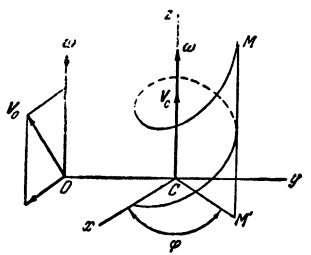


Рис. 3-36.

точку C (рис. 3-36) с радиусом-вектором $\mathbf{r}'_C = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_0}{\omega^2}$ такую, что $\mathbf{V}_C \parallel \boldsymbol{\omega}$. Этим же свойством быть параллельной $\boldsymbol{\omega}$ обладают скорости всех точек прямой, проведенной через точку C параллельно $\boldsymbol{\omega}$. Эта прямая называется *мгновенной винтовой осью* тела.

Координаты x_C, y_C, z_C точки C по неподвижным осям выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_C = x_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_y V_{0z} - \omega_z V_{0y}),\ y_C = y_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_z V_{0x} - \omega_x V_{0z}),\\ z_C = z_0 + \frac{1}{\omega^2}(\omega_x V_{0y} - \omega_y V_{0x}), \end{aligned}\right\} \tag{3-76}$$

а уравнения винтовой оси имеют вид:

$$\frac{x - x_C}{\omega_x} = \frac{y - y_C}{\omega_y} = \frac{z - z_C}{\omega_z}.$$

При постоянных во времени значениях $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{V}_0$ винтовая ось остается в течение движения неподвижной и траекториями точек тела служат винтовые линии, определяемые цилиндрическими координатами ρ, z, φ

в системе осей $Cxyz$, в которых ось Cz направлена по ω, по формулам:

$$\rho = \rho_0; \quad z - z_0 = \frac{v_c}{w_z}(\varphi - \varphi_0),$$

где ρ_0, z_0, φ_0 — значения координат точки M в начальный момент. Отношение

$$p = \frac{v_0}{w_z} \tag{3-77}$$

называется *параметром* винта. Перемещение h точки вдоль оси винта за время, в течение которого угол φ увеличивается на 2π, называется *шагом* винта; шаг определяется формулой

$$h = 2\pi \mid p \mid. \tag{3-78}$$

При переменных ω и V_0 мгновенная винтовая ось изменяет свое положение и в теле, и относительно системы отсчета. Геометрическое место мгновенных осей в теле образует в нем линейчатую поверхность, называемую *подвижным аксоидом*, а геометрическое место мгновенных осей относительно систем отсчета образует другую линейчатую поверхность — *неподвижный аксоид*. При движении тела в любой момент подвижный аксоид прикасается к неподвижному по общей образующей, которая и служит мгновенной винтовой осью для взятого момента.

§ 3-21. Ускорение точек свободного тела

Из формулы (3-75) для вектора $\mathbf{w}$ ускорения тела получается формула

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} \times \mathbf{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'), \tag{3-79}$$

где вектор $\boldsymbol{\varepsilon} = \dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}$ называется вектором *абсолютного углового ускорения* тела, а $\mathbf{w}_0$ — вектор ускорения полюса O'. Второе и третье слагаемые в этой формуле, как и в случае формулы (3-57), представляют собой вращательное и центростремительное (или осестремительное) ускорения в вращении тела вокруг полюса O'. В общем случае, если $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, в теле существует единственная точка Q — центр ускорений, ускорение которой в данный момент равно нулю. Радиус-вектор $\mathbf{r}'_Q$ центра ускорения относительно полюса O' определяется формулой

$$\mathbf{r}'_Q = \frac{1}{|\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}|^2}\{[(\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}) - (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega}^2]\boldsymbol{\omega} + (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\varepsilon})\boldsymbol{\varepsilon} - (\mathbf{w}_0, \boldsymbol{\omega})\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\varepsilon}\}. \tag{3-80}$$

Глава 3-3

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ

§ 3-22. Переносное, относительное и абсолютное движения

Если движение точки рассматривается по отношению к двум системам отсчета, одна из которых (S) принимается за основную (абсолютную), то другая (S') называется *относительной*, а ее движение по

отношению к основной (абсолютной) — *переносным*. Скорость V_M движущейся точки M по отношению к основной (абсолютной) системе отсчета S называется *абсолютной скоростью*, а скорость V'_M той же точки M по отношению к относительной системе отсчета S' называется *относительной скоростью*.

Абсолютная скорость V_p той точки P относительной системы, с которой в данное мгновение совпадает движущаяся точка M, называется *переносной скоростью* этой точки M. Точно так же ускорение w_M точки M по отношению к основной (абсолютной) системе отсчета S называется *абсолютным ускорением*, а ускорение w'_M той же точки M по отношению к относительной системе отсчета S' называется *относительным ускорением*. Абсолютное ускорение w_p той точки P относительной системы, с которой в данное мгновение совпадает движущаяся точка M, называется *переносным ускорением* этой точки.

Абсолютное движение точки или системы точек, составляемое из их относительного движения по отношению к подвижной системе отсчета и переносного движения, называется *составным* или *сложным*. Теория сложного движения состоит в вычислении кинематических элементов этого абсолютного движения по кинематическим элементам относительного и переносного движений.

§ 3-23. Теорема параллелограмма скоростей

Векторы V_M абсолютной, V'_M относительной и V_p переносной скоростей точки M в один и тот же момент времени связаны формулой

$$V_M = V'_M + V_p, \tag{3-81}$$

т. е. вектор абсолютной скорости изображается диагональю параллелограмма, стороны которого изображают векторы относительной и переносной скоростей.

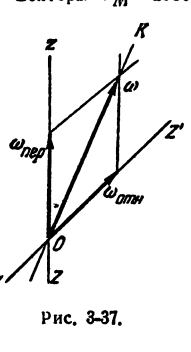


Рис. 3-37.

§ 3-24. Сложение вращений около пересекающихся осей

Если относительное движение твердого тела (рис. 3-37) представляет собой вращение около оси zz с угловой скоростью $\omega_{отн}$, а переносное движение оси $z'z'$ представляет собой вращение вокруг неподвижной оси zz с угловой скоростью $\omega_{пер}$, причем оси zz и $z'z'$ пересекаются в точке O, то абсолютное движение тела представит собой вращение вокруг неподвижного центра O с мгновенной угловой скоростью ω, определяемой формулой

$$\omega = \omega_{отн} + \omega_{пер}. \tag{3-82}$$

Если величины $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$ угловых скоростей остаются постоянными, то постоянна и величина ω абсолютной угловой скорости, но мгновенная ось OK описывает круглый конус неподвижного аксоида с осью z.

§ 3-25. Сложение вращений около параллельных осей

Если относительное движение твердого тела представляет собой вращение около оси $z'z'$ с угловой скоростью $\omega_{отн}$, а переносное движение оси $z'z'$ представляет собой вращение вокруг неподвижной оси zz с угловой скоростью $\omega_{пер}$, причем оси $z'z'$ и zz параллельны, то абсолютное движение тела оказывается плоско-параллельным, плоскость движения которого перпендикулярна к осям zz и $z'z'$, а мгновенная угловая скорость абсолютного движения есть $\omega = \omega_{отн} + \omega_{пер}$. Если $\omega_{отн} + \omega_{пер} \neq 0$, то абсолютное движение представляет собой мгновенное вращение вокруг оси KK, лежащей в одной плоскости с осями zz и $z'z'$ (рис. 3-38), параллельной им и делящей отрезок OO' между осями алгебраически на части, обратно пропорциональные алгебраическим значениям угловых скоростей $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$, т. е.

$$\frac{OP}{PO'} = \frac{\omega_{отн}}{\omega_{пер}}. \qquad (3\text{-}82')$$

Следовательно, если складываемые вращения происходят в одну сторону, т. е. $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$ — одного знака, то ось KK проходит между осями zz и $z'z'$ и $\omega = \omega_{отн} + \omega_{пер}$, а если складываемые вращения происходят в противоположные стороны, т. е. $\omega_{отн}$ и $\omega_{пер}$ — разных знаков, то

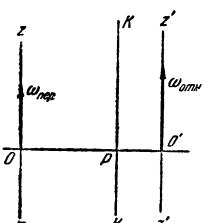


Рис. 3-38.

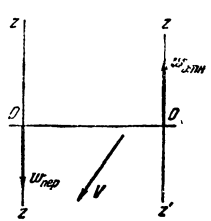


Рис. 3-39.

ось KK проходит вне отрезка OO между осями zz и $z'z'$, ближе к оси с большей по величине угловой скоростью, и $|\omega| = ||\omega_{отн}| - |\omega_{пер}||$. Если $\omega_{отн} + \omega_{пер} = 0$, т. е. складываемые вращения происходят в противоположные стороны с равными по величине угловыми скоростями, то абсолютное движение будет поступательным со скоростью

$$\mathbf{V} = \boldsymbol{\omega}_{пер} \times \mathbf{OO'} = \boldsymbol{\omega}_{отн} \times \mathbf{O'O}, \qquad (3\text{-}83)$$

т. е. эта скорость направлена перпендикулярно к плоскости, в которой лежат оси zz и $z'z'$, и по величине равна $|\mathbf{V}| = |\omega_{пер}| \cdot OO'$, если $OO' \perp zz$. Этот случай сложения вращений около параллельных осей называется *парой вращений*. Наоборот, поступательное движение со скоростью $\mathbf{V}$ можно рассматривать как результат сложения пары вращений вокруг осей, лежащих в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{V}$ (рис. 3-39). Направление осей в этой плоскости и величину $|\omega_{пер}|$ можно выбирать произвольно, соблюдая только формулу (3-83).

§ 3-26. Сложение поступательного и вращательного движений

Если относительное движение тела представляет собой вращение около неподвижного центра O' с мгновенной угловой скоростью $\omega_{отн}$, а переносное движение относительной системы отсчета S' — поступательное со скоростью $V_{пер}$, то для определения абсолютных скоростей точек тела точку O' можно взять за полюс, так что $V_{O'} = V_{пер}$, и тогда по формуле (3-75) $V_M = V_{пер} + \omega_{отн} \times O'M$. Следовательно, абсолютное движение будет мгновенно-винтовым, винтовая ось которого определяется формулами (3-76), в которых $V_O = V_{пер}$, $\omega = \omega_{отн}$.

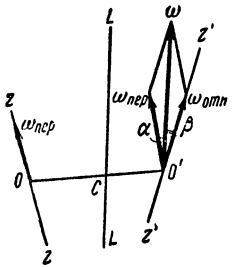


Рис. 3-40.

Если $V_{пер} \perp \omega$, то абсолютное движение будет мгновенно вращательным вокруг винтовой оси.

§ 3-27. Сложение вращений вокруг скрещивающихся осей

Если относительное движение тела представляет собой вращение вокруг оси $z'z'$ с угловой скоростью $\omega_{отн}$, а переносное движение оси $z'z'$ — вращение вокруг неподвижной оси zz с угловой скоростью $\omega_{пер}$, причем оси $z'z'$ и zz скрещиваются и их кратчайшее расстояние, т. е. общий перпендикуляр, есть OO', то, принимая в абсолютном движении точку O' за полюс, получим:

$$V_{O'} = \omega_{пер} \times OO'; \quad \omega = \omega_{отн} + \omega_{пер}.$$

Если построить (рис. 3-40) мгновенную винтовую ось LL абсолютного движения, то она пройдет через точку C, которая делит отрезок OO' на части, пропорциональные тангенсам углов, составляемых векторами $\omega_{пер}$ и $\omega_{отн}$ с вектором ω:

$$\frac{OC}{CO'} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}.$$

§ 3-28. Ускорение точки в сложном движении

Через элементы переносного движения: угловую скорость $\omega_{пер}$, переносное ускорение w_p, и элементы относительного движения точки M: относительную скорость V'_M и относительное ускорение w'_M, вектор w_M абсолютного ускорения выражается формулой

$$w_M = w_p + w'_M + 2(\omega_{пер} \times V'_M), \tag{3-84}$$

называемой *формулой Кориолиса*. В этой формуле последняя составляющая вектора абсолютного ускорения, т. е. вектор $2(\omega_{пер} \times V'_M)$, обусловливается взаимным влиянием переносного и относительного движений точки на изменение вектора ее абсолютной скорости и называется *поворотным, кориолисовым,* или *дополнительным* ускорением:

$$2(\omega_{пер} \times V'_M) = w_{пов}. \tag{3-85}$$

Для построения вектора $\mathbf{w}_{пов}$ (рис. 3-41) вектор $\mathbf{V}'_M$ относительной скорости следует спроектировать на плоскость П, перпендикулярную к вектору $\boldsymbol{\omega}_{пер}$, полученную проекцию **MA** умножить на $2|\boldsymbol{\omega}_{пер}|$ и произведение **MB** повернуть по плоскости П на прямой угол в направле-

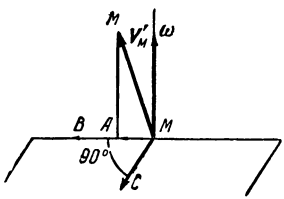


Рис. 3-41.

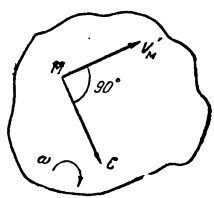


Рис. 3-42.

нии вращения, указываемого вектором $\boldsymbol{\omega}_{пер}$; полученный вектор **MC** и будет $\mathbf{w}_{пов}$. В плоских задачах (рис. 3-42) по данной угловой скорости ω фигуры для построения $\mathbf{w}_{пов}$ достаточно умножить вектор $\mathbf{V}'_M$ на $2|\omega|$ и произведение повернуть на 90° в сторону, определяемую знаком угловой скорости ω. Поворотное ускорение $\mathbf{w}_{пов}$ обращается в нуль в трех случаях: 1) $\boldsymbol{\omega}_{пер}=0$, т. е. переносное движение относительной системы поступательное; 2) $\mathbf{V}'_M=0$; 3) $\boldsymbol{\omega}_{пер} \parallel \mathbf{V}'_M$. Во всех этих случаях формула (3-84) получает вид:

$$\mathbf{w}_M = \mathbf{w}_p + \mathbf{w}'_M \tag{3-86}$$

и выражает аналогично формуле (3-81) теорему параллелограмма ускорений.

Б. СТАТИКА

Статика — раздел общей механики, в котором изучаются условия относительного равновесия механических систем.

Глава 3-4

СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 3-29. Сила и ее вектор

Мысленно выделенная часть тела, столь малая, что положение ее в пространстве определяется положением одной точки, называется *материальной частицей*. Если материальная частица рассматривается абстрактно от того тела, в котором она выделена, как самостоятельное бесконечно малое тело, то она называется *материальной точкой*. Взаимодействие материи, вызывающее изменение механического движения материальных частиц или препятствующее изменению их взаимных положений, называется *механическим*. Мера механического воз-

действия для данного мгновения на материальную частицу со стороны других материальных объектов (тел или полей), характеризующая величину и направление этого воздействия, называется *силой*, приложенной к данной материальной частице. Величина силы измеряется положительным числом P, размерность которого одна и та же при всех механических взаимодействиях. Сила изображается отрезком, выходящим из геометрической точки M (рис. 3-43), положение которой определяет положение материальной частицы; эта точка называется *точкой приложения силы*. По длине этот отрезок в условном масштабе равен величине P силы и своим направлением MA указывает направление механического воздействия, измеряемого этой силой.

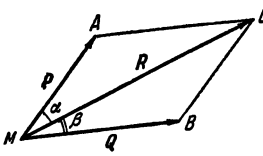


Рис. 3-43.

Силы, приложенные к одной и той же материальной частице, обладают следующими свойствами: 1) совокупность нескольких сил, приложенных в одной и той же точке, может быть во всех задачах механики заменена одной силой, называемой их *равнодействующей*, и наоборот, одна сила может быть заменена совокупностью сил, приложенных к той же точке и называемых *составляющими*, или *компонентами* данной силы; 2) равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке, изображается диагональю параллелограмма, сторонами которого служат отрезки, изображающие данные силы (рис. 3-43). Это значит, что отрезок, изображающий силу, является физическим вектором, а потому он называется *вектором силы*. Вектор $\mathbf{R}$ равнодействующей двух сил определяется через их векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ формулой

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}, \tag{3-87}$$

а ее величина R и углы α и β, составляемые вектором $\mathbf{R}$ с векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, — формулами:

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta}, \quad \sin\alpha = \frac{Q}{R}\sin\theta, \\ \sin\beta &= \frac{P}{R}\sin\theta, \end{aligned}\right\} \tag{3-88}$$

где $\theta = \alpha + \beta$.

Если векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ направлены по одной прямой, то и вектор $\mathbf{R}$ направлен по той же прямой в сторону, куда направлен вектор большей по величине силы, а величина R равнодействующей выражается формулой $R = P + Q$, если векторы $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$ направлены в одну сторону, и формулой $R = |P - Q|$, если они направлены в разные стороны.

Если в точке приложено n сил, векторы которых суть $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$, то вектор $\mathbf{R}$ равнодействующей выражается формулой

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \ldots + \mathbf{P}_n. \tag{3-89}$$

Если на прямой, по которой расположен вектор $\mathbf{P}$ силы, выбран единичный орт $\mathbf{e}$, то величину P силы условно считают числом алгебраическим, т. е. $P > 0$, если $\mathbf{P}$ направлен в ту же сторону, что и $\mathbf{e}$, и $P < 0$ — в противном случае, и тогда вектор $\mathbf{P}$ силы записывается формулой

$$\mathbf{P} = P\mathbf{e}.$$

Если через точку приложения силы $\mathbf{P}$ провести три, не лежащие в одной плоскости оси xx, yy, zz с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то силу $\mathbf{P}$ можно разложить на три компонента $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, лежащих на осях xx, yy, zz и

имеющих алгебраические величины P_1, P_2, P_3, так что $\mathbf{P} = P_1\mathbf{e}_1 + P_2\mathbf{e}_2 + P_3\mathbf{e}_3$. Значения P_1, P_2, P_3 определяются формулами:

$$P_1 = \frac{(\mathbf{P}, \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad P_2 = \frac{(\mathbf{P}, \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \quad P_3 = \frac{(\mathbf{P}, \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}. \tag{3-90}$$

Обратно, величина P силы определяется через алгебраические величины P_1, P_2, P_3 ее компонентов формулой

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + 2P_1P_2\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + 2P_2P_3\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + 2P_3P_1\cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1)}. \tag{3-91}$$

Если вектор $\mathbf{P}$ силы лежит в плоскости двух осей, например в плоскости xy, то компонент по третьей оси считается равным нулю: $P_3 = 0$.

Проекцией силы на ось (рис. 3-44) называется произведение величин силы на косинус угла ее вектора с осью проекции: $P_L = |\mathbf{P}| \cos(\mathbf{P}, \mathbf{l})$, где $\mathbf{l}$ — орт оси LL проекции. Если вектор $\mathbf{P}$ выражен через орт $\mathbf{e}$ его оси формулой $\mathbf{P} = P\mathbf{e}$, так что P есть алгебраическая величина силы, то

$$P_L = P\cos(\mathbf{e}, \mathbf{l}). \tag{3-92}$$

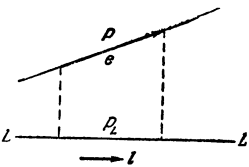


Рис. 3-44.

Проекция равнодействующей $\mathbf{R}$ сил $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ выражается формулой $R_L = P_{1L} + P_{2L} + \ldots + P_{nL}$. Если сила $\mathbf{P}$ разложена на компоненты по осям xx, yy, zz с ортами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то проекции P_x, P_y, P_z выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} P_x &= P_1 + P_2\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + P_3\cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1), \\ P_y &= P_1\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + P_2 + P_3\cos(\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_2), \\ P_z &= P_1\cos(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3) + P_2\cos(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + P_3. \end{aligned}\right\} \tag{3-93}$$

В частности, если оси xx, yy, zz взаимно-перпендикулярны, то $P_x = P_1$, $P_y = P_2$, $P_z = P_3$, т. е. проекции на три взаимно-перпендикулярные оси равны алгебраическим значениям компонентов силы по тем же осям. Величина и направление вектора силы в этом случае выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} P &= \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}, \\ \cos(\mathbf{P}, xx) &= \frac{P_x}{P}, \quad \cos(\mathbf{P}, yy) = \frac{P_y}{P}, \quad \cos(\mathbf{P}, zz) = \frac{P_z}{P}. \end{aligned}\right\} \tag{3-94}$$

§ 3-30. Уравновешенные на точке силы

Если сумма векторов сил $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$, приложенных к одной точке, равна нулю, то такие силы называют *уравновешенными на точке* и пишут: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty 0$.

Наличие уравновешенных на точке сил не изменяет механического состояния точки, и потому во всех задачах механики к точке мож-

но прикладывать и от нее откидывать любую систему уравновешенных сил. Аналитически условие уравновешенности сил на точке выражается через их проекции на три, не лежащие в одной плоскости, оси xx, yy, zz формулами:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0. \tag{3-95}$$

В технических задачах принимается, что, если материальная точка находится в состоянии покоя по отношению к Земле как системе отсчета, то все приложенные к этой точке силы образуют уравновешенную систему. Поэтому формулы (3-95) называются *уравнениями равновесия материальной точки.*

Пример. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ положения равновесия точки A, притягиваемой к n неподвижным центрам A_k с радиусами-векторами $\mathbf{r}_k$ силами, пропорциональными расстояниям точки до центров притяжения.

В этом примере $P_k = \mu_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r})$, где μ_k — факторы пропорциональности. Следовательно, уравнение равновесия имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu_k (\mathbf{r}_k - \mathbf{r}) = 0, \quad \text{откуда} \quad \mathbf{r} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mu_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} \mu_k}.$$

§ 3-31. Равновесие точки на гладкой поверхности и гладкой линии

Если точка по условию задачи должна оставаться на заданной материальной поверхности в состоянии покоя при действии на эту точку заданной силы $\mathbf{P}$, то действие поверхности на точку должно измеряться силой $\mathbf{R}$, которая вместе с силой $\mathbf{P}$ должна уравновеситься, т. е. $\mathbf{P} + \mathbf{R} = 0$. Эта сила $\mathbf{R}$ называется *реакцией поверхности.* Если по физическим свойствам поверхности вектор $\mathbf{R}$ при всех условиях нормален к поверхности, то эта поверхность называется *гладкой.* Если уравнение заданной гладкой поверхности относительно прямоугольных осей xyz есть $f(x, y, z) = 0$, то условия равновесия точки под действием заданной силы $\mathbf{P}$ выражаются формулами:

$$P_x + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad P_y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad P_z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} = 0, \tag{3-96}$$

где λ — неизвестный множитель. Из этих уравнений и уравнения поверхности $f(x, y, z) = 0$ и определяются координаты x, y, z положения равновесия и фактор λ.

Если точка при действии на нее заданной силы $\mathbf{P}$ должна оставаться на линии пересечения двух гладких поверхностей, то возникнут две реакции $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, нормальные к этим поверхностям, так что $\mathbf{P} + \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$. Если $f_1(x, y, z) = 0$ и $f_2(x, y, z) = 0$ — уравнения

поверхностей, то координаты x, y, z положения равновесия найдутся из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_x + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} = 0,\ P_y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0, \\ P_z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}97)$$

к которым для определения множителей λ_1 и λ_2 надо присоединить уравнения поверхностей. Равнодействующая $\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2$ называется *реакцией заданной линии*: она к этой линии нормальна.

§ 3-32. Момент силы

Мера механического воздействия, учитывающая положение силы по отношению к данной точке и выражающаяся векторным произведением радиуса-вектора точки приложения силы относительно данной точки на вектор этой силы, называется *моментом силы* относительно данной точки. Момент изображается вектором, приложенным в данной точке, называемой *центром момента* (рис. 3-45):

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A) = \mathbf{OA} \times \mathbf{P} = \mathbf{r} \times \mathbf{P}. \quad (3\text{-}98)$$

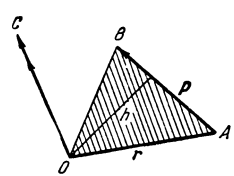


Рис. 3-45.

Модуль вектора момента называется величиной момента. Он измеряется единицами размерности [сила] $\times$ [длина] $=$ $=$кГс $\cdot$ м и выражается произведением величин силы $\mathbf{P}$ на расстояние от центра момента до прямой действия силы, называемое *плечом силы* относительно данного центра:

$$|\mathbf{M}_O| = Ph. \quad (3\text{-}99)$$

Треугольник OAB с вершиной в центре момента и основанием, изображающим вектор силы, называется *моментным*. Без учета размерностей

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A)| = 2\triangle OAB. \quad (3\text{-}100)$$

Если векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ строится по правой системе, то вектор момента направляется перпендикулярно к плоскости моментного треугольника в такую сторону от нее, при наблюдении из которой вектор $\mathbf{P}$ силы указывает поворот вокруг центра момента против хода часовой стрелки. При построении векторного произведения $\mathbf{r} \times \mathbf{P}$ по левой системе направление вектора момента изменяется на противоположное. Если плоскость моментного треугольника наблюдается с произвольно выбранной стороны, то величине момента приписывается положительный или отрицательный знак в зависимости от того, куда направлен вектор момента: именно, величина момента считается положительной, если вектор момента направлен в ту сторону, с которой наблюдается плоскость моментного треугольника, и отрицательной в обратном случае. В правой системе величина момента считается положительной, если направление вектора силы указывает поворот вокруг центра момента против хода часовой стрелки, и отрицательной в обратном случае. Если линия действия силы проходит через центр момента, то величина момента равна нулю. Если центр момента взят в точке (x_0, y_0, z_0), то через координаты (x, y, z) точки приложения

и проекции X, Y, Z силы $\mathbf{P}_A$ на оси вектор момента выражается формулой

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X & Y & Z \end{vmatrix}. \tag{3-101}$$

При переносе центра момента из точки O в точку O' вектор момента преобразуется по формуле

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A) = \mathbf{M}_{O'}(\mathbf{P}_A) + \mathbf{OO'} \times \mathbf{P}. \tag{3-102}$$

Отсюда следует, что

$$\text{пр}_{OO'}\,\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A) = \text{пр}_{OO'}\,\mathbf{M}_{O'}(\mathbf{P}_A), \tag{3-103}$$

т. е. проекции векторов момента около двух центров на ось, соединяющую эти центры, равны между собой. Скалярная величина, равная проекции на данную ось вектора момента силы около любой точки на той же оси, называется *моментом силы* около этой оси. Если ось проходит через точку $C(x_0, y_0, z_0)$ и имеет орт $\mathbf{e}$, составляющий с осями координат углы α, β, γ, то момент силы $\mathbf{P}_A$ с проекциями X, Y, Z, приложенной в точке $A(x, y, z)$, аналитически выражается формулой

$$M_{LL}(\mathbf{P}_A) = (\mathbf{M}_C(\mathbf{P}_A), \mathbf{e}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ X & Y & Z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \end{vmatrix}. \tag{3-104}$$

В частности, моменты силы около координатных осей выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} M_{xx} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = yZ - zY;\ M_{yy} = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix} = zX - xZ; \\ M_{zz} = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = xY - yX. \end{aligned}\right\} \tag{3-105}$$

Моменты силы около оси равны нулю, если вектор силы лежит в одной плоскости с осью, т. е. ее пересекает или ей параллелен. Если сила $\mathbf{P}$ лежит на плоскости xy и приложена в точке $A(x, y, 0)$, то $M_{xx} = M_{yy} = 0$, $M_{zz} = xY - yX$. Так как в этом случае $M_{zz} = \pm |\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A)|$, то и алгебраическая величина момента силы $M_O(\mathbf{P}_A)$ около начала координат при наблюдении с положительного конца оси zz выражается той же формулой:

$$M_O(\mathbf{P}_A) = xY - yX. \tag{3-106}$$

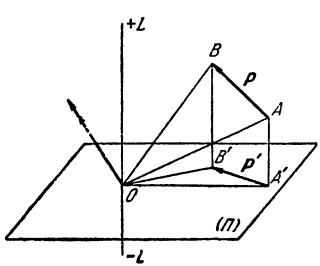


Рис. 3-46.

Момент силы $\mathbf{P}_A$ около оси LL (рис. 3-46) можно вычислить непосредственно, спроектировав вектор $\mathbf{P}$ силы на плоскость (П), перпендикулярную к оси LL, и вычислив алгебраическую величину момента этой проекции $\mathbf{P}'$ около точки пересечения плоскости проекции с осью моментов, устанавливая знак момента наблюдением с положительного конца оси LL, т. е.

$$M_{LL}(\mathbf{P}_A) = M_O(\mathbf{P}'_{A'}).$$

Если в точке A приложено n сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, то сумма векторов их моментов около любого общего центра O выражается формулой

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k) = \mathbf{OA} \times \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k . \tag{3-107}$$

Если силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ имеют равнодействующую $\mathbf{R}$, то эта формула выражает *теорему Вариньона*: сумма векторов моментов силы, приложенных к одной точке, равна вектору момента равнодействующей:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k) = \mathbf{M}_O(\mathbf{R}_A). \tag{3-108}$$

Если же силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ уравновешены, то $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k = 0$ и формула (3-107) примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k) = 0. \tag{3-109}$$

Проектируя обе части формул (3-108) и (3-109) на любую ось LL, получаем для осевых моментов сил, приложенных к одной точке, соответственно формулы:

$$\sum_{k=1}^{n} M_{LL}(\mathbf{P}_k) = M_{LL}(\mathbf{R}_A), \tag{3-108'}$$

$$\sum_{k=1}^{n} M_{LL}(\mathbf{P}_k) = 0. \tag{3-109'}$$

Глава 3-5

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3-33. Свойства внешних сил, приложенных к твердому телу

Всякое тело в механике рассматривается как совокупность материальных точек. Если расстояния между любыми материальными точками тела остаются неизменными при всяких механических воздействиях, то тело называется *абсолютно твердым* или, короче, *твердым*. Силы, измеряющие действие на точки данного тела других тел, называются *внешними*, приложенными к данному телу. Совокупность внешних сил, которая, будучи приложена к твердому телу, не изменяет механического состояния тела, называется *уравновешенной* на данном теле. В частности, *уравновешенная система*, будучи приложена к твердому телу, находящемуся в состоянии покоя, не выводит тело из этого состояния.

Во всех задачах механики твердого тела к нему можно прикладывать и от него откидывать любую уравновешенную систему внешних сил. Совокупность сил, которая, будучи добавлена к данной системе сил, составит вместе с ней уравновешенную систему сил, называется *уравновешивающей* данную. Две системы сил, уравновешивающиеся одной и той же системой сил, называются *эквивалентными*. Во всех задачах механики твердого тела данную систему сил можно заменять ей эквивалентной. Уравновешенность системы сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ обозначают формулой $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty 0$ и о такой системе говорят, что она эквивалентна нулю. Если системы сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ и $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m)$ эквивалентны, то этот факт записывается так:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty (\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m).$$

Если к двум точкам твердого тела приложены по одной прямой две равные по величине и противоположные по направлению силы, то они уравновешиваются на этом теле, и обратно, если две силы взаимно уравновешиваются на твердом теле, то они имеют равные величины и направлены по одной прямой в противоположные стороны. Из этого свойства следует, что данная сила эквивалентна другой силе, вектор которой равен вектору данной, а точка приложения перенесена в любую точку на линии данной силы. Поэтому в геометрической статике твердого тела вектор внешней силы рассматривается не как приложенный в определенной точке, а как скользящий по заданной прямой. Если данная сила $\mathbf{R}$ служит равнодействующей системы сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$, приложенных к той же точке A, то она этой системе эквивалентна: $\mathbf{R}_A \infty (\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$. Если данная система $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ преобразуется в систему $(\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m)$ при помощи переноса сил по линиям их действия, сложения и разложения сил, приложенных к одной точке, прибавления и откидывания уравновешенных систем сил, то данная и полученная системы будут эквивалентны между собой.

Если действие тела *II* (рис. 3-47) на тело *I* измеряется силой $\mathbf{P}_A$, то действие тела *I* на тело *II* измеряется силой $\mathbf{Q}_B$, которая равна по величине силе $\mathbf{P}_A$ и направлена по одной прямой AB с этой силой в противоположную сторону. В этом состоит *закон равенства действия и противодействия*.

Рис. 3-47.

Если твердое тело по условию задачи должно опираться на другие твердые тела или быть с ними соединено натянутыми нитями, то такое тело называется *несвободным*, а ограничения, стесняющие движения несвободного тела и осуществляемые другими телами, называются *связями*, наложенными на несвободное тело. Силы, измеряющие действие на несвободное тело тех тел, которые осуществляют наложенные связи, называются *реакциями связей*.

Реакция нити направлена вдоль нити от тела. Реакция опорной поверхности направлена от поверхности в ту сторону, где находится тело. Если реакция опорной поверхности направляется обязательно по нормали к поверхности в точке опоры, то поверхность называется *гладкой*. В противном случае реакция $\mathbf{R}_A$ (рис. 3-48) раскладывается на компонент $\mathbf{N}_A$ по нормали к поверхности и перпендикулярный

к нему компонент $\mathbf{F}_A$. Компонент $\mathbf{N}_A$ называется *нормальным сопротивлением поверхности.* Компонент $\mathbf{F}_A$ измеряет противодействие возможному скольжению тела по опорной поверхности и называется *силой трения скольжения.* Отношение величины силы трения скольжения при движении тела к величине нормального сопротивления называется *коэффициентом трения скольжения.* Отношение величины силы трения к величине силы нормального сопротивления при покое тела называется *коэффициентом статического трения.* Статический коэффициент больше коэффициента трения скольжения. Угол максимального отклонения реакции опорной поверхности от нормали к ней, тангенс которого равен коэффициенту статического трения, называется *углом трения*, а конус с вершиной в точке касания тела с опорной поверхностью, образующие которого указывают максимальные отклонения реакции от нормали опорной поверхности, называется *конусом трения.*

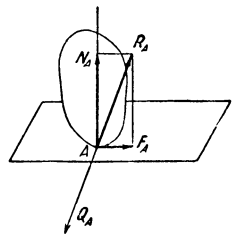


Рис. 3-48.

Если материальная точка должна оставаться на негладкой поверхности при действии заданной силы $\mathbf{P}$, то для равновесия точки необходимо и достаточно, чтобы вектор $\mathbf{P}$ проходил внутри конуса трения или, в крайнем случае, — по его образующей.

§ 3-34. Сходящиеся силы

Система внешних сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$, приложенных в разных точках к одному и тому же твердому телу, называется *сходящейся*, если линии действия этих сил пересекаются в одной точке C, называемой *точкой схода*, или *центром сил.* Сходящаяся система эквивалентна одной силе $\mathbf{R}_C$, вектор которой равен сумме векторов всех сил системы, а линия действия проходит через точку схода: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty \mathbf{R}_C$; $\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k$. В частности, при $\mathbf{R} = 0$ сходящаяся система эквивалентна нулю, т. е. уравновешена.

Геометрическим признаком уравновешенности сходящейся системы служит замкнутость *силового многоугольника*, составленного из векторов этих сил, а аналитически условия уравновешенности выражаются равенством нулю сумм проекций данных сил на три, не лежащие в одной плоскости, оси: $\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0$, $\sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0$, $\sum_{k=1}^{n} P_{kz} = 0$, т. е. теми же уравнениями (3-95), что и условия уравновешенности сил на точке.

Если система $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ сходящихся в центре C сил уравновешивается одной силой $\mathbf{Q}_A$, то линия действия этой силы проходит через точку схода C данной системы и вектор $\mathbf{Q} = -\sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k$. В частности, если две пересекающиеся силы уравновешиваются третьей, то все три силы лежат в одной плоскости и образуют сходящуюся систему.

Пример. Трехшарнирная арка (рис. 3-49, *а*), состоящая из двух частей, соединенных шарниром C, укреплена на двух неподвижных шарнирах A и B и находится под действием нагрузки $\mathbf{P}_D$, вектор которой лежит в одной плоскости с шарнирами A, B, C. Найти реакции $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{Q}_B$ шарниров A и B. Так как ненагруженная половина арки находится под действием только двух реакций в точках B и C, то $\mathbf{Q}_B \parallel BC$. Так как силы $\mathbf{P}_D$ и $\mathbf{Q}_B$ сходятся в точке O, то $\mathbf{S}_A \parallel AO$. Векторы $\mathbf{S}$ и $\mathbf{Q}$ находятся из силового треугольника dab (рис. 3-49, *б*), в котором $da \parallel \mathbf{P}$, $ab \parallel AO$, $bd \parallel BO$.

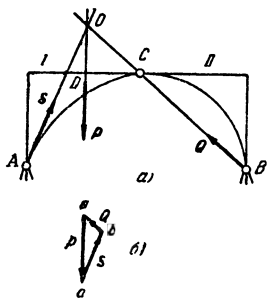


Рис. 3-49.

§ 3-35. Пары сил

Парой сил называется система двух внешних сил, величины которых равны между собой, линии действия параллельны, а направления противоположны. Расстояние между прямыми действия сил пары называется ее *плечом*.

Произведение величин силы пары на ее плечо называется *величиной момента пары*. Пара, образованная силами, величина которых есть P и которые приложены в точках A и B, обозначается $(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B)$. Если плечо равно d, то момент имеет величину Pd. *Сумма векторов моментов сил пары* около любого центра одна и та же и выражается формулой

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{P}_A) + \mathbf{M}_O(-\mathbf{P}_B) = \mathbf{BA} \times \mathbf{P} = \mathbf{M}_B(\mathbf{P}_A).$$

Свободный вектор (рис. 3-50), равный сумме векторов моментов сил пары около любого центра, называется *вектором момента пары* и обозначается $\mathbf{M}(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B)$, так что

$$\mathbf{M}(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B) = \mathbf{BA} \times \mathbf{P}. \quad (3\text{-}110)$$

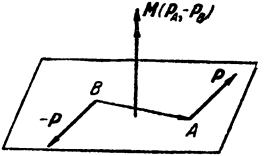


Рис. 3-50.

Вектор момента пары имеет модуль, равный величине момента пары, т. е. $|\mathbf{M}(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B)| = Pd$, и направлен перпендикулярно к плоскости пары в ту же сторону от нее, что и вектор момента $\mathbf{M}_B(\mathbf{P}_A)$. Следовательно, при правой системе построения векторного произведения вектор момента пары направлен от ее плоскости в ту сторону, при наблюдении с которой пара кажется вращающей свое плечо против хода часовой стрелки.

При наблюдении плоскости пары с произвольно выбранной стороны моменту пары приписывается положительный или отрицательный знак в зависимости от того, как при этом пара кажется вращающей свое плечо: если против хода часовой стрелки, то $M(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B) = +Pd$, а если по ходу, то $M(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B) = -Pd$. Вектор момента пары служит механической мерой воздействия этой пары на тело, к которому она приложена.

Две пары, имеющие один и тот же вектор момента, эквивалентны друг другу, и наоборот, если две пары эквивалентны друг другу, то векторы их моментов математически равны между собой. В частности, если две пары лежат на одной плоскости, то для их эквивалентности необходимо и достаточно равенство алгебраических величин их моментов. Всякая система пар, приложенных к одному телу, эквивалентна одной паре, вектор момента которой равен сумме векторов моментов данных пар: $\sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}_k, -\mathbf{P}_k) \infty (\mathbf{R}_A, -\mathbf{R}_B)$ и $\mathbf{M}(\mathbf{R}_A, -\mathbf{R}_B) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}(\mathbf{P}_k, -\mathbf{P}_k)$. В частности, плоская система пар эквивалентна одной паре на той же плоскости и алгебраическая величина ее момента равна сумме алгебраических величин моментов данных пар. Необходимым и достаточным *условием уравновешенности системы пар* является равенство нулю суммы векторов их моментов; в частности, плоская система пар уравновешена тогда и только тогда, когда сумма алгебраических величин их моментов равна нулю. Пара не может ни быть эквивалентна одной силе, ни уравновешиваться одной силой. При помощи пары силу $\mathbf{P}_A$ можно перенести, не меняя ее вектора $\mathbf{P}$, из точки A в любую точку B, добавляя пару $(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B)$ с моментом $\mathbf{M}(\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B) = \mathbf{M}_B(\mathbf{P}_A)$, т. е. $\mathbf{P}_A \infty \mathbf{P}_B, (\mathbf{P}_A, -\mathbf{P}_B)$. Эта операция называется *параллельным переносом силы*.

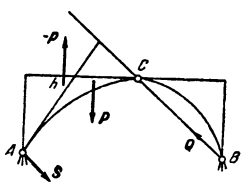


Рис. 3-51.

Пример. Трехшарнирная арка, укрепленная на шарнирах A и B, находится под действием пары $(\mathbf{P}, -\mathbf{P})$, приложенной к одной половине в плоскости шарниров A, B, C. Найти реакции $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{Q}_B$ (рис. 3-51).

Так как эти реакции должны образовывать пару, уравновешивающую данную нагрузку, то $M(\mathbf{Q}_B, \mathbf{S}_A) + M(\mathbf{P}, -\mathbf{P}) = 0$. Так как $\mathbf{Q}_B \parallel BC$, то $\mathbf{S}_A \parallel BC$ и $S = Q = \frac{|M(\mathbf{P}, -\mathbf{P})|}{h}$, где h — расстояние шарнира A до прямой BC.

§ 3-36. Приведение системы сил к данному центру

Всякую систему внешних сил $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$, приложенных к одному твердому телу, можно преобразовать в эквивалентную ей систему, состоящую из силы, приложенной в наперед заданной точке O, и пары:

$$(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty \mathbf{R}_0, (\mathbf{Q}_A, -\mathbf{Q}_B). \qquad (3\text{-}111)$$

Вектор $\mathbf{R}$ силы равен сумме векторов данных сил:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k. \qquad (3\text{-}112)$$

Он называется *главным вектором системы сил*. От выбора центра O приведения главный вектор не зависит. Вектор $\mathbf{M}_O$ момента пары $(\mathbf{Q}_A, -\mathbf{Q}_B)$ равен сумме векторов моментов данных сил около выбранного центра приведения:

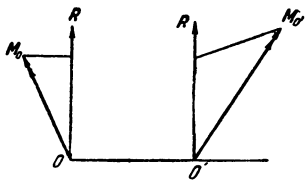


Рис. 3-52.

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k). \quad (3\text{-}113)$$

Он называется *главным моментом системы сил*. Главный момент, вообще, зависит от выбора *центра приведения*, и векторы $\mathbf{M}_O$ и $\mathbf{M}_{O'}$ связаны друг с другом формулой

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'} + \mathbf{OO'} \times \mathbf{R}. \quad (3\text{-}114)$$

Дальнейшее преобразование системы зависит от значения главного вектора $\mathbf{R}$. Если $\mathbf{R} = 0$, то $\mathbf{M}_O = \mathbf{M}_{O'}$, т. е. главный момент в этом случае не зависит от выбора центра приведения и система после приведения обращается в одну пару, вектор момента которой равен постоянному значению главного момента. Если это значение равно нулю, то система уравновешена.

Если $\mathbf{R} \neq 0$ (рис. 3-52), то на его ось можно проектировать обе части формулы (3-114). В результате получится: $\text{пр}_{\mathbf{R}} \mathbf{M}_O = \text{пр}_{\mathbf{R}} \mathbf{M}_{O'}$. Постоянная величина m проекции вектора главного момента на направление главного вектора называется *наименьшим моментом системы сил*:

$$\text{пр}_{\mathbf{R}} \mathbf{M}_O = m = \frac{(\mathbf{M}_O, \mathbf{R})}{|\mathbf{R}|}. \quad (3\text{-}115)$$

Если $m = 0$, то или $\mathbf{M}_O = 0$, или $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{R}$. В первом случае $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty \mathbf{R}_0$, т. е. система эквивалентна одной равнодействующей силе $\mathbf{R}_0$, линия действия которой проходит через центр O приведения. Во втором случае (рис. 3-53) пару можно взять в виде $(-\mathbf{R}_O, \mathbf{R}_C)$, где $OC \perp \mathbf{R}, \mathbf{M}_O$, $OC = \dfrac{|\mathbf{M}_O|}{|\mathbf{R}|}$, и тогда $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty \mathbf{R}_C$, т. е. система опять эквивалентна одной равнодействующей силе $\mathbf{R}_C$.

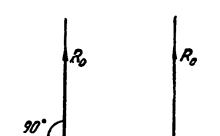


Рис. 3-53.

При этом

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{R}_C) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_k).$$

Если $m \neq 0$ (рис. 3-54), то, разложив $\mathbf{M}_O$ на компоненты $\mathbf{m}$ и $\mathbf{n}$ так, что $\mathbf{m} \parallel \mathbf{R}$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{R}$, заменим пару с моментом $\mathbf{M}_O$ двумя парами, $(-R_O, R_C)$ с моментом $\mathbf{n}$, причем $OC \perp \mathbf{R}, \mathbf{M}_O$, $OC = \frac{|\mathbf{n}|}{|\mathbf{R}|}$, и $(T_D, -T_C)$ с моментом $\mathbf{m}$, и тогда $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \backsim \backsim R_C, (T_D, -T_C)$.

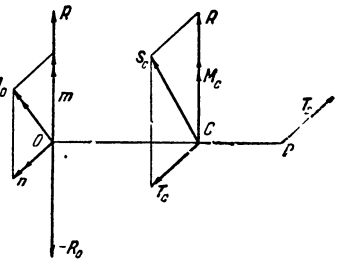


Рис. 3-54.

Главный момент $\mathbf{M}_C$ при приведении к центру C имеет вектор, равный компоненту $\mathbf{m}$: $\mathbf{M}_C = \mathbf{m}$. Алгебраическая величина этого компонента равна наименьшему моменту m данной системы. Приведенная система $-R_C, (T_D, -T_C)$, состоящая из силы и пары, плоскость которой перпендикулярна к вектору силы, называется *динамой*, или *динамическим винтом*. Отношение вектора $\mathbf{m}$ момента пары динамы к вектору $\mathbf{R}$ ее силы называется *параметром динамического винта*.

Сложив силы $\mathbf{R}_C$ и $-\mathbf{T}_C$ в равнодействующую $\mathbf{S}_C$, получим: $(P_1, P_2, \ldots, P_n) \backsim S_C, T_D$, причем векторы $\mathbf{S}_C$ и $\mathbf{T}_D$ будут скрещивающимися.

Таким образом, результаты приведения системы можно расположить в таблицу:

$\mathbf{R} \neq 0$, $m \neq 0$	Динама, или две скрещивающиеся силы,
$\mathbf{R} \neq 0$, $m = 0$	Равнодействующая сила,
$\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} \neq 0$	Одна пара,
$\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{M} = 0$	Уравновешенная система.

§ 3-37. Инварианты приведения

Если система сил $(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ приведена к центру O, принятому за начало осей XYZ, то через проекции X_k, Y_k, Z_k сил $\mathbf{P}_k$ и координаты x_k, y_k, z_k их точек приложения главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент M_O выражаются формулами:

$$R_x = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad R_y = \sum_{k=1}^{n} Y_k, \qquad R_z = \sum_{k=1}^{n} Z_k,$$

$$\left.\begin{aligned} M_{Ox} &= \sum_{k=1}^{n} (y_k Z_k - z_k Y_k), \qquad M_{Oy} = \sum_{k=1}^{n} (z_k X_k - x_k Z_k), \\ M_{Oz} &= \sum_{k=1}^{n} (x_k Y_k - y_k X_k). \end{aligned}\right\} \tag{3-116}$$

Так как $|\mathbf{R}|$ не зависит от выбора центра O, то во всех осях выражение

$$I_1 = \left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} Z_k\right)^2 \tag{3-117}$$

сохраняет одно и то же численное значение и потому называется *первым инвариантом приведения*. По формуле (3-115) для наименьшего момента m получается выражение:

$$m = \frac{R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz}}{\sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}}.$$

Так как m не зависит от выбора центра приведения и направления осей XYZ, то во всех осях выражение

$$I_2 = R_x M_{Ox} + R_y M_{Oy} + R_z M_{Oz} \tag{3-118}$$

сохраняет одно и то же численное значение и потому называется *вторым инвариантом приведения*. Если $I_1 = 0$, то и $I_2 = 0$ и система приводится к паре или уравновешена. Если $I_1 \neq 0$, а $I_2 = 0$, то система приводится к одной равнодействующей силе. Если $I_1 \neq 0$ и $I_2 \neq 0$, то система приводится к динаме.

§ 3-38. Центральная ось

Если главный вектор $\mathbf{R} \neq 0$ и наименьший момент $m \neq 0$, то существует прямая, относительно точек которой главный момент данной системы сил параллелен главному вектору этой системы. Эта прямая называется *центральной осью системы сил*. Она в любых осях XYZ определяется уравнениями:

$$\frac{M_{Ox} - (yR_z - zR_y)}{R_x} = \frac{M_{Oy} - (zR_x - xR_z)}{R_y} = \frac{M_{Oz} - (xR_y - yR_x)}{R_z}. \tag{3-119}$$

По центральной оси направлен вектор силы той динамы, которой данная система сил эквивалентна. Под центральной осью системы, эквивалентной одной равнодействующей силе $\mathbf{R}_C$, понимают линию действия этой силы. Уравнения проекций линии действия равнодействующей силы на координатные плоскости выражаются формулами:

$$yR_z - zR_y = M_{Ox}, \; zR_x - xR_z = M_{Oy}, \; xR_y - yR_x = M_{Oz}. \tag{3-120}$$

§ 3-39. Необходимые условия равновесия тела

Если тело при действии на него системы $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ внешних сил находится в равновесии, то эта система должна быть уравновешенной, т. е. для нее $\mathbf{R}=0$ и $\mathbf{M}_O=0$. В проекциях на оси XYZ эти условия дают шесть уравнений равновесия:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} P_{kx}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{ky}=0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_{kz}=0,\\
&\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{P}_k)=\sum_{k=1}^{n}(y_k P_{kz}-z_k P_{ky})=0,\\
&\sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{P}_k)=\sum_{k=1}^{n}(z_k P_{kx}-x_k P_{kz})=0,\\
&\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{P}_k)=\sum_{k=1}^{n}(x_k P_{ky}-y_k P_{kx})=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}121)$$

т. е. при *равновесии твердого тела* под действием системы внешних сил сумма проекций всех приложенных к нему сил на каждую координатную ось и сумма их моментов около каждой координатной оси равны нулю. В эти уравнения в случае несвободного тела входят как заданные силы, так и возникшие реакции связей. Те из уравнений (3-121), которые не содержат реакций связей, называются *условиями равновесия несвободного тела*.

Для тела с одной закрепленной точкой O условиями равновесия служат уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k)=0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k)=0,\\
&\sum_{k=1}^{n} M_{Oz}(\mathbf{F}_k)=0,
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}122)$$

где $\mathbf{F}_k$ — заданные силы.

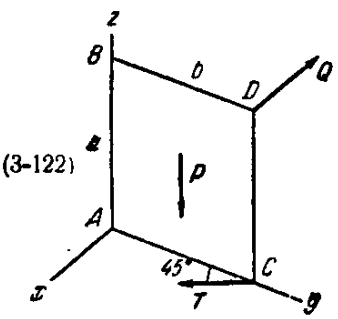


Рис. 3-55.

Пример. Дверь весом P, вращающаяся около вертикальной оси AB, закрепленная снизу подпятником A и сверху подшипником B, удерживается в покое силой $\mathbf{Q}_D$, приложенной перпендикулярно к плоскости двери в точке D, и горизонтальной неизвестной силой $\mathbf{T}_C$, приложенной в точке C и составляющей со стороной AC угол в 45°. Определить величину T силы $\mathbf{T}_C$ и реакции $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{R}_B$ (рис. 3-55).

Принимая AB за ось z и AC за ось y, составляем таблицу проекций и моментов сил:

	x	y	z	M_{Ox}	M_{Oy}	M_{Oz}
P	0	0	$-P$	$-\frac{bP}{2}$	0	0
Q	$-\mathbf{Q}$	0	0	0	$-aQ$	bQ
T	$T\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-T\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	0	0	$-\frac{b\sqrt{2}}{2}T$
$\mathbf{S}_A$	S_x	S_y	S_z	0	0	0
$\mathbf{R}_B$	R_x	R_y	0	$-aR_y$	aR_x	0

Отсюда уравнения равновесия:

$$S_x + R_x - Q + T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad S_y + R_y - T\frac{\sqrt{2}}{2} = 0; \quad -P + S_z = 0;$$

$$-aR_y - \frac{bP}{2} = 0; \quad aR_x - aQ = 0; \quad bQ - \frac{b\sqrt{2}}{2}T = 0.$$

Следовательно:

$$T = Q\sqrt{2}, \quad R_x = Q, \quad R_y = -\frac{Pb}{2a}; \quad S_y = Q + \frac{Pb}{2a}, \quad S_z = P.$$

Для тела с двумя закрепленными точками O и O' условием равновесия является уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} M_{OO'}(\mathbf{F}_k) = 0, \tag{3-123}$$

где $\mathbf{F}_k$ обозначают заданные силы. Принимая прямую OO' за ось z, для определения реакций $\mathbf{N}_O$ и $\mathbf{N}'_{O'}$ закрепленных точек O и O' получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} F_{kx} + N_x + N'_x = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} + N_y + N'_y = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} F_{kz} + N_z + N'_z = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} M_{Ox}(\mathbf{F}_k) - hN'_y = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} M_{Oy}(\mathbf{F}_k) + hN'_x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3-124}$$

где $h = OO'$. Эти уравнения определяют поперечные к оси OO' компоненты $\mathbf{N}_x$, $\mathbf{N}_y$, $\mathbf{N}'_x$, $\mathbf{N}'_y$ и сумму $\mathbf{N}_z + \mathbf{N}'_z$ продольных компонентов.

§ 3-40. Плоская система сил

Если все внешние силы, приложенные к твердому телу, находятся в одной плоскости, то такая система сил называется *плоской*. Ее главный вектор $\mathbf{R}$ лежит в той же плоскости, а главный момент $\mathbf{M}_O$ в центре O этой плоскости к ней перпендикулярен. Поэтому для плоской системы наименьший момент $m = 0$, и она приводиться к динаме не может, а эквивалентна одной равнодействующей $\mathbf{R}_C$, если $\mathbf{R} \neq 0$, или паре, если $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{M}_O \neq 0$, или, наконец, уравновешена при $\mathbf{R} = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$. Если плоскость сил принять за плоскость xy, то условия уравновешенности плоской системы выражаются тремя уравнениями:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} P_{ky} = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_O(\mathbf{P}_k) = 0. \tag{3-125}$$

Пример: Трехшарнирная арка, укрепленная на шарнирах A и B, находится под действием нагрузок $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, приложенных к разным частям арки. Найти реакции $\mathbf{S}_A$ и $\mathbf{Q}_B$ (рис. 3-56). Уравнения равновесия арки как одного тела будут:

$$P_{1x} + P_{2x} + S_x + Q_x = 0;$$
$$P_{1y} + P_{2y} + S_y + Q_y = 0;$$
$$M_A(\mathbf{P}_1) + M_A(\mathbf{P}_2) + (a_1 + a_2) Q_y = 0.$$

В них четыре неизвестных. Четвертое уравнение дает условие равновесия левой половины арки:

$$M_C(\mathbf{P}_1) - a_1 S_y + h S_x = 0.$$

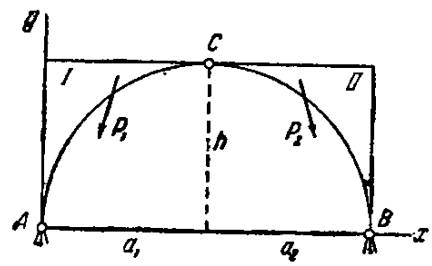


Рис. 3-56.

Вместо этих трех уравнений можно пользоваться независимо от выбора осей уравнениями трех моментов. Именно, для уравновешенности плоской системы сил необходимо и достаточно, чтобы равнялись нулю алгебраические суммы их моментов около трех центров, не лежащих на одной прямой, на их плоскости.

§ 3-41. Графическое приведение плоской системы сил

Для графического приведения плоской системы $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ сил строится прежде всего *многоугольник сил* (рис. 3-57), т. е. ломаная $aa_1a_2 \ldots b$, звенья которой векторно равны векторам сил данной системы. Вершина этого многоугольника соединяется лучами (1), (2), (3), ..., $(n+1)$ с произвольным полюсом O на плоскости сил. Затем из произвольной точки K строится ломаная $KB_1B_2 \ldots B_nL$ (рис. 3-58), промежуточные вершины которой $B_1B_2 \ldots B_n$ лежат на линиях действия сил данной системы, а звенья параллельны лучам силового многоугольника, опирающимся на соответствующие рассматриваемой силе стороны. Эта ломаная $KB_1B_2 \ldots B_nL$ называется *вариньоновым*, или *веревочным многоугольником* данной плоской системы сил.

При этом построении возможны три случая.

1) Если силовой многоугольник не замкнут (рис. 3-57), то замыкающий его вектор **ab** изображает главный вектор **R** системы и система эквивалентна одной силе $\mathbf{R}_C$, проходящей через точку C пересечения крайних звеньев многоугольника Вариньона (рис. 3-58).

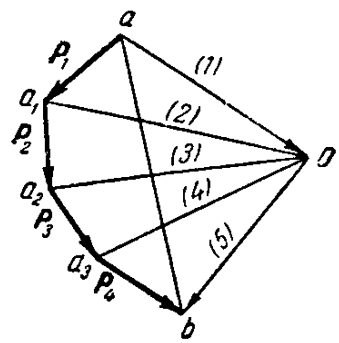


Рис. 3-57.

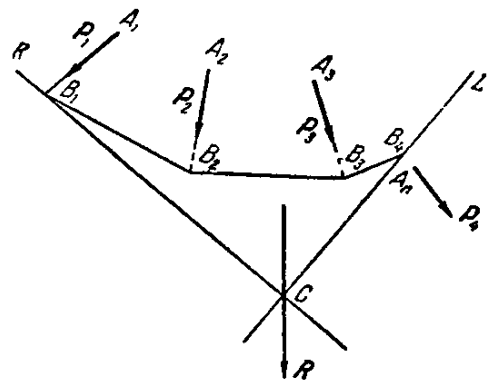


Рис. 3-58.

2) Если силовой многоугольник замкнут (рис. 3-59, *а*), то первый и последний лучи сливаются, а крайние звенья многоугольника Вариньона между собой параллельны. Главный вектор $\mathbf{R} = 0$ и система эквивалентна паре (рис. 3-59, *б*), силы которой направлены по крайним звеньям Вариньона многоугольника и изобрзжаются двойным лучом, направленным в разные стороны: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \backsim (\mathbf{aO}_{B_1}\mathbf{Ob}_{B_3})$.

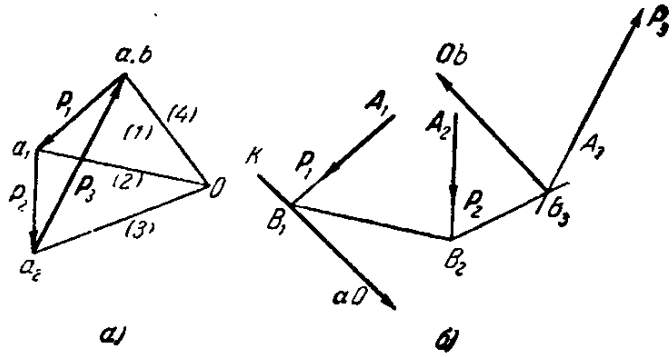


Рис. 3-59.

3) Если при $\mathbf{R} = 0$ (рис. 3-60, *а*) и крайние звенья многоугольника Вариньона расположены на одной прямой (рис. 3-60, *б*), то он называется *замкнутым* и система в этом случае уравновешена.

Фигура, составленная силовым многоугольником и его лучами, называется *взаимной* с фигурой, составленной вариньоновым многоугольником и линиями действия сил данной системы, в том смысле, что для каждой прямой на первой фигуре имеется параллельная прямая на второй и треугольнику на первой фигуре (например, $\triangle aOa_1$) на второй соответствует точка B_1, в которой пересекаются прямые,

параллельные сторонам треугольника первой фигуры. С изменением полюса O меняются лучи силового многоугольника и звенья много-

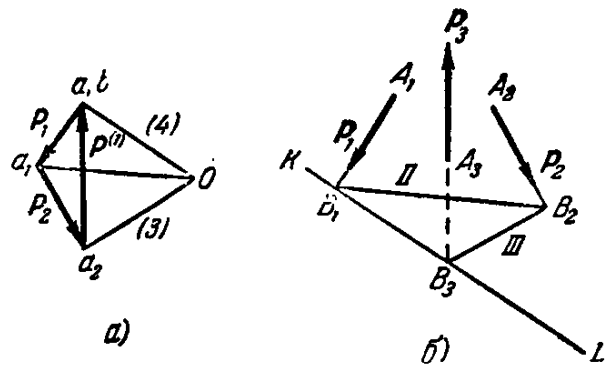


Рис. 3-60.

угольника Вариньона. При этом все соответственные звенья двух многоугольников Вариньона, построенных для полюсов O и O', пересекаются на прямой, параллельной OO'.

С помощью многоугольника Вариньона можно графически определять моменты сил плоской системы. Для этого через центр моментов C проводятся прямые, параллельные силам (рис. 3-61), а из полюса O опу-

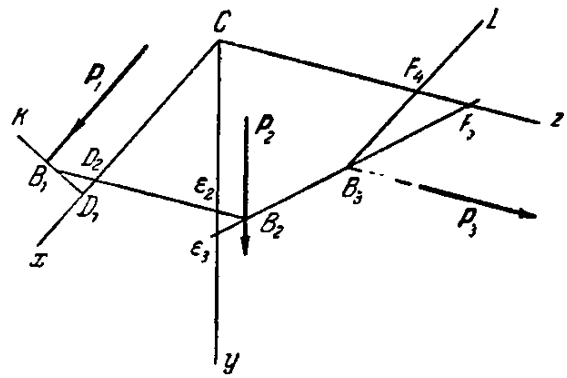


Рис. 3-61.

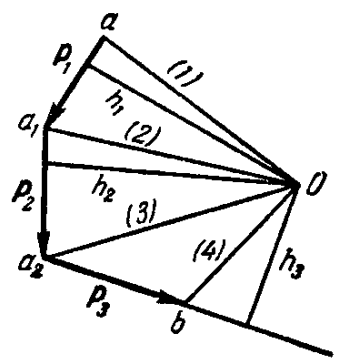


Рис. 3-62.

скаются перпендикуляры на стороны силового многоугольника (рис. 3-62). Отметив на прямых, проведенных через центр момента параллельно силам, отрезки, отсеченные на них звеньями многоугольника Вариньона, пересекающимися на соответствующей силе, получим:

$$M_C(\mathbf{P}_1) = -D_1D_2 \cdot h_1; \qquad M_C(\mathbf{P}_2) = E_2E_3 \cdot h; \qquad M_C(\mathbf{P}_3) = F_3F_4 \cdot h.$$

§ 3-42. Параллельные силы

Если все силы системы $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n)$ расположены на параллельных прямых, то, выбрав на этих прямых определенное направление, указываемое ортом $\mathbf{e}$, и обозначая через P_k алгебраическую величину

силы $\mathbf{P}_k$ на ее оси, получим для главного вектора $\mathbf{R}$ системы и главного момента $\mathbf{M}_O$ формулы:

$$\mathbf{R} = \mathbf{e} \sum_{k=1}^{n} P_k;$$

$$M_O = \sum_{k=1}^{n} P_k \mathbf{r}_k \times \mathbf{e},$$

где $\mathbf{r}_k$ обозначают радиусы-векторы точек приложения сил относительно центра O. Вектор

$$\mathbf{S}_O = \sum_{k=1}^{n} P_k \mathbf{r}_k \tag{3-126}$$

называется *вектором статического момента системы параллельных сил* около центра O, а его проекции на оси xyz, т. е.

$$S_x = \sum_{k=1}^{n} P_k x_k, \quad S_y = \sum_{k=1}^{n} P_k y_k, \quad S_z = \sum_{k=1}^{n} P_k z_k, \tag{3-127}$$

— *статическими моментами около соответствующих осей*. Главный момент $\mathbf{M}_O$ выражается через статический $\mathbf{S}_O$ формулой

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{S}_O \times \mathbf{e}. \tag{3-123}$$

При перемещении центра O в центр O', причем $\mathbf{OO'} = \rho$, статический момент меняется по формуле

$$\mathbf{S}_O = \mathbf{S}_{O'} + \rho \sum_{k=1}^{n} P_k. \tag{3-129}$$

Если $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$, то $\mathbf{R} \perp \mathbf{M}_O$, а потому параллельная система не может приводиться к динаме. При $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$ существует центр C, в котором статический момент равен нулю. Этот центр называется *центром параллельной системы*. Его положение относительно произ-

вольного начала O определяется радиусом-вектором

$$\rho = \frac{\mathbf{S}_O}{\sum_{k=1}^{n} P_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \mathbf{r}_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \tag{3-130}$$

а координаты — формулами:

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k y_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}, \quad z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} P_k}. \tag{3-131}$$

Положение центра системы параллельных сил зависит не от их направления, а только от их величин и точек приложения. Главный момент $\mathbf{M}_C = 0$, а потому при $\sum_{k=1}^{n} P_k \neq 0$ система параллельных сил эквивалентна одной равнодействующей $\mathbf{R}_C$, линия действия которой проходит через центр системы: $(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n) \infty \mathbf{R}_C$. В случае двух сил, направленных в одиу сторону, центр делит отрезок, соединяющий их точки приложения, на части, обратно пропорциональные величинам сил, внутренним образом, а в случае сил, направленных в противоположные стороны, — внешним.

Если $\sum_{k=1}^{n} P_k = 0$, то статический и главный моменты не зависят от выбора центра и система эквивалентна паре (при $\mathbf{M}_O \neq 0$) или уравновешена (при $\mathbf{M}_O = 0$).

Последнее условие выполняется при $\mathbf{S}_O = 0$, и тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_k x_k = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} P_k y_k = 0, \\ &\sum_{k=1}^{n} P_k z_k = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3-132}$$

Это равновесие не нарушается при изменении направления сил и называется *астатическим*. Условие $\mathbf{M}_O = 0$ выполняется еще при $\mathbf{S}_O \parallel \mathbf{e}$,

и тогда уравнения равновесия имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} P_k = 0; \\ &\frac{\sum_{k=1}^{n} P_k x_k}{\cos\alpha} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k y_k}{\cos\beta} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k z_k}{\cos\gamma}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}133)$$

где α, β, γ обозначают углы с осями прямых, на которых расположены параллельные силы. Это равновесие при изменении направления сил нарушается.

§ 3-43. Центр тяжести

В технических задачах силы, представляющие веса материальных частиц твердого тела, можно считать параллельными, и тогда центр этих параллельных сил называется *центром тяжести тела*. Положение центра тяжести тела по отношению к этому телу не зависит от ориентации тела относительно Земли. Для определения центра тяжести сплошного тела, заполняющего объем V, этот объем разбивают на бесконечно малые части ΔV_k. Если величина веса части ΔV_k есть P_k, то предел отношения $\frac{P_k}{\Delta V_k}$ при стягивании части ΔV_k в точку $M(x, y, z)$ называется *удельным весом* тела в данной точке M: $\lim\limits_{\Delta V_k \to M} \frac{P_k}{\Delta V_k} = \gamma(x, y, z)$. Удельный вес в разных точках, вообще, имеет различное значение. Если же он постоянен, то тело называется *однородным*. Общий вес P тела через заданный удельный вес $\gamma(x, y, z)$ выражается формулой

$$P = \lim_{\Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} P_k = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz. \qquad (3\text{-}134)$$

Общие формулы (3-131) для координат центра параллельных сил в случае центра тяжести получают форму:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, x\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, y\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz} \\ z_C &= \frac{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, z\, dx\, dy\, dz}{\iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}135)$$

а в случае однородного тела:

$$\left.\begin{aligned} x_C &= \frac{\iiint\limits_{(V)} x\,dx\,dy\,dz}{V}, \quad y_C = \frac{\iiint\limits_{(V)} y\,dx\,dy\,dz}{V}, \\ z_C &= \frac{\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz}{V}. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}135)$$

Центр тяжести однородного тела иногда называется *центром объема* этого тела.

Если однородное тело имеет плоскость, ось или центр геометрической симметрии, то его центр тяжести лежит на плоскости, на оси или в центре симметрии. Если однородное тело имеет вид слоя бесконечно малой толщины h, ограниченного поверхностью S, то, разбив поверхность на бесконечно малые части $\Delta\sigma_k$, для координат центра тяжести получим формулы:

$$x_C = \frac{\iint\limits_{(S)} x\,d\sigma}{S}, \quad y_C = \frac{\iint\limits_{(S)} y\,d\sigma}{S}, \quad z_C = \frac{\iint\limits_{(S)} z\,d\sigma}{S}. \quad (3\text{-}136)$$

Если поверхность S есть криволинейная трапеция, ограниченная графиком функции $y = f(x)$ и ординатами с абсциссами $x = a$ и $x = b$, то ее центр тяжести определяется координатами:

$$x_C = \frac{\int\limits_a^b x f(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx}, \quad y_C = \frac{1}{2}\,\frac{\int\limits_a^b f^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b f(x)\,dx}. \quad (3\text{-}136')$$

Эта точка C называется *центром тяжести поверхности.*

Если однородное тело имеет вид бесконечно тонкой линии L с поперечным сечением σ, то, разбив линию на бесконечно малые части ΔL_k, для координаты центра тяжести получим формулы:

$$x_C = \frac{\int\limits_L x\,dS}{L}, \quad y_C = \frac{\int\limits_L y\,dS}{L}, \quad z_C = \frac{\int\limits_L z\,dS}{L}. \quad (3\text{-}137)$$

Эта точка C называется *центром тяжести линии.*

Если тело, поверхность или линия разбиты на n частей, размеры и положения центров тяжести которых известны, то координаты

центра тяжести тела, поверхности или линии определяются формулами:

для тела

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k V_k}{V}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k V_k}{V},$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k V_k}{V},$$

для поверхности

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k S_k}{S}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k S_k}{S},$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k S_k}{S}, \qquad (3\text{-}138)$$

для линии

$$x_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k L_k}{L}, \qquad y_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} y_k L_k}{L},$$

$$z_C = \frac{\sum_{k=1}^{n} z_k L_k}{L},$$

где x_k, y_k, z_k обозначают координаты центра тяжести соответствующей части.

Если тело с объемом V имеет полости V_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), центры тяжести которых имеют координаты x_k, y_k, z_k, а объем $V' = V + V_1 + V_2 + \ldots + V_n$ имеет центр тяжести в точке C' (x', y', z'), то центр тяжести объема V имеет координаты:

$$x_C = \frac{V'x' - \sum_{k=1}^{n} V_k x_k}{V}, \qquad y_C = \frac{V'y' - \sum_{k=1}^{n} V_k y_k}{V},$$

$$z_C = \frac{V'z' - \sum_{k=1}^{n} V_k z_k}{V}, \qquad (3\text{-}139)$$

Для центров тяжестей плоской кривой и плоской площадки имеют место *теоремы Паппа—Гюльдена.*

1) Если плоскую кривую повернуть на некоторый угол вокруг какой-либо оси, лежащей в плоскости кривой и ее не пересекающей, то величина площади поверхности вращения, описанной при этом повороте

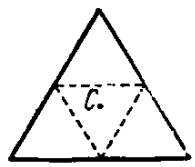
кривой, равна длине кривой, умноженной на длину пути ее центра тяжести.

2) Если замкнутую плоскую фигуру повернуть на некоторый угол вокруг оси, лежащей с ней в одной плоскости, но не пересекающей ее контура, то объем тела вращения, описанного при этом повороте фигурой, равен ее площади, умноженной на длину пути ее центра тяжести.

Центр тяжести линий

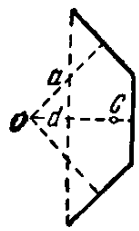
1) Прямолинейный отрезок AB — Средина C отрезка $AC = CB$

2) Периметр треугольника



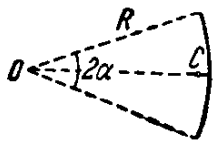
Центр C круга, вписанного в треугольник, вершина которого лежит на срединах сторон данного треугольника

3) Периметр правильной ломаной длины L, хорды d и апофемы a



C лежит на перпендикуляре, опущенном из центра O на хорду на расстоянии $OC = \frac{ad}{L}$

4) Дуга окружности радиуса R с центральным углом 2α



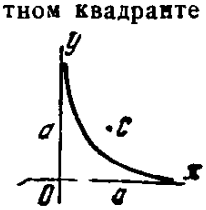
C лежит на биссектрисе центрального угла на расстоянии $OC = R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ от центра O дуги. Для полуокружности

$$OC = \frac{2R}{\pi} \approx \frac{7}{11} R$$

5) Арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$

$$x_C = \pi a; \quad y_C = \frac{4}{3} a$$

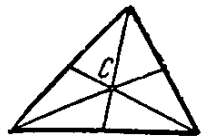
6) Четверть астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащая в первом координатном квадранте



$$x_C = y_C = \frac{2}{5} a$$

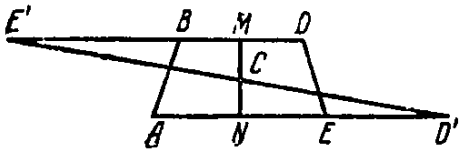
Центр тяжести поверхностей

1) Площадь треугольника



Точка C пересечения медиан

2) Площадь трапеции



На прямой MN, соединяющей средины оснований $AE=a, BD=b$, на расстоянии h_a от основания AE, где

$$h_a = \frac{1}{3}\, h\, \frac{a+2b}{a+b},$$

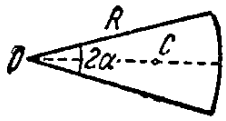
h — высота трапеции.

Центр C тяжести трапеции можно построить, отложив $BE'=a$, $ED'=b$ и взяв точку C пересечения прямых MN и $E'D'$

3) Параллелограмм

Точка пересечения диагоналей

4) Круговой сектор радиуса R с центральным углом 2α



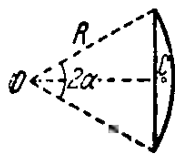
На биссектрисе центрального угла на расстоянии

$$OC = \frac{2}{3}\, R\, \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$ от центра O круга

Для полукруга

$$OC = \frac{4}{3}\, \frac{R}{\pi} \approx \frac{14}{33}\, R$$

5) Круговой сегмент радиуса R с центральным углом 2α



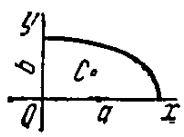
На биссектрисе центрального угла на расстоянии

$$OC = \frac{2}{3}\, R\, \frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

от центра O круга

6) Площадь квадранта эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$x_C = \frac{4a}{3\pi},\quad y_C = \frac{4b}{3\pi}$$

7) Площадь циклоиды

$x = a(t - \sin t),\quad y = a(1 - \cos t)$

$$x_C = \pi a,\quad y_C = \frac{5}{6}\, a$$

8) Площадь квадранта астроиды

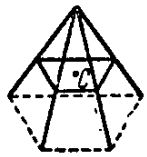
$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

$$x_C = y_C = \frac{256}{315}\frac{a}{\pi}$$

9) Боковая поверхность прямой призмы

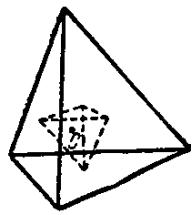
Центр тяжести поверхности совпадает с центром тяжести периметра среднего сечения, перпендикулярного к ребрам

10) Боковая поверхность пирамиды



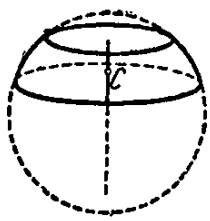
Центр тяжести поверхности совпадает с центром тяжести периметра сечения, проведенного перпендикулярно к высоте на расстоянии одной трети от основания

11) Полная поверхность тетраэдра



Центр тяжести поверхности лежит в центре шара, вписанного в тетраэдр, вершины которого находятся в центрах тяжести граней данного тетраэдра

12) Центр тяжести шарового пояса



На средине стрелки пояса, т. е. отрезка между основаниями пояса перпендикуляра, опущенного на них из центра шара

Центр тяжести объемов

1) Параллелепипед

Точка пересечения диагоналей

2) Призма и цилиндр

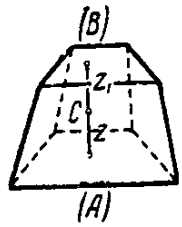
Средина отрезка, соединяющего центры тяжестей оснований

3) Пирамида и конус

Центр тяжести объема совпадает с центром тяжести площади сечения, проведенного параллельно основанию на расстоянии одной четверти высоты от основания.

Центр тяжести тетраэдра лежит на пересечении прямых, соединяющих вершины с центрами тяжести противоположных граней

4) Усеченная пирамида с площадью A нижнего осиования и площадью B верхнего

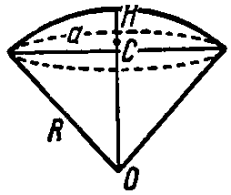


Центр тяжести лежит на отрезке, соединяющем центры тяжестей площадей оснований, и делит его в отношении

$$\frac{z}{z_1} = \frac{A + 3B + 2\sqrt{AB}}{B + 3A + 2\sqrt{AB}},$$

где z — расстояние C от нижнего, а z_1 — от верхнего оснований

5) Шаровой сектор радиуса R и высоты H



Центр тяжести лежит на оси симметрии (высоте) на расстоянии

$$OC = \frac{3}{4}\left(R - \frac{H}{2}\right)$$

от центра O шара.

В случае полушария $OC = \frac{3}{8} R$

6) Сегмент шара радиуса R, высоты H и радиуса a основания

Центр тяжести лежит на оси симметрии (высоте) на расстоянии от центра шара

$$OC = \frac{\pi a^4}{V},$$

где V — объем сегмента:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi a^2 \sqrt{R^2 - a^2}$$

§ 3-44. Равновесие тяжелого тела, опирающегося на гладкую горизонтальную плоскость

Если тело опирается на плоскость точками $A_1, A_2, \ldots A_n$, то выпуклый многоугольник, имеющий вершинами некоторые точки опоры и содержащий внутри себя остальные, называется *опорным*. При равновесии тела проекция его центра тяжести должна падать внутрь опорного многоугольника или в крайнем случае — на его периметр. Если к опирающемуся на горизонтальную плоскость телу (рис. 3-63), кроме веса **P**, приложена еще сила **Q**, лежащая в одной плоскости с **P** и стремящаяся опрокинуть тело вокруг ребра AA, то для равновесия должно выполняться условие $|M_{AA}(\mathbf{P})| > |M_{AA}(\mathbf{Q})|$ или, обозначая плечи сил **P** и **Q** через p и q, должно быть $Pp > Qq$. Произведение Pp называется *моментом устойчивости*, а произведение Qq — *опрокидывающим моментом*.

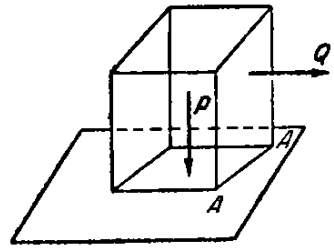


Рис. 3-63.

§ 3-45. Вириал

Вириалом отиосительио полюса O системы сил $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$, приложенных к телу в точках A_k, называется сумма скалярных произведеиий векторов сил на радиусы-векторы их точек приложеиия:

$$V_O = \sum_{k=1}^{n} (\mathbf{P}_k, \mathbf{OA}_k). \tag{3-140}$$

С переносом полюса O в точку O' вириал меняется по формуле

$$V_O = V_{O'} + \left(\mathbf{OO'}, \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}_k\right). \tag{3-141}$$

Если $\mathbf{P}_k$ образуют параллельную систему, имеющую центр C, то $V_C = 0$. Для системы, имеющей центральиую ось, иа этой оси можно отыскать такую точку C, вириал отиосительно которой обращается в нуль. Эта точка называется *центром системы*.

В. ДИНАМИКА

Динамика — раздел общей механиики, в котором изучается механическое двнжение в связи с силами, приложенными к движущимся объектам.

Глава 3-6

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

§ 3-46. Инерциальная система отсчета

Система отсчета, по отиошеиию к которой всякая материальная частица при отсутствии приложеииых к ней сил или под действием приложенных к ней взаимио-уравновешениых сил совершает равномерное прямолинейное движение, иазывается *инерциальной*. С достаточной для техиики точностью за иперциальиую систему отсчета можно приiять систему отсчета, связаиную со звездами, т. е. имеющую иачало в цеитре тяжести солнечной системы (иаходящемся почти в центре тяжести Солнца) и оси, направленные к трем звездам.

§ 3-47. Масса материальной частицы

При движении материальиой частицы по отиошеиию к инерциальной системе отсчета под действием силы вектор этой силы пропорционален вектору ускорения движущейся точки:

$$\mathbf{P} = m\mathbf{w}. \tag{3-142}$$

Положительиый множитель m, сохраияющий для даиной точки постояиное значение, принимается за меру инертной массы точки и в механике называется просто *массой точки*. Единица измерения массы в системе МКГСС

$$[m] = \frac{[\text{сила}]}{[\text{ускореиие}]} = \frac{кгс \cdot сек^2}{метр}. \tag{3-143}$$

Так как отиошеиие веса P точки к ускореиию g свободиого падения при измеиеиии их с изменением места земиой поверхности

остается постоянным, то численная величина инертной массы через вес P определяется формулой

$$m = \frac{P}{g}. \tag{3-144}$$

Величина g ($м/сек^2$) имеет значения:

Ленинград	(широта	59°57′)	— 9,8193
Москва	(»	55°45′)	— 9,8156
Свердловск	(»	56°48′)	— 9,8162
Харьков	(»	50°0′)	— 9,8102
Одесса	(»	46°29′)	— 9,8077
Тбилиси	(»	40°43′)	— 9,8018
Гринвич	(»	51°28′)	— 9,8120
Париж	(»	48°50′)	— 9,8096
Берлин	(»	52°23′)	— 9,8130

§ 3-48. Принцип независимости действия сил

Если силы $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n$ по отдельности сообщают материальной частице ускорения $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ относительно инерциальной системы, то при совместном действии этих сил на ту же точку она получит ускорение $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \ldots + \mathbf{w}_n$. Следовательно, и при движении частицы систему приложенных к ней сил можно заменять их равнодействующей.

§ 3-49. Кориолисовы силы

Если движение частицы рассматривается по отношению к системе отсчета S', совершающей по отношению к инерциальной заданное переносное движение, создающее переносное и поворотное ускорения, то между вектором $\mathbf{P}$ равнодействующей сил, приложенных к движущейся частице, и ее относительным ускорением $\mathbf{w}'$ по отношению к движущейся системе отсчета имеет место уравнение

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{P} + (-m\mathbf{w}_{пер}) + (-m\mathbf{w}_{пов}). \tag{3-145}$$

Векторы $-m\mathbf{w}_{пер} = \mathbf{\Phi}_{пер}$ и $-m\mathbf{w}_{пов} = \mathbf{\Phi}_{пов}$ называются *фиктивными*, или *кориолисовыми*, силами. Они представляют собой две векторные величины, имеющие размерность силы и добавляемые к силам, приложенным к материальной частице, для определения ее относительного ускорения. Введя вектор

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} + \mathbf{\Phi}_{пер} + \mathbf{\Phi}_{пов}, \tag{3-146}$$

получим уравнение

$$m\mathbf{w}' = \mathbf{P}', \tag{3-147}$$

которое показывает, что формально всякую систему отсчета можно рассматривать как инерциальную, если под вектором силы, приложенной к движущейся частице, понимать сумму вектора физической силы, приложенной к этой частице, и векторов фиктивных (кориолисовых) сил. Принимая за систему отсчета Землю, имеем, что величина переносного ускорения составляет не более 2,5 $см/сек^2$, а поворотного при относительной скорости 60 $м/сек$ — около 0,5 $см/сек^2$. Поэтому во многих технических задачах кориолисовыми силами, принимая за систему отсчета Землю, можно пренебрегать и считать Землю за инерциальную систему отсчета.

Если система отсчета S' движется относительно инерциальной поступательно, прямолинейно и равномерно, то $\mathbf{\Phi}_{пер} = \mathbf{\Phi}_{пов} = 0$, а

потому при $\mathbf{P}=0$ $\mathbf{w}'=0$, т. е. частица относительно системы S' движется прямолинейно и равномерно, так что система S' тоже является инерциальной.

В этом состоит галилеев принцип относительности.

§ 3-50. Дифференциальные уравнения движения изолированной точки

Материальная точка называется *изолированной*, если она не находится ни в каких заданных геометрических соотношениях с другими материальными точками и потому может занимать в пространстве любое положение. Сила, приложенная к материальной точке, называется *активной*, или заданной, если ее вектор $\mathbf{P}$ определяется кинематическим состоянием точки, т. е. моментом t времени, радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и вектором скорости $\mathbf{V}$ относительно инерциальной системы отсчета. Проекции P_x, P_y, P_z активной силы на оси системы отсчета выражаются формулами вида:

$$P_x = X(t;\ x,\ y,\ z;\ V_x,\ V_y,\ V_z);\quad P_y = Y(t;\ x,\ y,\ z;\ V_x,\ V_y,\ V_z);$$
$$P_z = Z(t;\ x,\ y,\ z;\ V_x,\ V_y,\ V_z). \qquad (3\text{-}148)$$

Если к изолированной точке приложена заданная сила $\mathbf{P}$, то кинематические уравнения движения точки получаются из дифференциальных уравнений движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right);\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right);$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z\left(t;\ x,\ y,\ z;\ \frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right). \qquad (3\text{-}149)$$

Общие решения этих уравнений содержат шесть произвольных постоянных и выражаются формулами вида:

$$x = \varphi_1(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6),\quad y = \varphi_2(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6),$$
$$z = \varphi_3(t;\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ C_5,\ C_6). \qquad (3\text{-}150)$$

Для определения численных значений постоянных необходимо иметь начальные данные, т. е. значения x_0, y_0, z_0 координат точки и проекции V_{0x}, V_{0y}, V_{0z} скорости в данный момент t_0. Тогда постоянные определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= \varphi_1(t_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ y_0 &= \varphi_2(t_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ z_0 &= \varphi_3(t_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ V_{0x} &= \varphi_1'(t_0,\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),\\ V_{0y} &= \varphi_2'(t_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6).\\ V_{0z} &= \varphi_3'(t_0;\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}151)$$

Вместо прямоугольных координат x, y, z можно пользоваться цилиндрической или сферической системой координат и, проектируя на соответствующие оси обе части основного равенства $m\mathbf{w} = \mathbf{P}$, применять для проекций ускорения формулы (3-36) и (3-37).

В случае плоского движения применение полярных координат ρ и φ дает уравнения:

$$m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = P_\rho;\quad \frac{m}{\rho}\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = P_\varphi. \qquad (3\text{-}152)$$

Наконец, можно проектировать основное равенство $m\mathbf{w} = \mathbf{P}$ на оси естественного трехгранника, построенного в точке траектории, соответствующей данному моменту t, т. е. на касательную, главную нормаль и бинормаль, и тогда естественные дифференциальные уравнения примут вид:

$$m\frac{dv}{dt} = P_\tau, \quad \frac{mv^2}{\rho} = P_n, \quad 0 = P_b, \tag{3-153}$$

где ρ — радиус кривизны, а P_τ, P_n, P_b — проекции силы $\mathbf{P}$ на касательную, главную нормаль и бинормаль к траектории.

§ 3-51. Движение тяжелой точки

Если принять Землю за инерциальную систему и направить ось Oz вертикально вверх, то уравнения движения точки под действием только силы веса P будут:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g.$$

Если начальные данные имеют вид:

$$t_0 = 0;\ x_0 = y_0 = z_0 = 0;\ V_{0x} = 0,\ V_{0y} = V_0\cos\alpha,\ V_{0z} = v_0\sin\alpha, \tag{3-154}$$

то движение происходит в вертикальной плоскости (3-42) по уравнениям:

$$y = v_0 t\cos\alpha;\ z = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{3-155}$$

Траектория лежит на параболе

$$z = y\operatorname{tg}\alpha - \frac{gy^2}{2v^2\cos^2\alpha}. \tag{3-156}$$

Дальность полета, т. е. расстояние от начального положения до места падения на землю, выражается формулой

$$L = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}. \tag{3-157}$$

При учете сопротивления воздуха, считая силу сопротивления направленной противоположно скорости и по величине пропорциональной ей, дифференциальные уравнения имеют вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g - k\frac{dz}{dt}, \tag{3-158}$$

если сила $\mathbf{N}$ сопротивления выражается формулой $\mathbf{N} = -\lambda\mathbf{V}$ и $k = \frac{\lambda g}{P}$, где P — вес точки.

При прежних начальных данных (3-154) движение происходит в вертикальной плоскости yz по уравнениям:

$$y = \frac{v_0\cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-kt}\right),\ z = -\frac{gt}{k} + \left(\frac{v_0\sin\alpha}{k} + \frac{g}{k^2}\right)\left(1 - e^{-kt}\right). \tag{3-159}$$

Траектория лежит на кривой, имеющей асимптоту $y = \frac{v_0\cos\alpha}{k}$. При величине сопротивления, пропорциональной квадрату скорости, т. е.

$N = cv^2$, при тех же начальных данных (3-154) и при $\alpha \leqslant 15°$ приближенное уравнение траектории имеет вид:

$$z = y \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{4c^2 u_0^2}\left(e^{2\lambda c x} - 2cx - 1\right),$$

где $\lambda = 1{,}017$ и $u_0 = \lambda v_0 \cos \alpha$.

§ 3-52. Центральные силы

Сила **P** называется *центральной*, если линия ее действия проходит через неподвижную точку основной системы отсчета. Движение точки под действием центральной силы происходит по плоской кривой, плоскость которой проходит через центр силы. Принимая эту плоскость за координатную и пользуясь полярными координатами (ρ, φ), получим дифференциальные уравнения движения точки согласно формуле (3-152) в виде:

$$m\left[\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] = P, \quad \frac{d}{dt}\left(\rho^2 \frac{d\varphi}{dt}\right) = 0,$$

где P есть алгебраическая величина проекции центральной силы **P** на полярный радиус-вектор. Отсюда

$$\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = C. \tag{3-160}$$

Так как по формуле (3-28) $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2\frac{dS}{dt}$ представляет удвоенную секторную скорость точки, то при движении под действием центральной силы *секторная скорость* относительно центра силы остается постоянной. Если *уравнение траектории* в полярных координатах имеет вид: $u = \frac{1}{\rho} = f(\varphi)$, то через постоянную C скорость v и сила P определяются *формулами Бине:*

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= C^2\left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right], \\ P &= -C^2 m u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{3-161}$$

§ 3-53. Свободное падение точки с учетом вращения Земли

Если за оси координат взять нисходящую вертикаль Oz, определяемую по направлению отвеса, касательную Ox к меридиану, направленную к северу, и касательную Oy к параллели, направленную на восток, то дифференциальные уравнения свободного падения точки по отношению к этим осям будут иметь форму

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\left(\sin\varphi \frac{dx}{dt} + \cos\varphi \frac{dz}{dt}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g - 2\omega \cos\varphi \frac{dy}{dt}, \end{aligned}\right\} \tag{3-162}$$

где ω — угловая скорость вращения Земли вокруг оси; φ — широта, считаемая постоянной; ускорение g связано с измеряемым статическим

весом P и массой m точки равенством $P = mg$. При начальных данных $t_0 = 0$, $x_0 = y_0 = z_0 = V_{0x} = V_{0y} = V_{0z} = 0$ приближенные (с точностью до членов порядка ω^2) решения уравнений (3-162) имеют вид:

$$x = 0,\ y = \frac{g\cos\varphi}{3}t^3,\ z = \frac{gt^2}{2}. \tag{3-163}$$

Следовательно, падающая точка отклоняется от вертикали к востоку. При падении с высоты h отклонение на поверхности Земли имеет величину

$$\Delta = \frac{g\omega\cos\varphi}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}. \tag{3-164}$$

§ 3-54. Прямолинейное движение точки

Прямолинейное движение происходит под действием силы постоянного направления при начальной скорости, равной нулю или параллельной линии действия силы.

Если прямую, по которой происходит прямолинейное движение, принять за ось Ox, то дифференциальное уравнение движения под действием силы P имеет вид:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right), \tag{3-165}$$

где

$$f\left(t,\ x,\ \frac{dx}{dt}\right) = P_x.$$

Уравнение (3-165) можно заменить двумя уравнениями первого порядка:

$$m\frac{dv}{dt} = f(t,\ x,\ v);\ \frac{dx}{dt} = v \tag{3-166}$$

с начальными значениями t_0, x_0, v_0.

§ 3-55. Вертикальное падение точки при сопротивлении, пропорциональном квадрату скорости

Если сила сопротивления $N = \lambda v^2$, то при начальных данных $t_0 = x_0 = v_0 = 0$ и весе P точки

$$v = a\,\mathrm{th}\,(akt),\ x = \frac{1}{k}\ln\mathrm{ch}\,(akt), \tag{3-167}$$

где $a^2 = \dfrac{mg}{\lambda} = \dfrac{P}{\lambda}$; $k = \dfrac{\lambda g}{P}$.

§ 3-56. Прямолинейные колебания точки под действием позиционной силы

Сила, зависящая только от положения точки, называется *позиционной*. При прямолинейном движении по оси Ox проекция позиционной силы выражается формулой $P_x = f(x)$. При начальных данных t_0, x_0, v_0 скорость v определяется формулой

$$v^2 = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx. \tag{3-168}$$

Движение происходит на отрезке оси Ox, на котором функция

$$\psi(x) = v_0^2 + \frac{2}{m}\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \tag{3-169}$$

не отрицательна: $\psi(x) \geqslant 0$. Если уравнение $\psi(x) = 0$ имеет два простых корня x_1 и x_2, между которыми лежит начальная абсцисса x_0, так что $\psi(x_1) = \psi(x_2) = 0$, $\psi_1'(x_1) > 0$, $\psi_2'(x_2) < 0$, то движение представляет собой *колебания на отрезке* $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ с периодом

$$2\tau = 2\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}. \tag{3-170}$$

Эти колебания называются *изохронными*, так как их период постоянен. При $v_0 < 0$ первый момент t_1, когда точка достигает конца интервала колебания и получает скорость, равную нулю, определяется формулой $t_1 = t_0 + \int_{x_1}^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}}$; последующие моменты, в которые $v = 0$, связаны друг с другом соотношением $t_n = t_{n-1} + \tau$.

§ 3-57. Гармонические колебания точки

Если сила P выражается формулой

$$P_x = -cx, \tag{3-171}$$

т. е. вектор $\mathbf{P}$ направлен к центру O и по величине пропорционален отклонению движущейся точки от этого центра, то формула (3-169) дает:

$$\psi(x) = k^2(a^2 - x^2), \tag{3-172}$$

где

$$k^2 = \frac{c}{m} \tag{3-173}$$

и

$$x_0^2 + k^2 v_0^2 = k^2 a^2. \tag{3-174}$$

Движение происходит на интервале $-a \leqslant x \leqslant a$ и имеет период колебания

$$2\tau = \frac{2\pi}{k}. \tag{3-175}$$

Так как период не зависит от начальных данных, то эти колебания называются не только изохронными, но и *тавтохронными*, т. е. с одним и тем же периодом; дифференциальное уравнение колебаний на основании формул (3-171) и (3-173) принимает вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0. \tag{3-176}$$

Его решение при начальных данных $t_0 = 0$, x_0, v_0 имеет вид:

$$x = a\sin(kt + \alpha), \tag{3-177}$$

где a определяется формулой (3-174), а угол α — формулами:

$$\sin\alpha = \frac{x_0}{a}, \quad \cos\alpha = \frac{v_0}{ka}. \tag{3-178}$$

Длина a называется *амплитудой колебания*, угол $kt + \alpha$ — *фазой колебания*. Сами колебания, происходящие по закону (3-177), называются *гармоническими*. Если, кроме силы P с проекцией $P_x = -cx$, к точке по той же оси Ox приложена постоянная сила с проекцией Q, то дифференциальное уравнение колебания имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k^2x = \frac{Q}{m}. \tag{3-179}$$

Подстановка $x = x' + \frac{Q}{k^2m}$ сводит это уравнение к $\frac{d^2x'}{dt^2} + k^2x' = 0$. Следовательно, $x' = a'\sin(kt + \alpha')$, где $a'^2 = \frac{x_0'^2}{k^2} + v_0^2$, $\sin\alpha' = \frac{x_0'}{a}$, $\cos\alpha' = \frac{v_0}{ka'}$. Таким образом, от добавления постоянной силы колебания остаются гармоническими с тем же периодом $2\tau = \frac{2\pi}{k}$, но *центр колебания* смещается в точку, в которой $P + Q = 0$, т. е. в точку возможного равновесия под действием обеих сил.

§ 3-58. Затухающие колебания

Если на точку, кроме силы P с проекцией $P_x = -cx$, действует сила сопротивления, направленная против скорости и по величине ей пропорциональная, т. е. сила N с проекцией $N_x = -\lambda\frac{dx}{dt}$, и точка совершает прямолинейное движение, то дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0, \tag{3-180}$$

где k^2 определяется формулой (3-173) и

$$2n = \frac{\lambda}{m}. \tag{3-181}$$

При

$$k^2 - n^2 = \omega^2 > 0 \tag{3-182}$$

и начальных данных $t_0 = 0$, x_0, v_0 решение этого уравнения имеет вид:

$$x = be^{-nt}\sin(\omega t + \beta), \tag{3-183}$$

где

$$b = \sqrt{x_0^2 + \frac{(v_0 + nx_0)^2}{\omega^2}}, \quad \operatorname{ctg}\beta = \frac{v_0 + nx_0}{\omega x_0}. \tag{3-184}$$

Движение носит колебательный характер.

Скорость обращается в нуль в моменты t, находимые из уравнения

$$\operatorname{tg}(\omega t + \beta) = \frac{\omega}{n}. \tag{3-185}$$

Следовательно, эти моменты образуют арифметическую прогрессию с разностью

$$\tau = \frac{\pi}{\omega}, \tag{3-186}$$

а соответствующие им отклонения точки от начала, в котором сила $P = 0$, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем

$$\eta = e^{-\frac{n\pi}{\omega}}. \tag{3-187}$$

Величина $\frac{n\pi}{\omega}$ называется *логарифмическим декрементом* колебания.

§ 3-59. Колебания при наличии кулонова трения

Если на точку веса Q, кроме силы $\mathbf{P}$ с проекцией $P_x = -cx$, действует еще сила трения, направленная против скорости и имеющая постоянную величину fQ, то движение останется *колебательным* с тем же периодом $2\tau = \frac{2\pi}{k}$, как при отсутствии трения, но максимальные отклонения от начала координат, в котором сила $P = 0$, по абсолютной величине будут уменьшаться в арифметической прогрессии на величину $2\frac{fg}{k^2}$ за полупериод. Если начальное отклонение имеет абсциссу x_0, то последующие абсциссы максимальных отклонений определяются формулой

$$x_n = (-1)^n\left(x_0 - \frac{2nfg}{k^2}\right). \tag{3-188}$$

При некотором n величина $|x_n| < \frac{f_1 g}{k^2}$, где f_1 есть коэффициент трения при покое ($f_1 > f$). При этом n величина $|\mathbf{P}_n| = c|x_n| < \frac{cf_1 g}{k^2}$. Следовательно, $|\mathbf{P}_n| < f_1 Q$, а потому в этот момент t_n движение точки окончится. На этом основании отрезок длины $\frac{2f_1 g}{k^2}$ с центром в начале, где $P = 0$, называется *мертвой зоной*, а сами колебания точки называются *останавливающимися*.

§ 3-60. Движение точки по заданной гладкой кривой

Если материальная точка при помощи каких-нибудь тел удерживается на кривой, математически заданной относительно инерциальной системы отсчета, но по этой кривой может перемещаться, то сила, измеряющая действие на движущуюся точку тел, удерживающих ее на заданной кривой, называется *динамической реакцией* этой кривой. Если к точке приложена заданная сила, то основное равенство динамики при движении по заданной кривой принимает вид:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}, \tag{3-189}$$

где $\mathbf{N}$ обозначает динамическую реакцию кривой, заранее не заданную. Если по добавочным физическим условиям задачи известно, что $\mathbf{N}$ направлена нормально к заданной кривой, то эта кривая называется *динамически гладкой*. Определяя положение точки на заданной кривой длиной s дуги и проектируя векторы уравнения (3-189) на касательную

к заданной кривой, получаем дифференциальное уравнение движения точки по заданной кривой в виде:

$$m\frac{d^2s}{dt^2}=F_\tau=f\left(t,\ s,\ \frac{ds}{dt}\right), \tag{3-190}$$

где F_τ обозначает проекцию заданной силы F на касательную, ориентированную в направлении отсчета дуг. Если уравнение (3-190) проинтегрировано, то вектор N динамической реакции, лежащий в нормальной плоскости к заданной кривой, определяется для заданного момента t своими проекциями N_n и N_b на главную нормаль и бинормаль к кривой по формулам:

$$N_n=\frac{mv^2}{\rho}-F_n,\qquad N_b+F_b=0, \tag{3-191}$$

где ρ — радиус кривизны в соответствующей точке кривой, а F_n и F_b — проекции заданной силы на главную нормаль и бинормаль в той же точке кривой. Если заданная кривая — плоская и заданная сила F лежит в той же плоскости, то реакция N целиком направлена по главной нормали и определяется первой из формул (3-191).

Если кривая задана декартовыми уравнениями $f_1(x,\ y,\ z)=0$ и $f_2(x,\ y,\ z)=0$, то кинематические уравнения движения можно определять из уравнений:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_x+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}=0,\qquad m\frac{d^2y}{dt^2}=F_y+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial y},$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2}=F_z+\lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial z}, \tag{3-192}$$

которые вместе с уравнениями кривой и определяют пять неизвестных функций $x,\ y,\ z,\ \lambda_1,\ \lambda_2$ независимого переменного t.

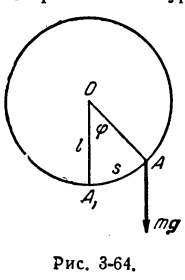


Рис. 3-64.

§ 3-61. Круговой математический маятник

Материальная точка, принужденная двигаться в вертикальной плоскости по заданной динамически гладкой окружности (рис. 3-64) при действии силы веса, называется *круговым математическим маятником*. Радиус l окружности называется *длиной кругового маятника* (рис. 3-64). Положение маятника определяется углом φ, составляемым его радиусом с нисходящей вертикалью, причем угол, отсчитанный в направлении против хода часовой стрелки, считается положительным, а отсчитанный по ходу часовой стрелки — отрицательным. Угол φ определяется из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{3-193}$$

при начальных данных $t_0=\varphi_0=0$, $l\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)=v_0$. Скорость v при этом дается формулой

$$v^2=v_0^2-4gl\sin^2\frac{\varphi}{2}. \tag{3-194}$$

При $v_0^2 > 4gl$ маятник совершает полные обороты. При $v_0^2 < 4gl$ можно найти угол γ такой, что

$$v_0^2 = 4gl \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \tag{3-195}$$

В этом случае

$$v^2 = 4gl \left(\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right) \tag{3-196}$$

и движение маятника представляет колебание по дуге $-\gamma \leqslant \varphi \leqslant \gamma$. Период размаха определяется формулой

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\gamma} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\gamma}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \tag{3-197}$$

Подстановка $\sin \frac{\gamma}{2} \sin \psi = \sin \frac{\varphi}{2}$ дает:

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \psi}}. \tag{3-198}$$

Полученный интеграл называется *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначается

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\gamma}{2} \sin^2 \psi}}, \tag{3-199}$$

так что

$$\tau = 2 \sqrt{\frac{l}{g}} K. \tag{3-200}$$

Значение K зависит от γ, так что колебания маятника не тавтохронны. Значения K можно брать из таблицы:

γ	K	γ	K
0°	1,5708	60°	1,6258
5°	1,5715	90°	1,8541
10°	1,5738	120°	2,1565
20°	1,5828	150°	2,7681
40°	1,6200	180°	∞

Приближенная формула для K при небольших значениях γ имеет вид:

$$K \approx \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \tag{3-201}$$

При весьма малых γ полагают $\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{\gamma}{2}$, и тогда

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{\gamma^2}{16}\right). \tag{3-202}$$

Если γ столь мало, что членом $\frac{\gamma^2}{16}$ можно пренебречь, то

$$\tau=\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{3-203}$$

Так как эта формула не содержит γ, то малые колебания маятника можно считать тавтохронными. Значения $1+\frac{\gamma^2}{16}$ можно брать из таблицы:

γ	$1+\gamma^2/16$	γ	$1+\gamma^2/16$
5°	1,0005	40°	1,0304
10°	1,0019	60°	1,0684
20°	1,0076	90°	1,1539

Само дифференциальное уравнение (3-143) для малых колебаний можно заменить приближенным:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0, \tag{3-204}$$

которое имеет вид уравнения гармонических колебаний (3-176) при $k^2=\frac{g}{l}$. Реакция окружности направлена по радиусу и имеет алгебраическое значение N, считая положительным направление радиуса к центру:

$$N=\frac{mv^2}{l}+mg\cos\varphi=\frac{mv_0^2}{l}-4mg\sin^2\frac{\varphi}{2}+mg\cos\varphi. \tag{3-205}$$

При $\varphi<\frac{\pi}{2}$, т. е. на нижней полуокружности, N заведомо положительно, реакция направлена к центру, и маятник можно осуществить при помощи нити, прикрепляющей движущуюся точку к центру окружности. Для того чтобы реакция окружности во всех точках была направлена к центру, должно быть $v_0^2>5gl$.

§ 3-62. Относительное движение точки по заданной подвижной гладкой кривой

Если по отношению к инерциальной системе S система отсчета S' совершает заданное переносное движение, а материальная точка движется по кривой C', связанной с системой отсчета S', и при этом возникает динамическая реакция N, нормальная к кривой C', то относительное движение точки при действии на нее заданной силы F определяется уравнением

$$m\frac{d^2s'}{dt^2}=F_\tau+\Phi_{\text{пер}\,\tau}, \tag{3-206}$$

где s' означает дугу кривой C', а F_τ и $\Phi_{\text{пер}\,\tau}$ — проекции на касательную к кривой C' заданной силы и переносной фиктивной кориолисовой силы.

Положение относительного равновесия получается из уравнения

$$F_\tau + \Phi_{\text{пер}\,\tau} = 0, \tag{3-207}$$

если оно не содержит явно времени t. Если переносное движение состоит в равномерном вращении с угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси y, заданная во вращающейся плоскости xy кривая имеет уравнение $y = f(x)$ и заданная сила — вес точки, то уравнение относительного равновесия имеет вид $\omega^2 x = gf'(x)$. При $f(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$ точка находится в относительном равновесии всюду на заданной кривой.

§ 3-63. Движение точки по заданной гладкой поверхности

Если материальная точка при помощи каких-нибудь тел удерживается на математически заданной относительно инерциальной системы отсчета поверхности (П), но по этой поверхности может перемещаться, то сила **N**, измеряющая действие на движущуюся точку тел, удерживающих ее на заданной поверхности, называется *динамической реакцией поверхности*. Если к точке приложена заданная сила **F**, то основное равенство динамики для точки, движущейся по заданной поверхности, имеет вид: $m\mathbf{w} = \mathbf{F} + \mathbf{N}$. Если известно, что реакция **N** нормальна к заданной поверхности (П), то эта поверхность называется *динамически гладкой*. Если уравнение поверхности $f(x, y, z) = 0$ и направляющие косинусы нормали определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\
\cos\beta &= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \\
\cos\gamma &= \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},
\end{aligned}\right\} \tag{3-208}$$

то дифференциальные уравнения движения точки по поверхности имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + N\cos\alpha, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + N\cos\beta, \\
m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + N\cos\gamma,
\end{aligned}\right\} \tag{3-209}$$

где N обозначает алгебраическую величину проекции реакции на направление нормали, определяемое формулами (3-208). Эти уравнения вместе с уравнением поверхности определяют четыре неизвестные

функции x, y, z, N времени t. Если найдены траектория и скорость точки, то величина N определяется формулой

$$N = \frac{mv^2}{\rho}\cos\varphi - F_n, \qquad (3\text{-}210)$$

где ρ — радиус кривизны траектории, φ — угол главной нормали с нормалью к поверхности и F_n — проекция заданной силы на нормаль к поверхности, определяемую формулой (3-208). Сила $\mathbf{Q} = -\mathbf{N}$ называется *давлением точки* на заданную поверхность. Эта сила направлена по нормали к поверхности и имеет проекцию на нормаль:

$$Q = F_n - \frac{mv^2}{\rho}\cos\varphi. \qquad (3\text{-}211)$$

Если заданная поверхность представляет собой поверхность некоторого твердого тела, то в тот момент, когда $Q = 0$, точка покинет эту поверхность.

Если заданной силы нет, т. е. точка движется по поверхности под действием только реакции $\mathbf{N}$, то говорят, что точка движется по поверхности по инерции. В этом случае, проектируя основное равенство $m\mathbf{w} = \mathbf{N}$ на касательную к траектории, получим $\frac{dv}{dt} = 0$, т. е. $v = \text{const}$, и точка движется равномерно. В этом случае $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\nu$, а потому главная нормаль к траектории совпадает с нормалью к поверхности и траектория является *геодезической линией* заданной поверхности. В случае сферы таковой будет дуга большого круга.

§ 3-64. Сферический маятник

Точка, движущаяся по поверхности гладкой сферы под действием силы веса, называется *сферическим маятником*. Движение сферического маятника длины l, равной радиусу заданной сферы, определяется (рис. 3-65) в цилиндрических координатах z, θ, φ, причем положительное направление оси z выбирается вертикально вниз. В этом случае уравнения движения сферического маятника имеют вид:

Рис. 3-65.

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin^2\theta = a, \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\sin^2\theta - \frac{2g}{l}\cos\theta = 2h,$$

$$l^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = F(z), \qquad (3\text{-}212)$$

где a и h — постоянные, определяемые по начальным данным θ_0, $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$, а

$$F(z) = 2(l^2 - z^2)(hl^2 + gz) - a^2l^4. \qquad (3\text{-}213)$$

Уравнение $F(z) = 0$ имеет три действительных корня α, β, γ, лежащих в интервалах: $-\infty < \gamma < -l$, $0 < \beta < z_0$, $z_0 < \alpha < l$, где z_0 — начальное значение z. При этом в интервале $\beta \leqslant z \leqslant \alpha$ величина $F(z) \geqslant 0$, а потому движение точки происходит в зоне сферы между параллельными кругами $\theta_1 = \arccos\frac{\beta}{l}$ и $\theta_2 = \arccos\frac{\alpha}{l}$, называемыми *предельными*.

Если $\alpha = \beta$, то предельные круги сливаются и движение точки происходит равномерно по окружности в горизонтальной плоскости, и сама точка называется *коническим маятником*. Осуществить конический маятник можно при помощи тяжелого шарика, подвешенного на нити, если нить отклонить от вертикали на угол θ_0 и сообщить шарику скорость V_0, перпендикулярную к плоскости, проведенной через вертикаль и нить, и равную по величине $v_0 = \sin\theta_0 \sqrt{\frac{gl}{\cos\theta_0}}$.

Глава 3-7

ОБЩАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ

§ 3-65. Механическая система и ее внутренние силы

Совокупность материальных частиц, составляющих одно или несколько тел, или мысленно выделенных, и взаимодействующих друг с другом по закону равенства действия и противодействия, называется *механической системой*. Закон равенства действия и противодействия состоит в том, что силы, измеряющие взаимодействие двух частиц механической системы, направлены по одной прямой в противоположные стороны и равны по величине. Если силу воздействия на частицу A_α системы со стороны частицы A_β той же системы обозначить $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$, а силу воздействия на частицу A_β со стороны частицы A_α — через $\mathbf{F}_{\beta\alpha}$, то $\mathbf{F}_{\alpha\beta} + \mathbf{F}_{\beta\alpha} = 0$. Отсюда следует, что сумма векторов всех внутренних сил системы, т. е. сил, с которыми ее точки взаимодействуют друг с другом, всегда равна нулю:

$$\sum_{\alpha,\ \beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0. \tag{3-214}$$

Точно так же, построив векторы моментов $\mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{\alpha\beta})$ внутренних сил около любого общего центра O, получим, что геометрическая сумма этих векторов моментов равна нулю:

$$\sum_{\alpha,\ \beta} \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_{\alpha\beta}) = 0. \tag{3-215}$$

§ 3-66. Центр инерции

Сумма масс материальных частиц механической системы называется *массой системы*:

$$\sum_{\alpha} m_\alpha = m. \tag{3-216}$$

Через вес P системы, равный сумме весов частиц, составляющих эту систему,

$$P = \sum_{\alpha} P_\alpha, \tag{3-217}$$

масса системы выражается формулой

$$m = \frac{P}{g}. \tag{3-218}$$

Физический смысл массы тела состоит в том, что она при поступательном движении тела представляет меру его инерции. Сумма произведений радиусов-векторов частиц системы относительно общего начала O на массы этих частиц называется *вектором статического момента системы* относительно данного центра O:

$$\mathbf{s}_O = \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha. \tag{3-219}$$

Точка C, определяемая по отношению к какому-нибудь началу O радиусом-вектором $\mathbf{r}_C$, равным отношению статического момента системы относительно того же центра к массе системы, так что

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}_\alpha}{m}, \tag{3-220}$$

называется *центром инерции системы*, или *центром масс точек*. Положение центра инерции вполне определяется конфигурацией, составленной частицами системы, не зависит от выбора центра O. По отношению к осям xyz центр инерции определяется через координаты x_α, y_α, z_α точек системы формулами:

$$x_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha}{m}, \quad y_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha}{m}, \quad z_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha}{m}. \tag{3-221}$$

В случае твердого тела его центр инерции совпадает с центром тяжести, а потому и для любой системы ее центр инерции называется условно ее *центром тяжести*.

При движении системы относительно системы отсчета S, на которой взят центр O, раднус-вектор $\mathbf{r}_C$ является переменным, и его конец описывает кривую, называемую *годографом радиуса-вектора*. Геометрически производная $\frac{d\mathbf{r}_C}{dt}$ выражается формулой

$$\frac{d\mathbf{r}_C}{dt} = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}}{m}. \tag{3-222}$$

Эта пронзводная называется *вектором* $\mathbf{V}_C$ *скорости центра инерции* и может рассматриваться как скорость воображаемой точки, движущейся по годографу вектора. Эту скорость через скорости $\mathbf{V}_\alpha$ точек системы можно представить формулой

$$\mathbf{V}_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{V}_\alpha}{m}. \tag{3-223}$$

Производная $\frac{d\mathbf{V}_C}{dt}$ называется *вектором ускорения* центра инерции C; ее можно рассматривать как вектор ускорения $\mathbf{w}_C$ воображаемой точки, движущейся по годографу вектора $\mathbf{r}_C$ со скоростью $\mathbf{V}_C$, и выражать формулой

$$\mathbf{w}_C = \frac{\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{w}_\alpha}{m}, \tag{3-224}$$

где $\mathbf{w}_\alpha$ обозначают ускорения точек системы.

§ 3-67. Теорема о движении центра инерции

Основное равенство динамики для точек A_α системы принимает вид: $m_\alpha \mathbf{w}_\alpha = \mathbf{P}_\alpha^{(e)} + \sum_\beta \mathbf{F}_{\alpha\beta}$, где $\mathbf{P}_\alpha^{(e)}$ обозначает внешнюю силу, приложенную к этой точке. Суммируя эти равенства по всем точкам системы и принимая во внимание формулы (3-224) и (3-214), получим равенство

$$m\mathbf{w}_C = \sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(e)}, \tag{3-225}$$

называемое *уравнением движения центра инерции системы*. Оно показывает, что центр инерции системы кинематически движется так же, как двигалась бы динамически воображаемая изолированная материальная точка, масса которой равна массе системы и к которой приложена сила, имеющая вектор, равный сумме векторов всех внешних сил, приложенных к точкам системы. Следовательно, внутренние силы никакого влияния на движение центра инерции системы не оказывают. В частности, при отсутствии внешних сил или в случае, когда $\sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(e)} = 0$, имеет место $\mathbf{w}_C = 0$, т. е. центр инерции системы движется относительно инерциальной системы S отсчета прямолинейно и равномерно, а потому, приняв его за начало поступательно движущейся относительной системы S' отсчета, получим новую инерциальную систему отсчета. Такой случай имеет место с большой точностью для солнечной системы, если оси подвижной системы S' направить к трем звездам.

§ 3-68. Количество движения

Количеством движения материальной частицы массы m, движущейся со скоростью $\mathbf{V}$, называется вектор $\mathbf{q}$, равный произведению массы частицы на вектор скорости:

$$\mathbf{q} = m\mathbf{V}. \tag{3-226}$$

Модуль вектора количества движения измеряется единицей:

$$[\mathbf{q}] = кгс \cdot сек. \tag{3-227}$$

Его проекции на ось системы отсчета выражаются формулами:

$$q_x = m\frac{dx}{dt}, \quad q_y = m\frac{dy}{dt}, \quad q_z = m\frac{dz}{dt}. \tag{3-228}$$

С вектором **P** равнодействующей сил, приложенных к движущейся точке, вектор **q** количества движения связан уравнением

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{P}. \tag{3-229}$$

Если вектор **P** рассматривается как переменный, зависящий от времени, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$, то для вычисления изменения количества движения в течение промежутка времени (t_A, t_B) этот промежуток разбивают на бесконечно малые части Δt_k, вставляя между моментами t_A и t_B промежуточные моменты $t_A = t_1 < t_2 < t_3 < \ldots < t_n < t_{n+1} = t_B$, и находят предел суммы: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{P}(t_k)\,\Delta t_k$. Этот предел называется *геометрическим интегралом* от вектора $\mathbf{P}(t)$, или *импульсом силы* **P**, за промежуток времени (t_A, t_B) и обозначается символом

$$\int_{t_A}^{t_B} \mathbf{P}(t)\,dt = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(t_k)\,\Delta t_k. \tag{3-230}$$

Подынтегральный вектор $\mathbf{P}(t)\,dt$ называется *элементарным импульсом* значения силы **P** в данный момент t. Импульс силы за данный промежуток времени представляет собой свободный вектор, модуль которого выражается, как и модуль количества движения, в *кгс · сек*. Элементарный импульс имеет направление, коллинеарное с направлением силы **P** в данный момент t. Формула *изменения количества движения* точки имеет вид:

$$m\mathbf{V}(t_B) - m\mathbf{V}(t_A) = \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{P}(t)\,dt, \tag{3-231}$$

а в проекциях на оси системы отсчета:

$$\left.\begin{aligned} mV_x(t_B) - mV_x(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_x(t)\,dt; \\ mV_y(t_B) - mV_y(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_y(t)\,dt; \\ mV_z(t_B) - mV_z(t_A) &= \int_{t_A}^{t_B} P_z(t)\,dt. \end{aligned}\right\} \tag{3-232}$$

Количеством движения системы называется свободный вектор **Q**, равный сумме векторов **q** количеств движения всех точек системы в данный момент:

$$\mathbf{Q} = \sum_{\alpha} \mathbf{q}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{V}_{\alpha}. \tag{3-233}$$

Этот вектор **Q** можно рассматривать как количество движения воображаемой точки с массой m, равной сумме масс точек системы и движущейся со скоростью $\mathbf{V}_C$ центра инерции системы. Физически вектор **Q** представляет собой меру механического движения, характеризующую способность передаваться последнего от одних материальных частиц другим в форме механического же движения. С силами, приложенными к точкам системы, количество движения этой системы связано уравнением

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}, \tag{3-234}$$

а изменение количества движения за данный промежуток (t_A, t_B) времени выражается формулой

$$\mathbf{Q}(t_B) - \mathbf{Q}(t_A) = \sum_{\alpha} \int_{t_A}^{t_B} \mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}(t)\, dt = \int_{t_A}^{t_B} \sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}\, dt. \tag{3-235}$$

Следовательно, внутренние силы не оказывают влияния на изменение количества движения системы. В случае

$$\sum_{\alpha} \mathbf{P}_{\alpha}^{(e)} = 0 \tag{3-236}$$

для всех моментов времени имеем: $\mathbf{Q} = \text{const}$, т. е. количество движения такой системы остается неизменным.

§ 3-69. Уравнение Мещерского для поступательного движения ракеты

Масса ракеты, равная сумме масс ее корпуса и заключенного в ней в данный момент горючего, является функцией времени $m(t)$. Если скорость истечения газов, образующихся при сгорании горючего, по отношению к корпусу ракеты есть **c**, то скорость поступательного движения ракеты определяется из уравнения

$$m(t)\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{P}^{(e)} + \frac{dm}{dt}\mathbf{c}, \tag{3-237}$$

где $\mathbf{P}^{(e)}$ есть сумма векторов внешних сил, приложенных к ракете. Вектор

$$\mathbf{R} = \frac{dm}{dt}\mathbf{c} \tag{3-238}$$

направлен противоположно вектору $\mathbf{c}$, так как $\frac{dm}{dt} < 0$, и называется *реактивной силой* ракетного снаряда. При отсутствии внешних сил, при прямолинейном движении ракеты и при постоянной скорости c истечения горючего скорость ракеты, при начальных данных $t_0 = v_0 = 0$, в момент t определяется формулой

$$V(t) = c \ln \frac{m_0}{m(t)},$$

где m_0 обозначает начальную массу, т. е. $m_0 = m(0)$.

§ 3-70. Момент количества движения

Векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ движущейся точки на вектор ее количества движения называется *вектором момента количества движения около начала радиуса-вектора* точки:

$$\mathbf{r} \times \mathbf{q} = \mathbf{l}_0. \tag{3-239}$$

Вектор момента количества движения измеряется единицами: $[l] = кгс \cdot м \cdot сек$. Аналитически в осях xyz вектор момента количества движения выражается формулой

$$\mathbf{l}_0 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ m\frac{dx}{dt} & m\frac{dy}{dt} & m\frac{dz}{dt} \end{vmatrix}. \tag{3-240}$$

Проекции l_x, l_y, l_z вектора момента количества движения называются *осевыми моментами* количества движения и выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} l_x &= \begin{vmatrix} y & z \\ m\frac{dy}{dt} & m\frac{dz}{dt} \end{vmatrix} = m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right), \\ l_y &= \begin{vmatrix} z & x \\ m\frac{dz}{dt} & m\frac{dx}{dt} \end{vmatrix} = m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right), \\ l_z &= \begin{vmatrix} x & y \\ m\frac{dx}{dt} & m\frac{dy}{dt} \end{vmatrix} = m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3-241}$$

Эти проекции можно записать в виде:

$$l_x = 2m\frac{dS_x}{dt}, \quad l_y = 2m\frac{dS_y}{dt}, \quad l_z = 2m\frac{dS_z}{dt}, \tag{3-242}$$

где $\frac{dS_x}{dt}$, $\frac{dS_y}{dt}$, $\frac{dS_z}{dt}$ обозначают *секторные скорости* относительно

начала O проекций движущейся точки соответственно на координатные плоскости yz, zx, xy.

С вектором $\mathbf{P}$ равнодействующей сил, приложенных к движущейся точке, ее момент количества движения около начала инерциальной системы отсчета связан формулой

$$\frac{d\mathbf{l}_0}{dt} = \mathbf{M}_O(\mathbf{P}). \tag{3-243}$$

В проекциях на оси xyz эта формула дает:

$$\frac{dl_x}{dt} = M_{Ox}(\mathbf{P}),\ \frac{dl_y}{dt} = M_{Oy}(\mathbf{P}),\ \frac{dl_z}{dt} = M_{Oz}(\mathbf{P}). \tag{3-244}$$

В случае центральной силы $M_O(\mathbf{P}) = 0$, а потому $\mathbf{l}_O = \text{const}$. Траектория точки в этом случае лежит в плоскости, перпендикулярной к постоянному вектору $\mathbf{l}_O$, и движение в этой плоскости происходит по формуле Бине (§ 3-52).

§ 3-71. Кинетический момент системы

Кинетическим моментом $\mathbf{L}_O$ механической системы около начала O системы отсчета называется геометрическая сумма векторов моментов около того же начала количеств движения всех точек системы:

$$\mathbf{L}_O = \sum_{\alpha} \mathbf{l}_\alpha = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{q}_\alpha). \tag{3-245}$$

Проекции вектора $\mathbf{L}_O$ на оси xyz называются *осевыми кинетическими моментами* и определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= \sum_{\alpha} m_\alpha \left(y_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} - z_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt}\right), \\ L_y &= \sum_{\alpha} m_\alpha \left(z_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt} - x_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}\right), \\ L_z &= \sum_{\alpha} m_\alpha \left(x_\alpha \frac{dy_\alpha}{dt} - y_\alpha \frac{dx_\alpha}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3-246}$$

Если, кроме инерциальной системы отсчета S, ввести еще подвижную систему S', начало O' которой совпадает с центром C инерции механической системы и которая движется по отношению к инерциальной системе S поступательно, то кинетический момент $\mathbf{L}_O$ в абсолютном движении будет связан с кинетическим моментом $\mathbf{L}'_C$ в относительном движении формулой

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}'_C + \mathbf{r}_C \times m\mathbf{V}_C, \tag{3-247}$$

где $\mathbf{L}'_C = \sum_{\alpha} (\mathbf{r}'_\alpha \times m_\alpha \mathbf{V}'_\alpha)$.

С силами, приложенными к точке системы, кинетический момент $\mathbf{L}_O$ около начала инерциальной системы связан формулой

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \tag{3-248}$$

т. е. внутренние силы никакого влияния на изменение абсолютного кинетического момента не оказывают.

Если производную $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$ рассматривать как скорость точки K, лежащей на конце вектора $\mathbf{L}_O$, то, отвлекаясь от размерности этой скорости, формулу (3-248) можно написать в виде:

$$\mathbf{V}_K = \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \tag{3-249}$$

и в этом виде она выражает *правило Резаля*: скорость конца вектора кинетического момента около начала инерциальной системы равна сумме векторов моментов около того же центра внешних сил, приложенных к точкам системы. Для кинетического момента $\mathbf{L}'_C$ в относительном движении системы около ее центра инерции, т. е. в движении относительно системы S' отсчета, начало которой совпадает с центром C инерции и которая движется поступательно по отношению к инерциальной системе, имеет место формула

$$\frac{d\mathbf{L}'_C}{dt} = \sum_\alpha \mathbf{M}_C(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \tag{3-250}$$

т. е. теорема о кинетическом моменте в этом относительном движении имеет тот же вид, как в абсолютном. В осях xyz или $x'y'z'$ формулы (3-248) и (3-250) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt} = \sum_\alpha M_{Ox}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_\alpha M_{Oy}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \\ \frac{dL_z}{dt} = \sum_\alpha M_{Oz}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \end{aligned}\right\} \tag{3-251}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL'_{x'}}{dt} = \sum_\alpha M_{Cx'}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \quad \frac{dL'_{y'}}{dt} = \sum_\alpha M_{Cy'}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \\ \frac{dL'_{z'}}{dt} = \sum_\alpha M_{Cz'}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}). \end{aligned}\right\} \tag{3-252}$$

Если сумма моментов внешних сил около какой-нибудь оси системы S или системы S' остается постоянно равной нулю, например

$\sum_\alpha M_{Ox}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = 0$ или $\sum_\alpha M_{Cx'}(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = 0$, то соответственно $L_x =$ $= \text{const}$, $L'_{x'} = \text{const}$ или $\sum_\alpha m_\alpha \frac{dS_{\alpha x}}{dt} = \text{const}$ и $\sum_\alpha m_\alpha \frac{dS'_{\alpha x'}}{dt} = \text{const}$,

т. е. остается постоянной сумма произведений масс на секторные скорости их проекций на плоскость, перпендикулярную к той оси, около которой равна нулю сумма моментов внешних сил. Если $\sum_\alpha M_O(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = 0$ или $\sum_\alpha M_C(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = 0$, то указанное свойство имеет место для любой плоскости, проходящей через O или C. В этом случае $\mathbf{L}_O = \text{const}$ или $\mathbf{L}'_C = \text{const}$. Следовательно, плоскости (П) или (П'), перпендикулярные к векторам $\mathbf{L}_O$ или $\mathbf{L}'_C$, сохраняют в пространстве постоянное направление. Сумма произведений масс точек системы на секторные скорости (относительно начала O или C) проекций этих точек на плоскости Π_O или Π_C, проходящие через точки O или C, имеет наибольшую постоянную величину, если плоскости перпендикулярны соответственно к $\mathbf{L}_O$ или $\mathbf{L}'_C$.

§ 3-72. Элементарная работа силы

Скалярное произведение вектора какой-нибудь силы $\mathbf{F}$, приложенной к движущейся точке, на вектор скорости $\mathbf{V}$ этой точки, умноженное на элемент dt времени, называется *элементарной работой* значения силы $\mathbf{F}$ в данный момент времени:

$$dA = (\mathbf{F}, \mathbf{V})\, dt. \tag{3-253}$$

Элементарная работа представляет собой алгебраическое именованное число, измеряемое единицами $[A] = кгс \cdot м$. Через проекции силы $\mathbf{F}$ на оси системы отсчета, относительно которой взята скорость $\mathbf{V}$, элементарная работа выражается формулой

$$dA = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz, \tag{3-254}$$

где дифференциалы координат вычислены для того же значения дифференциала dt времени, как и сама элементарная работа.

Через дифференциал ds дуги траектории и угол α, составленный вектором $\mathbf{F}$ силы с касательной, ориентированной в направлении отсчета дуг, элементарная работа выражается формулой

$$dA = |\mathbf{F}| \cos\alpha\, ds = F_\tau\, ds, \tag{3-255}$$

где F_τ есть проекция силы на ориентированную указанным образом касательную. Если сила есть равнодействующая сил $\mathbf{F}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, приложенных к той же точке, то

$$dA(\mathbf{F}) = \sum_{k=1}^{n} dA(\mathbf{F}_k), \tag{3-256}$$

т. е. элементарная работа равнодействующей равна сумме элементарных работ составляющих.

§ 3-73. Силовое поле

Если снла **F** является позициониой, т. е. определяется только положением точки, то по формуле (3-255) элементариую работу можно вычислять независимо от процесса движения, по произвольно заданиому перемещению ds точки из того положения, для которого взято значенне силы **F**. Если часть пространства вследствие действия некоторых тел находится в таком состоянии, что в каждой ее точке возникает прнложенная к материальной частице, помещенной в этой точке, сила, зависящая только от положения этой точки и момента времени, но не от ее скорости, то эта часть пространства называется *силовым полем*. Силовое поле, силы которого не зависят от времени, называется *стационарным*.

Для стационарного поля проекции F_x, F_y, F_z силы поля являются функциями только координат x, y, z точки приложеиия и формула (3-255) элементарной работы получает вид:

$$dA = X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz, \qquad (3\text{-}257)$$

где $X = F_x$, $Y = F_y$, $Z = F_z$.

В тех случаях, когда правая часть формул (3-257) математически является полиым дифференциалом некоторой функции $U(x, y, z)$ координат, т. е.

$$X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz = dU(x, y, z), \qquad (3\text{-}258)$$

силовое поле называется *потенциальным*, а функция $U(x, y, z)$ — *силовой функцией*. В случае потенциального поля проекции F_x, F_y, F_z силы выражаются через силовую функцию формулами:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (3\text{-}259)$$

Математическим признаком того, что снловое поле является потенциальным, служит выполиение равенств:

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y}, \qquad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial z}, \qquad \frac{\partial X}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial x}. \qquad (3\text{-}260)$$

Примерами потенциальных снловых полей служат:

1) *Поле силы тяжести.* Если ось z направить вертнкально вверх, то $X = Y = 0$; $Z = -P$; $dA = -Pdz = d(-Pz)$, т. е. для силы тяжести силовая функция выражается в указанных осях формулой

$$U = -Pz. \qquad (3\text{-}261)$$

2) *Поле центральной силы*, величина которой зависит только от расстояния точки приложения до центра силы. Если проекция P_r силы на радиус-вектор **r** выражается формулой

$$P_r = f(r), \qquad (3\text{-}262)$$

то

$$X = f(r)\frac{x}{r}, \qquad Y = f(r)\frac{y}{r}, \qquad Z = f(r)\frac{z}{r}, \qquad (3\text{-}263)$$

$$dA = \frac{f(r)}{r}(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = f(r)\,dr, \qquad (3\text{-}264)$$

$$U = \int f(r)\,dr. \qquad (3\text{-}265)$$

Для упругой силы $f(r) = -cr$ и потому

$$U = -\frac{cr^2}{2}. \tag{3-266}$$

Для силы *ньютонова притяжения* $f(r) = -\frac{\mu}{r}$, где μ — постоянный коэффициент, и

$$U = \frac{\mu}{r}. \tag{3-267}$$

§ 3-74. Кинетическая энергия точки

Кинетической энергией частицы массы m, движущейся со скоростью v, называется половина произведения величины массы на квадрат величины скорости:

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{3-268}$$

Кинетическая энергия измеряется положительным числом с размерностью $[T] = кгс \cdot м$, т. е. в тех же единицах, что и величины момента силы и элементарной работы.

Если в процессе движения точки относительно инерциальной системы ее кинетическую энергию рассматривать как функцию времени, то она связана с равнодействующей **P** сил, приложенных к точке, формулой

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = dA(\mathbf{P}) = (\mathbf{P}, \mathbf{V})\,dt, \tag{3-269}$$

т. е. дифференциал кинетической энергии равен элементарной работе равнодействующей сил, приложенных к точке. Отсюда изменение кинетической энергии за данный промежуток (t_1, t_2) времени выражается формулой

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{P}, \mathbf{V})\,dt. \tag{3-270}$$

Скалярное произведение вектора силы на вектор скорости точки приложения называется *мощностью* этой силы:

$$(\mathbf{P}, \mathbf{V}) = N(\mathbf{P}). \tag{3-271}$$

Мощность измеряется алгебраическим числом с размерностью $[N] = \frac{кгс \cdot м}{сек}$. Практической единицей мощности служит

$$75\,\frac{кгс \cdot м}{сек} = 1\ л.\ с., \tag{3-272}$$

называемая *лошадиной силой*. Интеграл по времени от мощности силы **P** называется *полной работой* этой силы за промежуток времени между пределами t_1 и t_2:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{P}, \mathbf{V})\,dt = A_{t_1}^{t_2}(\mathbf{P}). \tag{3-273}$$

Равенство (3-270) записывается формулой

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{t_1}^{t_2}(\mathbf{P}), \tag{3-274}$$

т. е. изменение кинетической энергии точки за данный промежуток времени равно полной работе за тот же промежуток равнодействующей сил, приложенных к этой точке. В случае силового поля полную работу за промежуток времени (t_1, t_2), в течение которого точка по некоторой траектории перешла из положения M_1 в положение M_2, можно представить криволинейным интегралом

$$A_{t_1}^{t_2}(\mathbf{P}) = \int\limits_{\smile M_1M_2} X(x, y, z)\,dx + Y(x, y, z)\,dy + Z(x, y, z)\,dz \tag{3-275}$$

или интегралом по дуге M_1M_2

$$A_{t_1}^{t_2}(\mathbf{P}) = \int\limits_{s_1}^{s_2} P(s)\cos\alpha(s)\,ds, \tag{3-276}$$

если величину силы P и ее угол α с касательной к траектории выразить через значение дуги. Интеграл в формуле (3-276) называется *полной работой силы поля* на данной дуге M_1M_2:

$$A_{M_1}^{M_2}(\mathbf{P}) = \int\limits_{s_1}^{s_2} P(s)\cos\alpha(s)\,ds. \tag{3-277}$$

Формула изменения кинетической энергии точки при движении в силовом поле имеет вид:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{M_1}^{M_2}(\mathbf{P}). \tag{3-278}$$

Если поле потенциально и имеет силовую функцию $U(x, y, z)$, то

$$\int\limits_{M_1M_2} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{M_1M_2} dU =$$
$$= U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1) \tag{3-279}$$

и полная работа силы **P** потенциального поля при перемещении точки из положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в положение $M_2(x_2, y_2, z_2)$ выражается формулой

$$A_{M_1}^{M_2}(\mathbf{P}) = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1), \tag{3-280}$$

т. е. эта работа равна разности значений силовой функции в конечном и начальном положениях точки. Формула изменения кинетической энергии точки при движении под действием силы потенциального поля имеет вид:

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1). \tag{3-281}$$

Функция координат, отличающаяся от силовой функции знаком, т. е. функция

$$\Pi(x, y, z) = -U(x, y, z), \tag{3-282}$$

называется *потенциальной*, а ее значение — *потенциальной энергией точки* в данном месте поля. Формула (3-281) дает равенство

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(x, y, z) = h, \tag{3-283}$$

где величина h остается постоянной в течение всего движения. Сумма кинетической и потенциальной энергий точки называется ее *механической энергией*:

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi = E. \tag{3-284}$$

Равенство

$$E = h \tag{3-285}$$

выражает *закон сохранения механической энергии* точки при ее движении под действием силы потенциального поля. Поверхности, определяемые в потенциальном поле уравнением

$$\Pi(x, y, z) = C, \tag{3-286}$$

при различных значениях постоянной C, называются *эквипотенциальными*, или *поверхностями уровня*. Через каждую точку поля проходит только одна поверхность уровня, определяемая уравнением

$$\Pi(x, y, z) = \Pi(x_1, y_1, z_1) = C_1. \tag{3-287}$$

Вектор силы потенциального поля в данной точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$ направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку, и притом в ту сторону, куда потенциальная энергия убывает. Для силы тяжести поверхностями уровня служат горизонтальные плоскости. При вертикальной, направленной вверх оси Oz потенциальная энергия в поле силы веса $\mathbf{P}$ выражается формулой

$$\Pi(x, y, z) = Pz. \tag{3-288}$$

При упругой силе $\mathbf{P} = -c\mathbf{r}$

$$\Pi(x, y, z) = \frac{c(x^2 + y^2 + z^2)}{2} = \frac{cr^2}{2}, \tag{3-289}$$

и поверхностями уровня служат концентрические сферы с центром в центре упругой силы.

§ 3-75. Кинетическая энергия системы

Сумма кинетических энергий точек материальной системы называется *кинетической энергией системы*:

$$\sum_{\alpha} \frac{m_\alpha v_\alpha}{2} = T. \tag{3-290}$$

Физический смысл кинетической энергии состоит в том, что она характеризует способность механического движения превращаться в эквивалентное количество другого вида движения, например в тепло. При вычислении кинетической энергии движение системы можно разложить на переносное поступательное осей с началом в центре инерции

системы и на относительное по отношению к этим осям. Тогда кинетическая энергия T по отношению к абсолютным осям выражается через кинетическую энергию T' относительно движения *формулой Кёнига*:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + T', \tag{3-291}$$

где m — масса системы, а v_C — абсолютная скорость ее центра инерции. С силами $\mathbf{P}_\alpha$, приложенными к точкам системы ее, кинетическая энергия в процессе движения связана формулой

$$dT = \sum_\alpha dA\,(\mathbf{P}_\alpha), \tag{3-292}$$

т. е. дифференциал кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ *всех* сил, прнложенных к точкам системы. Силы $\mathbf{P}_\alpha$, приложенные к точкам системы, делятся нли на *внешние* $\mathbf{P}_\alpha^{(e)}$ и *внутренние* $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$, или на заданные $\mathbf{F}_\alpha$, определяемые кинематическим состоянием движения точек системы, и на реакции $\mathbf{R}_\alpha$, возникающие от действия тел на точки системы, осуществляющих наложенные на систему геометрическне и кинематические ограничения, иазываемые *связями*. Соответственно такому делению снл формула (3-292) применяется или в виде:

$$dT = \sum_\alpha dA\,(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) + \sum_{\alpha,\,\beta} dA\,(\mathbf{F}_{\alpha\beta}), \tag{3-293}$$

или в виде:

$$dT = \sum_\alpha dA\,(\mathbf{F}_\alpha) + \sum_\alpha dA\,(\mathbf{R}_\alpha). \tag{3-294}$$

Если по физическим свойствам связей оказывается, что сумма элементарных работ их реакций прн движенни системы все время остается равной нулю, то связи называются *совершенными*. В случае совершенных связей формула (3-294) принимает вид:

$$dT = \sum_\alpha dA\,(\mathbf{F}_\alpha). \tag{3-295}$$

Главнейшими примерами совершенных связей, наложенных на твердые тела, составляющие данную систему, являются: закрепление одной или двух точек тела, соединение тел шарниром, соединение тел гибкими нерастяжимыми нитями, скольженне тел по абсолютно гладким неподвижным твердым поверхностям, качение тел без скольжения по неподвижным поверхностям, взаимное скольженне тел друг по другу абсолютно гладкими поверхностями, взаимное качение одного тела по другому без скольжения.

Кинетическая энергия T' относительного движения системы, по отношению к поступательно движущимся осям с началом в центре инерции, связана с силами, прнложенными к точкам системы, формулой, аналогичной формуле (3-292):

$$dT' = \sum_\alpha dA'\,(\mathbf{P}_\alpha), \tag{3-296}$$

где $dA'(\mathbf{P}_\alpha)$ обозначают элементарную работу силы $\mathbf{P}_\alpha$ на относительной скорости $\mathbf{V}'_\alpha$, т. е.

$$dA'(\mathbf{P}_\alpha) = (\mathbf{P}_\alpha,\ \mathbf{V}'_\alpha)\,dt. \tag{3-297}$$

Если силы $\mathbf{P}_\alpha$ позиционные, т. е. зависят только от положения точек системы, то сумма их элементарных работ выражается формулой

$$\sum_\alpha dA(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_\alpha (X_\alpha dx_\alpha + Y_\alpha dy_\alpha + Z_\alpha dz_\alpha), \tag{3-298}$$

где функции X_α, Y_α, Z_α зависят, вообще, от координат всех точек системы. Если окажется, что правая часть формулы (3-298) есть полный дифференциал некоторой функции U от координат точек системы, то

$$\sum_\alpha dA(\mathbf{P}_\alpha) = dU. \tag{3-299}$$

Эта функция U называется *силовой*, а фуикция $\Pi = -U$ — *потенциальной функцией системы*. Физически функция Π представляет собой энергию, приобретаемую материальной системой при ее перемещении в потенциальном поле и выражающуюся работой сил поля при перемещении этой системы из конечиого положения в начальное.

Через силовую функцию U или потенциальную Π проекции силы $\mathbf{P}_\alpha$ на оси основной системы отсчета выражаются формулами:

$$X_\alpha = \frac{\partial U}{\partial x_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_\alpha},\quad Y_\alpha = \frac{\partial U}{\partial y_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_\alpha},\quad Z_\alpha = \frac{\partial U}{\partial z_\alpha} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_\alpha}.$$

В случае существования силовой фуикции формула (3-292) принимает вид:

$$dT = dU = -d\Pi. \tag{3-300}$$

Отсюда следует, что при движении системы под действием сил, имеющих силовую функцню, в течение всего движения сохраняется равенство

$$T - U = T + \Pi = h, \tag{3-301}$$

где h обозначает постояиную величину. Сумма $T + \Pi = E$ кинетической и потенциальной энергий называется *механической энергией системы*, и уравиение (3-301) выражает *закон сохранения механической энергии системы* при ее движении под действнем снл, имеющих силовую фуикцию.

§ 3-76. Консервативные системы

Механическая система иазывается *консервативной*, если ее внутренние силы $\mathbf{F}_{\alpha\beta}$ имеют силовую функцию U_i, т. е. если

$$\sum_{\alpha,\ \beta} dA(\mathbf{F}_{\alpha\beta}) = dU_i.$$

Функция

$$\Pi_i = -U_i + \text{const} \tag{3-302}$$

называется *потенциальной энергией консервативной системы*. Так как в ее определение входит произвольное постояиное слагаемое, то можио считать, что при определенной конфигурации (C_0) точек системы ее потенциальная энергия $\Pi_{i0} = 0$. Тогда аначенне потенциальной энер-

гии системы при произвольной конфигурации (C) ее точек равно сумме работ внутренних сил при переходе системы из взятой конфигурации (C) в конфигурацию (C_0), при которой потенциальная энергия равна нулю. Если среди всевозможных конфигураций системы есть такая, при которой потенциальная энергия оказывается минимальной, то эту конфигурацию и принимают за ту, когда потенциальная энергия равна нулю. При таком выборе конфигурации (C_0) потенциальная энергия Π_i оказывается всегда положительной. Сумма кинетической энергии T и потенциальной Π_i называется *полной механической энергией консервативной системы:*

$$T + \Pi_i = E. \tag{3-303}$$

Полная механическая энергия консервативной системы в данный момент равна по абсолютной величине и противоположна по знаку сумме работ внешних сил, которые следует приложить к точкам системы, чтобы она перешла из данного состояния в такое, при котором полная энергия обращается в нуль. Это конечное состояние физически будет представлять собой покой при такой конфигурации (C_0) точек системы, когда потенциальная энергия Π_i обращается в нуль.

Глава 3-8

ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3-77. Моменты инерции массы тела

Моментом инерции массы тела относительно *плоскости* (П) называется сумма произведений масс m_α частиц тела на квадраты их расстояний l_α до данной плоскости:

$$I_{(\Pi)} = \sum_\alpha m_\alpha l_\alpha^2. \tag{3-304}$$

Моментом инерции массы тела относительно *оси LL* называется сумма произведений масс m_α частиц тела на квадраты их расстояний ρ_α до данной оси:

$$I_{LL} = \sum_\alpha m_\alpha \rho_\alpha^2. \tag{3-305}$$

Моментом инерции массы тела относительно *точки O* называется сумма произведений масс m_α точек тела на квадраты их расстояний r_α от данной точки:

$$I_O = \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha^2. \tag{3-306}$$

Моменты инерции измеряются положительными числами с размерностью

$$[I] = кгс \cdot м \cdot сек^2. \tag{3-307}$$

Обыкновенно момент инерции выражается в виде произведения массы m тела на квадрат некоторой длины k, называемой *радиусом инерции* тела относительно плоскости, оси или центра, так что

$$I = mk^2. \tag{3-308}$$

Если точку O принять за начало прямоугольных осей xyz, то получим формулы:

$$\left.\begin{gathered} I_{(yOz)}=\sum_\alpha m_\alpha x_\alpha^2,\quad I_{(zOx)}=\sum_\alpha m_\alpha y_\alpha^2,\quad I_{(xOy)}=\sum_\alpha m_\alpha z_\alpha^2, \\ I_{xx}=\sum_\alpha m_\alpha (y_\alpha^2+z_\alpha^2),\quad I_{yy}=\sum_\alpha m_\alpha (z_\alpha^2+x_\alpha^2), \\ I_{zz}=\sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2+y_\alpha^2), \\ I_O=\sum_\alpha m_\alpha (x_\alpha^2+y_\alpha^2+z_\alpha^2). \end{gathered}\right\} \quad (3\text{-}309)$$

Если тело рассматривается как сплошное, заполняющее объем V с плотностью δ, то формулы (3-309) заменяются следующими:

$$\left.\begin{gathered} I_{(yOz)}=\iiint\limits_{(V)} \delta x^2\,dxdydz,\quad I_{(zOx)}=\iiint\limits_{(V)} \delta y^2\,dxdydz, \\ I_{(xOy)}=\iiint\limits_{(V)} \delta z^2\,dxdydz, \\ I_{xx}=\iiint\limits_{(V)} \delta (y^2+z^2)\,dxdydz,\quad I_{yy}=\iiint\limits_{(V)} \delta (z^2+x^2)\,dxdydz, \\ I_{zz}=\iiint\limits_{(V)} \delta (x^2+y^2)\,dxdydz, \\ I_O=\iiint\limits_{(V)} \delta (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz. \end{gathered}\right\} \quad (3\text{-}310)$$

Если плотность δ постоянна, то ее выносят за знак интеграла. Оставшиеся интегралы называются *геометрическими моментами инерции*: умножив их на плотность, т. е. на $\frac{m}{V}$, получаем моменты инерции массы тела.

Момент инерции I_O около произвольной точки O связан с моментом инерции I_C около центра инерции системы формулой

$$I_O=I_C+md^2, \quad (3\text{-}311)$$

где $d=OC$. Момент инерции I_{OL} около оси OL связан с моментом инерции $I_{CL'}$ около оси CL', проведенной через центр инерции C системы параллельно оси OL, формулой

$$I_{OL}=I_{CL'}+md^2, \quad (3\text{-}312)$$

где d есть расстояние между осями OL и CL'. Момент инерции $I_{(Ц)}$

относительно плоскости (П) связан с моментом инерции $I_{(\Pi_C)}$ относительно плоскости (Π_C), проведенной через центр инерции C системы параллельно плоскости (П), формулой

$$I_{(\Pi)} = I_{(\Pi_C)} + md^2, \tag{3-313}$$

где d — расстояние между плоскостями (П) и (Π_C). Наибольшую роль играют моменты инерции около осей. В случае однородного тела вращения, образованного вращением дуги AB вокруг оси (рис. 3-66), уравнение которой имеет вид $\rho = f(z)$, момент инерции I_{zz} около оси вращения zz выражается формулой

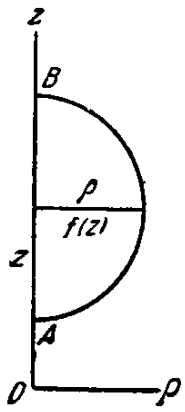


Рис. 3-66.

$$I_{zz} = \frac{m}{2} \frac{\int_{z_A}^{z_B} f^4(z)\,dz}{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z)\,dz}, \tag{3-314}$$

а момент инерции около перпендикуляриых к оси вращения осей x и y — формулами:

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2} I_{zz} + m \frac{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z)\, z^2 dz}{\int_{z_A}^{z_B} f^2(z)\,dz}. \tag{3-315}$$

Этот момент инерции около осей, перпендикуляриых к оси вращения, иногда называется *экваториальным моментом инерции.*

§ 3-78. Эллипсоид и тензор моментов инерции

Момент инерции около оси L (рис. 3-67), проходящей через начало координат и составляющей с осями координат углы α, β, γ, определяется формулой

$$I_L = I_{xx}\cos^2\alpha + I_{yy}\cos^2\beta + I_{zz}\cos^2\gamma - 2I_{yz}\cos\beta\cos\gamma - 2I_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2I_{xy}\cos\alpha\cos\beta, \tag{3-316}$$

где коэффициенты I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} определяются формулами:

$$I_{yz} = \sum_{\alpha} m_\alpha y_\alpha z_\alpha, \quad I_{zx} = \sum_{\alpha} m_\alpha z_\alpha x_\alpha, \quad I_{xy} = \sum_{\alpha} m_\alpha x_\alpha y_\alpha. \tag{3-317}$$

Они имеют ту же размерность, как моменты инерции, но могут быть положительными или отрицательными, и называются *произведениями инерции*, или *центробежными моментами инерции*, относительно данных осей xyz. Если на оси L отложить в некотором масштабе отрезок $OP = \frac{1}{\sqrt{I_{OL}}}$, то координаты (x, y, z) точки P удовлетворяют уравнению

$$I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 2I_{xy}xy = 1. \qquad (3\text{-}318)$$

Это уравнение определяет эллипсоид с центром в точке O, называемый *эллипсоидом инерции* тела в данной точке O. Так как момент инерции I_L около оси L можно вычислить непосредственно по формуле

$$I_L = \sum_a m_a \rho_a^2,$$

без осей xyz, то эллипсоид инерции является геометрическим образом некоторой физической величины, характеризующей распределение масс точек тела относительно данной точки O. Эта величина называется *тензором моментов инерции* (тензором инерции) тела в точке. Аналитически тензор в данных прямоугольных осях xyz характеризуется *коэффициентами уравнения эллипсоида инерции*, которые располагают в таблицу и называют *компонентами тензора* моментов инерции по данным осям xyz:

$$\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (3\text{-}319)$$

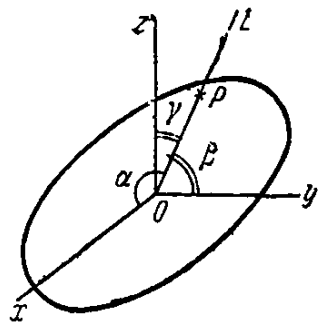


Рис. 3-67.

Если за оси xyz принять оси симметрии эллипсоида инерции, то его уравнение примет вид:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1, \qquad (3\text{-}320)$$

где коэффициенты A, B, C будут обозначать моменты инерции относительно осей симметрии эллипсоида инерции; эти оси симметрии называются *главными осями инерции тела* в данной точке O, а соответствующие моменты инерции — *главными моментами инерции* в той же точке. В главных осях таблица компонентов тензора моментов инерции принимает вид:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}, \qquad (3\text{-}321)$$

так что произведения инерции в этих осях равны нулям.

Обратно, если два произведения инерции равны нулю, то та ось, координаты по которой входят в эти произведения, является главной для начала координат. Например, при $I_{xz} = I_{yz} = 0$ главной будет ось z.

При переносе начала по оси z с сохранением направления осей произведения инерции меняются по формулам:

$$I_{xz} = I_{x'z'} + mhx_C, \qquad I_{yz} = I_{y'z'} + mhy_C, \qquad (3\text{-}322)$$

где $h = OO'$, а x_C, y_C обозначают координаты *центра тяжести тела*. Отсюда следует, что для того, чтобы на оси нашлась точка O', в кото-

рой эта ось будет главной осью инерции, должны выполняться условия:

$$\frac{I_{xz}}{\sum_{\alpha} m_\alpha x_\alpha} = \frac{I_{yz}}{\sum_{\alpha} m_\alpha y_\alpha}. \qquad (3\text{-}323)$$

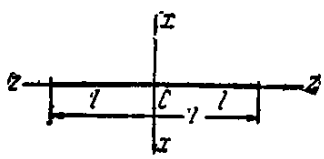
Вообще же на данной оси такой точки, в которой эта ось главная, не существует.

Если ось является главной для двух своих точек, то она проходит через центр тяжести тела и будет главной во всех своих точках. Обратно, ось, главная в центре тяжести, будет главной во всех своих точках. Главные оси, проходящие через центр тяжести тела, называются *главными центральными осями инерции.*

Так как, вообще, эллипсоид инерции имеет три взаимно-перпендикулярные оси симметрии, то и главных осей инерции в данной точке, вообще, три и они взаимно-перпендикулярны. Если эллипсоид инерции есть эллипсоид вращения, то одной из главных осей будет ось вращения этого эллипсоида и все оси, к ней перпендикулярные в центре эллипсоида, будут тоже главными; моменты инерции около всех этих осей будут равны между собой. Если тело имеет ось симметрии, то она будет главной во всех своих точках. Если тело представляет собой бесконечно тонкую пластинку, то в любой его точке одна из главных осей инерции будет перпендикулярна к его плоскости.

Таблица главных центральных моментов инерции

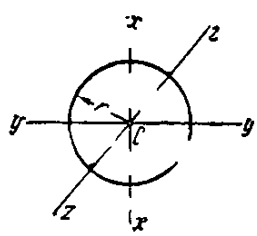
1) *Прямолинейный стержень*



$$I_{xx} = \frac{1}{12} ml^2,$$

$$k_x = 0{,}2866\, l, \quad I_{zz} = 0.$$

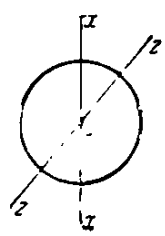
2) *Круговое кольцо*



$$I_{zz} = mr^2, \quad k_z = r,$$

$$I_{xx} = \frac{mr^2}{2}, \quad k_x = 0{,}7071\, r.$$

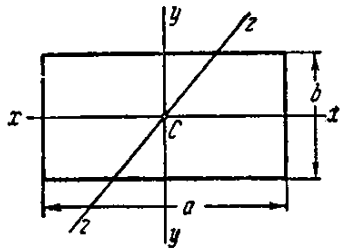
3) *Круговой диск*



$$I_{zz} = \frac{mr^2}{2}, \quad k_z = 0{,}7071\, r,$$

$$I_{xx} = \frac{mr^2}{4}, \quad k_x = 0{,}5\, r.$$

4) *Прямоугольник*

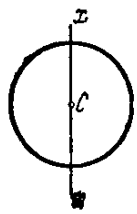


$$I_{xx} = \frac{mb^2}{12}, \quad k_x = \frac{b\sqrt{3}}{6}, \quad I_{yy} = \frac{ma^2}{12}$$

$$k_y = \frac{a\sqrt{3}}{6}, \qquad I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

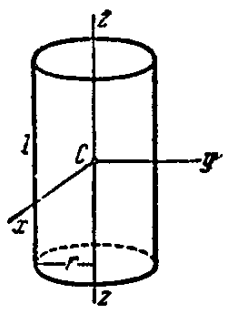
$$k_z = \sqrt{a^2 + b^2}\,\frac{\sqrt{3}}{6} \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0{,}2886\right).$$

5) *Поверхность сферы*



$$I_{xx} = \frac{2mr^2}{3}, \quad k_x = 0{,}8165\,r.$$

6) *Поверхность круглого цилиндра*

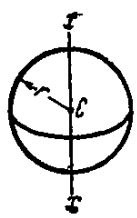


$$I_{zz} = mr^2, \quad k_z = r,$$

$$I_{xx} = \frac{m}{12}(l^2 + 6r^2),$$

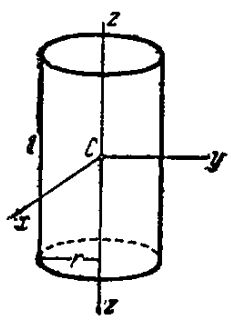
$$k_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 6r^2}.$$

7) *Объем сферы*



$$I_{xx} = \frac{2mr^2}{5}, \quad k_x = 0{,}6325\,r.$$

8) *Объем круглого цилиндра*



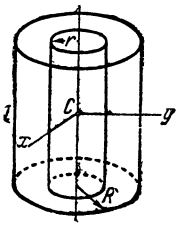
$$I_{zz} = \frac{mr^2}{2},$$

$$I_{xx} = \frac{m}{12}(l^2 + 3r^2),$$

$$k_z = 0{,}7071\,r,$$

$$k_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 3r^2}.$$

9) *Цилиндрический слой*



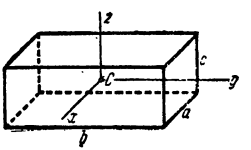
$$I_{zz} = \frac{m}{2}(R^2 + r^2),$$

$$k_z = 0{,}7071\sqrt{R^2 + r^2},$$

$$I_{xx} = \frac{m}{12}[l^2 + 3(R^2 + r^2)],$$

$$k_x = 0{,}2886\sqrt{l^2 + 3(R^2 + r^2)}.$$

10) *Прямоугольный параллелепипед*



$$I_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2),$$

$$k_x = 0{,}2886\sqrt{b^2 + c^2},$$

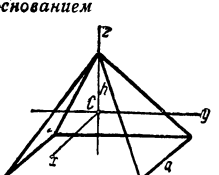
$$I_{yy} = \frac{m}{12}(c^2 + a^2),$$

$$k_y = 0{,}2886\sqrt{c^2 + a^2},$$

$$I_{zz} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

$$k_z = 0{,}2886\sqrt{a^2 + b^2}.$$

11) *Пирамида с прямоугольным основанием*



$$I_{zz} = \frac{m}{20}(a^2 + b^2),$$

$$k_z = 0{,}2236\sqrt{a^2 + b^2},$$

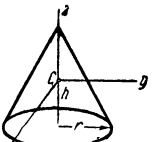
$$I_{xx} = \frac{m}{20}\left(\frac{3}{4}h^2 + b^2\right),$$

$$k_x = 0{,}2236\sqrt{\frac{3}{4}h^2 + b^2},$$

$$I_{yy} = \frac{m}{20}\left(\frac{3}{4}h^2 + a^2\right),$$

$$k_y = 0{,}2236\sqrt{\frac{3}{4}h^2 + a^2}.$$

12) *Прямой круглый конус*

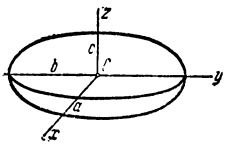


$$I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2, \quad k_z = 0{,}5477\,r$$

$$I_{xx} = \frac{3m}{20}\left(r^2 + \frac{h^2}{4}\right),$$

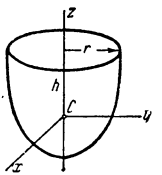
$$k_x = 0{,}3873\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}.$$

13) *Трехосний эллипсоид*



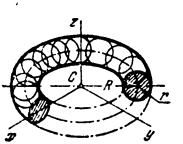
$$I_{zz} = \frac{m}{5}(a^2 + b^2),$$
$$k_z = 0{,}4472\sqrt{a^2 + b^2},$$
$$I_{xx} = \frac{m}{5}(b^2 + c^2),$$
$$k_x = 0{,}4472\sqrt{b^2 + c^2},$$
$$I_{yy} = \frac{m}{5}(c^2 + a^2),$$
$$k_y = 0{,}4472\sqrt{c^2 + a^2}.$$

14) *Параболоид вращения*



$$I_{zz} = \frac{mr^2}{5}, \quad k_z = 0{,}5773\, r,$$
$$I_{xx} = \frac{m}{6}\left(r^2 + \frac{h^2}{3}\right),$$
$$k_x = 0{,}7071\sqrt{3r^2 + h^2}.$$

15) *Тор*



$$I_{zz} = m\left(R^2 + \frac{3r^2}{4}\right),$$
$$k_z = 0{,}5\sqrt{4R^2 + 3r^2},$$
$$I_{xx} = m\left(\frac{R^2}{2} + \frac{5r^2}{8}\right).$$
$$k_x = 0{,}7071\sqrt{R^2 + 1{,}25r^2}.$$

§ 3-79. Кинетический момент тела

Если тело вращается вокруг мгновенной оси OK (рис. 3-68) с угловой скоростью ω, то кинетический момент выражается формулой

$$\mathbf{L}_0 = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha \mathbf{V}_\alpha) = \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha \times m_\alpha (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_\alpha) =$$

$$= \boldsymbol{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{r}_\alpha,\ \mathbf{r}_\alpha) - \sum_\alpha \mathbf{r}_\alpha m_\alpha (\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{r}_\alpha). \qquad (3\text{-}324)$$

Отсюда проекции L_x, L_y, L_z на любые оси xyz выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= -I_{yz}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}325)$$

Эти проекции получаются умножением столбцов таблицы компонентов тензора инерции (3-319) соответственно на проекции ω_x, ω_y, ω_z вектора угловой скорости и построчным суммированием произведений. Если, в частности, за ось Oz принять ось вращения, то проекции кинетического момента выразятся через алгебраическую величину ω угловой скорости формулами:

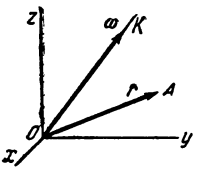


Рис. 3-68.

$$L_x = -I_{xz}\omega, \quad L_y = -I_{yz}\omega, \quad L_z = I_{zz}\omega. \tag{3-326}$$

Если за оси xyz взять главные оси инерции в точке O, то формулы (3-325) примут вид:

$$L_x = A\omega_x, \quad L_y = B\omega_y, \quad L_z = C\omega_z, \tag{3-327}$$

где A, B, C — главные моменты инерции.

В общем случае, разлагая движение тела на переносное поступательное со скоростью $\mathbf{V}_C$ центра C инерции и на относительное вращательное вокруг мгновенной оси CK согласно формуле (3-247), получаем формулу:

$$\mathbf{L}_O = M\mathbf{r}_C \times \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha (\mathbf{r}'_\alpha, \mathbf{r}'_\alpha) - \sum_\alpha m_\alpha \mathbf{r}'_\alpha(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'_\alpha). \tag{3-328}$$

§ 3-80. Дифференциальное уравнение вращения тела около неподвижной оси

При вращении тела около закрепленной оси OO' (рис. 3-69) внешними силами являются данные силы $\mathbf{F}_\alpha$ и реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ закрепленных точек. Поэтому формула (3-248) для производной $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt}$ кинетического момента принимает вид

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \sum_\alpha M_O(\mathbf{F}_\alpha) + M_O(\mathbf{R}'),$$

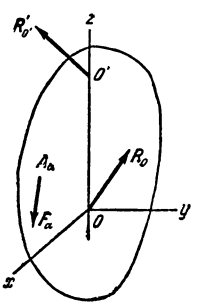


Рис. 3-69.

откуда для проекции на ось вращения OO' получается уравнение

$$\frac{dL_{OO'}}{dt} = \sum_\alpha M_{OO'}(\mathbf{F}_\alpha). \tag{3-329}$$

Принимая OO' за ось z, имеем: $L_{OO'} = I_{zz}\omega$, и так как $I_{zz} = \text{const}$, то получается уравнение

$$I_{zz}\frac{d\omega}{dt} = \sum_\alpha M_{zz}(\mathbf{F}_\alpha), \tag{3-330}$$

или

$$I_{zz}\varepsilon = \sum_{\alpha} M_{zz}(\mathbf{F}_{\alpha}), \tag{3-331}$$

где ε — угловое ускорение тела. Это уравнение дает физический смысл момента инерции I как меры инерции тела при вращательном движении вокруг данной оси. Если положение тела определяется углом φ его поворота вокруг оси z относительно неподвижной плоскости xz, то $\sum_{\alpha} M_{zz}(\mathbf{F}_{\alpha})$ выразится в виде данной функции величин t, φ, $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, характеризующих кинематическое состояние точек приложения данных сил, и уравнение (3-328) принимает вид:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = f\left(t, \varphi, \frac{d\varphi}{dt}\right), \tag{3-332}$$

формально тождественный с уравнением (3-190) движения точки по заданной гладкой кривой.

§ 3-81. Реакция закрепленных точек оси вращающегося тела

При вращении тела вокруг оси в ее закрепленных точках O и O' возникают динамические реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ (рис. 3-69). Проекции этих реакций на какие-нибудь оси xyz, неподвижные или связанные с телом, лишь бы ось z совпадала с осью вращения, определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\alpha} F_{\alpha x} + R_x + R'_x = -my_C\varepsilon - mx_C\omega^2,\\
&\sum_{\alpha} F_{\alpha y} + R_y + R'_y = mx_C\varepsilon - my_C\omega^2,\\
&\sum_{\alpha} F_{\alpha z} + R_z + R'_z = 0,\\
&\sum_{\alpha} M_{Ox}(\mathbf{F}_{\alpha}) - hR'_y = -I_{xz}\varepsilon + I_{yz}\omega^2,\\
&\sum_{\alpha} M_{Oy}(\mathbf{F}_{\alpha}) + hR'_x = -I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\omega^2,
\end{aligned}\right\} \tag{3-333}$$

где h обозначает расстояние OO', а x_C и y_C — координаты центра тяжести тела. Из этих уравнений определяются вполне проекции R'_x, R'_y, R_x, R_y и сумма проекций $R_z + R'_z$. Проекции R_x, R_y, R'_x, R'_y удобно разбить на две части, полагая $R_x = S_x + N_x$; $R_y = S_y + N_y$; $R'_x = S'_x + N'_x$; $R'_y = S'_y + N'_y$ и выбирая для удовлетворения уравнений (3-333) слагаемые так, чтобы S_x, S'_x, S_y, S'_y определялись непо-

средственно через заданные силы $\mathbf{F}_\alpha$, а слагаемые N_x, N'_x, N_y, N'_y — через угловую скорость ω и угловое ускорение ε. Тогда получаются уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\alpha F_{\alpha x} + S_x + S'_x = 0, \quad \sum_\alpha F_{\alpha y} + S_y + S'_y = 0, \\ &\sum_\alpha M_{Ox}(\mathbf{F}_\alpha) - hS'_y = 0, \quad \sum_\alpha M_{Oy}(\mathbf{F}_\alpha) + hS'_x = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3-334}$$

$$\left.\begin{aligned} &N_x + N'_x = -my_C\varepsilon - mx_C\omega^2, \quad N_y + N'_y = mx_C\varepsilon - my_C\omega^2, \\ &-hN'_y = -I_{xz}\varepsilon + I_{yz}\omega^2, \quad hN'_x = -I_{yz}\varepsilon - I_{xz}\omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{3-335}$$

Если считать $N_z = N'_z = 0$, то реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ можно представить в виде: $\mathbf{R} = \mathbf{S} + \mathbf{N}$; $\mathbf{R}' = \mathbf{S}' + \mathbf{N}'$. Компоненты $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}'$, зависящие непосредственно только от заданных сил $\mathbf{F}_\alpha$, называются *статическими частями реакций* $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$, а компоненты $\mathbf{N}$ и $\mathbf{N}'$, определяемые угловой скоростью ω и угловым ускорением ε, — *динамическими добавками, или перегрузками*. Если ввести ускорение $\mathbf{w}_C$ центра тяжести тела, то динамические добавки определятся формулами:

$$\left.\begin{aligned} N_x &= mw_{Cx} + \frac{1}{h}(I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2), \\ N_y &= mw_{Cy} - \frac{1}{h}(I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2), \\ N'_x &= -\frac{1}{h}(I_{yz}\varepsilon + I_{xz}\omega^2), \\ N'_y &= \frac{1}{h}(I_{xz}\varepsilon - I_{yz}\omega^2). \end{aligned}\right\} \tag{3-336}$$

Динамические добавки обращаются обе в нуль тогда и только тогда, когда ось вращения является одной из главных центральных осей вращения, т. е. когда $x_C = y_C = 0$; $I_{xz} = I_{yz} = 0$. Если центр тяжести тела лежит на оси вращения, но эта ось не является главной осью инерции, то $\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$, т. е. динамические добавки образуют пару. Величина момента этой пары равна:

$$M(\mathbf{N}, \mathbf{N}') = \sqrt{I_{xz}^2 + I_{yz}^2}\,\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}. \tag{3-337}$$

Если данные силы $\mathbf{F}_\alpha$ отсутствуют, то при вращении вокруг главной центральной оси реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ равны нулю, а потому ось можно не закреплять, и тело, приведенное в начальный момент во вращение вокруг главной центральной оси и затем предоставленное самому себе, будет сохранять состояние равномерного вращения вокруг этой оси, как неподвижной. Поэтому главные центральные оси называются *осями свободного вращения* тела. В технических задачах обычно требуется определить не реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ закрепленных точек, а давления $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$, оказываемые в этих точках на ось вращающихся точек. Эти давления $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{Q}'$ по закону равенства действия и противодействия определяются через реакции $\mathbf{R}$ и $\mathbf{R}'$ формулой $\mathbf{Q} = -\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}' = -\mathbf{R}'$.

§ 3-82. Физический маятник

Физическим маятником называется тяжелое твердое тело, вращающееся около неподвижной горизонтальной оси под действием собственного веса.

Выбрав за плоскость xy (рис. 3-70) вертикальную плоскость, в которой движется центр тяжести C тела, и определяя положение маятника углом φ, составляемым радиусом вращения центра тяжести с нисходящей вертикалью Ox, получаем уравнение вращения маятника в виде:

$$I_{zz}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\sin\varphi, \qquad (3\text{-}338)$$

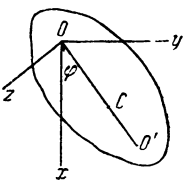


Рис. 3-70.

где $a = OC$ обозначен радиус вращения центра тяжести, а m — масса маятника. Если уравнению (3-338) придать вид:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi, \text{ где } l = \frac{I_z}{ma}, \qquad (3\text{-}339)$$

то оно будет тождественно с уравнением (3-193) движения кругового математического маятника. Потому длину l, определяемую формулой (3-337), называют *приведенной длиной физического маятника* или длиной эквивалентного, т. е. имеющего тот же период колебания, математического маятника.

Так как $I_{Oz} = I_{OC} + ma^2$, где I_{OC} — момент инерции около центральной оси, параллельной оси вращения, то $l = \frac{I_{OC}}{ma} + a$, т. е. $l > a$.

Точка O', лежащая на радиусе вращения центра тяжести на расстоянии l от оси вращения, называется *центром качания*, а прямая $O'z'$, проходящая через центр качания параллельно оси вращения, — *осью качания*. Расстояние $a' = O'C$ от оси качания до центра тяжести определяется по формуле $aa' = \frac{I_{OC}}{m}$, из которой следует, что если ось качания сделать осью вращения, то новой осью качания окажется старая ось вращения. Если маятник симметричен относительно плоскости xy, в которой движется центр тяжести C, то реакции закрепленных точек оси приводятся к одной равнодействующей $\mathbf{R}$, приложенной в точке O и имеющей проекции:

$$R_x = -\omega^2 m x_C - \varepsilon m y_C - mg; \quad R_y = -\omega^2 m y_C + \varepsilon m x_C,$$

где x_C, y_C — координаты центра тяжести, а ω и ε — угловая скорость и угловое ускорение маятника.

§ 3-83. Крутильные колебания

Тело, подвешенное к неподвижной точке на проволоке, прикрепленной к нему в центре тяжести, после закручивания проволоки совершает вращение вокруг неподвижной вертикальной оси под действием упругих сил проволоки. Момент этих сил при закручивании проволоки на угол φ равняется $-c\varphi$, где c — коэффициент, зависящий от материала проволоки. Уравнение вращения получает вид:

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \qquad (3\text{-}340)$$

где I — момент инерции вокруг центральной оси, направленной по проволоке.

Так как уравнение (3-340) имеет вид уравнения (3-176) гармонических колебаний при значении $k^2 = \frac{c}{I}$, то полученное вращение тела называется *крутильным колебанием*. Его период составляет

$$2\tau = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}. \tag{3-341}$$

Крутильными колебаниями можно воспользоваться для определения опытным путем момента инерции вокруг оси, около которой происходят эти колебания. Для этого находят период крутильных колебаний $2\tau_0$ на той же проволоке эталонного тела с известным моментом инерции I_0, так что $2\tau_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{c}}$. Исключая из этой формулы и из формулы (3-341) коэффициент c, получаем:

$$I = I_0 \frac{\tau^2}{\tau_0^2}. \tag{3-342}$$

§ 3-84. Плоское движение тела

Если тело движется параллельно плоскости xy, то его положение определяется координатами x_C, y_C проекции центра тяжести на эту плоскость и углом φ поворота вокруг оси Cz', проходящей через центр тяжести перпендикулярно к плоскости xy. Уравнение (3-225) движения центра инерции в проекциях на оси Ox и Oy дает уравнения:

$$m\frac{d^2x_C}{dt^2} = \sum_{\alpha} P^{(e)}_{\alpha x}, \quad m\frac{d^2y_C}{dt^2} = \sum_{\alpha} P^{(e)}_{\alpha y}, \tag{3-343}$$

где m обозначает массу тела, а $\mathbf{P}^{(e)}_{\alpha}$ — приложенные к нему внешние силы. Уравнение (3-252) для кинетического момента в движении относительно оси Cz' получает вид:

$$I_{Cz'}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum_{\alpha} M_{Cz'}(\mathbf{P}^{(e)}_{\alpha}). \tag{3-344}$$

Если первые части содержат только заданные силы $\mathbf{F}_{\alpha}$, то уравнения (3-343) и (3-344) получают форму:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x_C}{dt^2} &= f_1\left(t;\ x_C,\ y_C,\ \varphi;\ \frac{dx_C}{dt},\ \frac{dy_C}{dt},\ \frac{d\varphi}{dt}\right);\\ m\frac{d^2y_C}{dt^2} &= f_2\left(t;\ x_C,\ y_C,\ \varphi;\ \frac{dx_C}{dt},\ \frac{dy_C}{dt},\ \frac{d\varphi}{dt}\right),\\ I_{Cz'}\frac{d^2\varphi}{dt^2} &= f_3\left(t;\ x_C,\ y_C,\ \varphi;\ \frac{dx_C}{dt},\ \frac{dy_C}{dt},\ \frac{d\varphi}{dt}\right), \end{aligned}\right\} \tag{3-345}$$

где правые части являются известными функциями своих аргументов,

и тогда уравнения (3-345) при заданных начальных значениях t_0; $x_C^{(0)}$, $y_C^{(0)}$ $\varphi^{(0)}$; $\left(\frac{dx_C}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy_C}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_0$ вполне определяют кинематику движения тела. Но, вообще, в правые части уравнений (3-343) и (3-344) входят неизвестные внешние реакции, и тогда для решения задачи необходимы дополнительные условия, которые характеризуют связи, обусловливающие плоское движение тела.

§ 3-85. Сумма элементарных работ сил, приложенных к точкам твердого тела

Если движение тела характеризуется скоростью $\mathbf{V}_0$ полюса O, произвольно выбранного в теле, и угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$, то сумма элементарных работ сил $\mathbf{P}_\alpha$, приложенных к точкам тела, выражается формулой

$$\sum_\alpha dA\,(\mathbf{P}_\alpha) = \left(\mathbf{V}_0,\ \sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha\right) dt + \left(\boldsymbol{\omega},\ \sum_\alpha \mathbf{M}_O\,(\mathbf{P}_\alpha)\right) dt. \quad (3\text{-}346)$$

Если $\mathbf{P}_\alpha$ обозначены внутренние силы, т. е. $\mathbf{P}_\alpha = \sum_\beta \mathbf{F}_{\alpha\beta}$, то согласно формулам (3-214) и (3-215):

$$\sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha = \sum_{\alpha,\,\beta} \mathbf{F}_{\alpha\beta} = 0, \quad \sum_\alpha \mathbf{M}_O\,(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{\alpha,\,\beta} \mathbf{M}_O\,(\mathbf{F}_{\alpha\beta}) = 0,$$

а потому

$$\sum_{\alpha,\,\beta} dA\,(\mathbf{F}_{\alpha\beta}) = 0, \quad (3\text{-}347)$$

т. е. сумма элементарных работ всех внутренних сил твердого тела всегда равна нулю. Если $\mathbf{P}_\alpha^{(e)}$ — внешние силы, имеющие равнодействующую $\mathbf{P}_O$, приложенную в точке O, то формула (3-346) дает:

$$\sum_\alpha dA\,(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = (\mathbf{V}_O,\ \mathbf{P}_O)\,dt = dA\,(\mathbf{P}_O). \quad (3\text{-}348)$$

т. е. в случае существования равнодействующей для системы внешних сил сумма их элементарных работ равна элементарной работе равнодействующей. Если система внешних сил $\mathbf{P}_\alpha^{(e)}$ эквивалентна одной паре, $(\mathbf{P}_1^{(e)}, \ldots, \mathbf{P}_n^{(e)}) \infty (\mathbf{P}, -\mathbf{P})$, то формула (3-346) дает:

$$\sum_\alpha dA\left(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}\right) = dA\,(\mathbf{P}, -\mathbf{P}) = (\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{M}\,(\mathbf{P}, -\mathbf{P}))\,dt. \quad (3\text{-}349)$$

Так как $(\boldsymbol{\omega},\ \mathbf{M}\,(\mathbf{P}, -\mathbf{P}))\,dt = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\omega}}\,(\mathbf{P}, -\mathbf{P})\,d\varphi$, где $d\varphi = \omega dt$ обозначает бесконечно малый угол поворота тела вокруг оси вектора $\boldsymbol{\omega}$ за

бесконечно малый элемент dt времени, то формула для работы пары получает вид:

$$dA(\mathbf{P}, -\mathbf{P}) = \mathbf{M}_{\omega}(\mathbf{P}, -\mathbf{P})\, d\varphi. \tag{3-350}$$

Если система внешних сил $\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}$ уравновешена, то формула (3-346) дает: $\sum_{\alpha} dA\left(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}\right) = 0$, т. е. сумма элементарных работ сил уравновешенной на данном теле системы внешних сил равна нулю. При вращении тела около закрепленной оси OO' формула (3-346) дает:

$$\sum_{\alpha} dA(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}) = (\omega, \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}))\, dt. \tag{3-351}$$

Так как $(\omega, \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)})) = \omega \sum_{\alpha} M_{OO'}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)})$, то в случае вращения тела вокруг оси имеем:

$$\sum_{\alpha} dA_{\alpha}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)}) = \sum_{\alpha} M_{OO'}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)})\, \omega\, dt,$$

откуда мощность N системы сил, приложенных к телу, вращающемуся вокруг оси, выражается формулой

$$N = \sum_{\alpha} M_{OO'}(\mathbf{P}_{\alpha}^{(e)})\, \omega. \tag{3-352}$$

§ 3-86. Кинетическая энергия твердого тела

Если тело движется поступательно со скоростью $\mathbf{V}$, то кинетическая энергия выражается через массу m тела формулой

$$T = \frac{mv^2}{2}. \tag{3-353}$$

При вращении вокруг неподвижной или мгновенной оси OK с угловой скоростью ω кинетическая энергия выражается через момент инерции формулой

$$T = I_{OK}\frac{\omega^2}{2}. \tag{3-354}$$

Если точку O принять за начало осей xyz, то через проекции угловой скорости и компоненты тензора инерции по этим осям кинетическая энергия выражается формулой

$$T = \frac{1}{2}(I_{xx}\omega_x^2 + I_{yy}\omega_y^2 + I_{zz}\omega_z^2 - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - \\ - 2I_{zx}\omega_z\omega_x - 2I_{xy}\omega_x\omega_y). \tag{3-355}$$

В частности, если за оси $Oxyz$ приняты главные оси инерции, то формула примет вид:

$$T = \frac{1}{2}(A\omega_x^2 + B\omega_y^2 + C\omega_z^2). \tag{3-356}$$

Если положение тела определяется эйлеровыми углами ψ, φ, θ, то через

их производные $\dot{\psi}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ кинетическая энергия на основании зависимостей (3-55) выражается формулой

$$T=\frac{1}{2}\,[I_{xx}\,(\sin\varphi\sin\theta\cdot\dot{\psi}+\cos\varphi\cdot\dot{\theta})^2+I_{yy}\,(\cos\varphi\sin\theta\cdot\dot{\psi}-\sin\varphi\cdot\dot{\theta})^2+$$

$$+I_{zz}\,(\cos\theta\cdot\dot{\psi}+\dot{\varphi})^2\,], \qquad (3\text{-}357)$$

причем за оси xyz взяты главные оси инерции, связанные с телом. Если ось z служит осью динамической симметрии, т. е. $I_{xx}=I_{yy}=A$, то формула (3-357) получит вид:

$$T=\frac{1}{2}\,[C\dot{\varphi}^2+A\,(\dot{\psi}^2+\dot{\theta}^2)+(C-A)\cos^2\theta\cdot\dot{\psi}^2+2C\cos\theta\cdot\dot{\varphi}\dot{\psi}], \qquad (3\text{-}358)$$

где $C=I_{zz}$.

Если тело свободно, то его кинетическая энергия выражается через массу m, скорость v_C центра тяжести, мгновенную угловую скорость ω и момент инерции I_ω около оси, проходящей через центр тяжести параллельно вектору ω, *формулой Кёнига:*

$$T=\frac{mv_C^2}{2}+\frac{I_\omega\omega^2}{2}. \qquad (3\text{-}359)$$

Так как для твердого тела сумма элементарных работ внутренних сил равна нулю, то формула (3-292) для дифференциала dT кинетической энергии в случае твердого тела принимает вид:

$$dT=\sum_\alpha dA\,(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}), \qquad (3\text{-}360)$$

т. е. изменение кинетической энергии твердого тела зависит только от внешних сил, приложенных к нему.

§ 3-87. Динамические уравнения Эйлера для вращения тела вокруг неподвижной точки

Если тело вращается вокруг неподвижной точки O, то, приняв ее за начало осей xyz, связанных с телом, получим из формулы (3-249), выражающей *правило Резаля*, следующие зависимости между проекциями L_x, L_y, L_z кинетического момента тела, проекциями ω_x, ω_y, ω_z его угловой скорости и моментами $M_{Ox}(\mathbf{F}_\alpha)$, $M_{Oy}(\mathbf{F}_\alpha)$, $M_{Oz}(\mathbf{F}_\alpha)$ данных сил около этих осей:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dL_x}{dt}+\omega_yL_z-\omega_zL_y&=\sum_\alpha M_{Ox}(\mathbf{F}_\alpha),\\
\frac{dL_y}{dt}+\omega_zL_x-\omega_xL_z&=\sum_\alpha M_{Oy}(\mathbf{F}_\alpha),\\
\frac{dL_z}{dt}+\omega_xL_y-\omega_yL_x&=\sum_\alpha M_{Oz}(\mathbf{F}_\alpha).
\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}361)$$

Если, в частности, за оси $Oxyz$ взяты главные оси инерции тела, то

на основании формул (3-324) эти уравнения получают форму

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_x}{dt}+(C-B)\omega_z\omega_y &= \sum_\alpha M_{Ox}(\mathbf{F}_\alpha),\\ B\frac{d\omega_y}{dt}+(A-C)\omega_x\omega_z &= \sum_\alpha M_{Oy}(\mathbf{F}_\alpha),\\ C\frac{d\omega_z}{dt}+(B-A)\omega_y\omega_x &= \sum_\alpha M_{Oz}(\mathbf{F}_\alpha) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}362)$$

и называются *динамическими уравнениями Эйлера.*

Правые части этих уравнений зависят, вообще, явно от момента t времени, положения тела, определяемого углами Эйлера ψ, φ, θ, и проекций ω_x, ω_y, ω_z угловой скорости. Поэтому, если к этим динамическим уравнениям присоединить три формулы (3-55), т. е. уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \omega_x=\dot\psi\sin\varphi\sin\theta+\dot\theta\cos\varphi,\quad \omega_y=\dot\psi\cos\varphi\sin\theta-\dot\theta\sin\varphi,\\ \omega_z=\dot\psi\cos\theta+\dot\varphi, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}363)$$

то уравнения (3-362) и (3-363) дадут систему шести дифференциальных уравнений первого порядка с шестью неизвестными функциями ψ, φ, θ, ω_x, ω_y, ω_z. Следовательно, они при заданных начальных положениях тела и начальной угловой скорости вполне определяют вращение тела около неподвижной точки под действием данных сил.

§ 3-88. Уравнения движения свободного тела

В общем случае движение свободного твердого тела можно определить, зная движение его центра тяжести и вращение тела вокруг этого центра относительно осей, движущихся поступательно и имеющих начало в центре тяжести. Последнее движение определяется уравнениями (3-362) и (3-363),если считать,что начало осей совпадает с центром тяжести тела. Вместо непосредственного определения движения центра тяжести относительно неподвижных осей употребляются уравнения, определяющие проекции V_x, V_y, V_z скорости центра тяжести на оси xyz, связанные с телом. Эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt}+\omega_yV_z-\omega_zV_y &= \frac{\sum\limits_\alpha F_{\alpha x}}{m},\\ \frac{dV_y}{dt}+\omega_zV_x-\omega_xV_z &= \frac{\sum\limits_\alpha F_{\alpha y}}{m},\\ \frac{dV_z}{dt}+\omega_xV_y-\omega_yV_x &= \frac{\sum\limits_\alpha F_{\alpha z}}{m}, \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}364)$$

где m – масса тела.

§ 3-89. Вращение гироскопа

Тело, вращающееся около неподвижной точки O, называется *гироскопом*, если эллипсоид инерции в этой точке оказывается эллипсоидом вращения. Ось вращения этого эллипсоида называется *осью гироскопа*. Если за ось z системы xyz, неизменно связанной с телом, принять ось гироскопа, то главные моменты инерции I_{xx} и I_{yy} будут равны между собой: $I_{xx}=I_{yy}=A$. Поэтому третье *динамическое уравнение Эйлера* (3-362) для гироскопа принимает вид:

$$C\frac{d\omega_z}{dt}=\sum_a M_{Oz}(\mathrm{F}_a). \tag{3-365}$$

Физическим примером гироскопа служит материальное симметричное тело, вращающееся около одной из точек оси симметрии. При вращении гироскопа его ось z, вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости и вектор $\mathbf{L}_O$ кинетического момента всегда лежат в одной плоскости.

Если сумма моментов заданных сил около центра вращения равна нулю, то гироскоп называется *уравновешенным*. В этом случае согласно *правилу Резаля* [формула (3-249)] вектор $\mathbf{L}_O$ кинетического момента остается постоянным. Ось z гироскопа образует постоянный угол с неизменным направлением кинетического момента. Если направление кинетического момента $\mathbf{L}_O$ принять за неподвижную ось z_1, то угол θ нутации будет сохранять постоянную величину θ_0. Вектор $\boldsymbol{\omega}$ будет оставаться неизменным в плоскости zz_1 и вращаться вместе с ней вокруг оси z_1 с угловой скоростью $\dot{\psi}$ прецессии, величина которой дается формулой

$$\dot{\psi}=\frac{L}{A}. \tag{3-366}$$

Вектор $\boldsymbol{\omega}$ угловой скорости раскладывается на компоненты $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$, направленные по осям z_1 и z и имеющие алгебраические величины:

$$\omega_1=\dot{\psi}=\frac{L}{A},\quad \omega_2=\frac{L(A-C)}{AC}\cos\theta_0. \tag{3-367}$$

Следовательно, вращение уравновешенного гироскопа можно рассматривать как результат сложения его относительного вращения вокруг собственной оси с постоянной угловой скоростью ω_2 и переносного вращения этой оси вокруг неизменного направления кинетического момента с постоянной угловой скоростью ω_1.

§ 3-90. Регулярная прецессия гироскопа

Вращение гироскопа называется *регулярной прецессией*, если оно складывается из относительного равномерного вращения вокруг собственной оси z с постоянной угловой скоростью ω_2 и из равномерного переносного вращения этой оси вокруг произвольной неподвижной оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω_1. В этом случае кинетический момент $\mathbf{L}_O$ остается неподвижным в плоскости zz_1 и вращается вместе с ней вокруг неподвижной оси z_1 с постоянной угловой скоростью ω_1. Сумма моментов внешних сил около неподвижной точки при регулярной прецессии, вообще, не равна нулю и выражается формулой:

$$\sum_a \mathbf{M}_O(\mathbf{F}_a)=C(\boldsymbol{\omega}_1\times\boldsymbol{\omega}_2)\left(1+\frac{C-A}{C}\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta_0\right). \tag{3-368}$$

Направлен этот вращающий момент по прямой, перпендикулярной к плоскости zz_1, в которой лежат оси z и z_1 собственного (относительного) и прецессионного (переносного) вращения гироскопа. При $\theta = 90°$ формула (3-368) принимает вид:

$$\sum_{\alpha} M_O(F_\alpha) = C(\omega_1 \times \omega_2). \tag{3-369}$$

Если угловая скорость ω_2 собственного вращения значительно превышает угловую скорость ω_1 прецессионного, то (3-368) принимает приближенную форму: $\sum_{\alpha} M_O(F_\alpha) \approx C(\omega_1 \times \omega_2)$. Эта последняя формула лежит в основе приближенной теории гироскопа, в которой принимается, что кинетический момент L_O при вращении гироскопа остается направленным по оси z. Если регулярная прецессия гироскопа технически осуществляется поворотом подшипников, в которых укреплена его собственная ось z, и центр вращения совпадает с центром тяжести гироскопа, то внешними силами, дающими момент около неподвижной точки, являются реакции подшипников. Поэтому сумма моментов сил давления вращающегося гироскопа на подшипники, в которых закреплена его ось, по закону равенства действия и противодействия выражается формулой

$$C(\omega_2 \times \omega_1)\left(1 + \frac{C - A}{C}\frac{\omega_1}{\omega_2}\cos\theta_0\right). \tag{3-370}$$

Этот вектор называется *вектором гироскопического момента.*

Глава 3-9

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СТАТИКА

Аналитическая статика — раздел статики, в котором изучаются условия равновесия механических систем *методом виртуальных перемещений.*

§ 3-91. Связи и виртуальные перемещения

Система материальных точек, положения и движения которых подчинены некоторым геометрическим или кинематическим ограничениям, заданным наперед и не зависящим от начальных условий и от приложенных заданных сил, называется *несвободной.* Эти ограничения, наложенные на систему и делающие ее несвободной, называются *связями.* Положение точек системы, допускаемое наложенными на нее связями, называется *возможным.* Перемещение точки из данного возможного положения в другое возможное, допускаемое в тот же момент связями, называется *виртуальным,* если оно рассматривается только геометрически, независимо от сил, приложенных к точке, и ее кинетического состояния. Бесконечно малое изменение радиуса-вектора r_α точки при виртуальном перемещении обозначается через δr_α. Если считать, что это изменение происходит в течение бесконечно малого промежутка δt времени, и принять, что при $\delta r_\alpha \to 0$ и $\delta t \to 0$, то вектор

$$U_\alpha = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta r_\alpha}{\delta t} \tag{3-371}$$

называется *виртуальной скоростью точки* системы в данном положении. Проекции δx_α, δy_α, δz_α вектора $\delta \mathbf{r}_\alpha$ виртуального перемещения на оси координат основной системы отсчета называются *виртуальными изменениями* координаты точки. Проекции $U_{\alpha x}$, $U_{\alpha y}$, $U_{\alpha z}$ виртуальной скорости на те же оси выражаются формулами:

$$U_{\alpha x} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta x_\alpha}{\delta t}, \quad U_{\alpha y} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta y_\alpha}{\delta t}, \quad U_{\alpha z} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta z_\alpha}{\delta t}.$$

Для краткости в этих формулах обыкновенно опускают знак предела и пишут $\mathbf{U}_\alpha = \frac{\delta \mathbf{r}_\alpha}{\delta t}$.

В простейшем случае, когда связи накладывают ограничения только на положения точек, но не на их скорости, связи в данный момент t выражаются уравнением вида:

$$f_j(t;\ x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3\text{-}372)$$

если система содержит n точек; при этом $s \leqslant 3n$. Такая система называется *голономной*.

Бесконечно малые виртуальные изменения координат голономной системы связаны s уравнениями вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\alpha} \delta x_\alpha + \frac{\partial f_j}{\partial y_\alpha} \delta y_\alpha + \frac{\partial f_j}{\partial z_\alpha} \delta z_\alpha \right) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3\text{-}373)$$

которые являются следствием уравнения (3-372). Если же на систему наложены, кроме геометрических, самостоятельные кинематические связи, то между виртуальными изменениями координат точек системы могут существовать уравнения вида:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} (a_{j\alpha} \delta x_\alpha + b_{j\alpha} \delta y_\alpha + c_{j\alpha} \delta z_\alpha) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3\text{-}374)$$

где коэффициенты $a_{j\alpha}$, $b_{j\alpha}$, $c_{j\alpha}$ являются функциями t и координат $x_1, y_1, z_1; \ldots; x_n, y_n, z_n$. При этом уравнения (3-374) не являются следствием уравнений (3-372) и не могут быть заменены конечными уравнениями того же вида. В таком случае кинематические связи, наложенные на систему, называются *неинтегрируемыми*, а сама система — *неголономной*.

Если связи не изменяют своего геометрического и кинематического характера с течением времени, то они называются *стационарными*, или *склерономными*, а в обратном случае — *нестационарными*, или *реономными*. В случае стационарных связей уравнения (3-372) и (3-374) не содержат явно аргумента t.

§ 3-92. Обобщенные координаты системы

Во многих случаях радиусы-векторы точек системы на основании наложенных на нее геометрических связей можно для каждого момента t выразить через конечное число n независимых переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ формулами вида:

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n), \qquad (3\text{-}375)$$

так что при любых значениях этих переменных получаются положения точек системы, допускаемые в соответствующий момент t связями. Эти независимые друг от друга величины $q_1, q_2, \ldots, q_n$, вполне и однозначно определяющие возможные положения системы в произвольно выбранный момент времени, называются *обобщенными координатами системы*, или *независимыми параметрами Лагранжа*. Формулы (3-375) и соответствующие им формулы для координат точек системы:

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha = x_\alpha(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n);\quad y_\alpha = y_\alpha(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n);\\ z_\alpha = z_\alpha(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}376)$$

называются *уравнениями системы*.

Если выбрать определенные значения для обобщенных координат, а затем дать им бесконечно малые приращения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$, то получаются виртуальные изменения радиусов-векторов и координат точек системы, определяемые формулами:

$$\left.\begin{aligned} \delta \mathbf{r}_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k;\quad \delta x_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k,\\ \delta y_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k,\quad \delta z_\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k}\delta q_k. \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}377)$$

Если система голономная, то на приращения δq_k обобщенных координат никаких ограничений не накладывается и их можно выбирать совершенно произвольно. Если же система неголономная, т. е. имеют место уравнения (3-374), то между приращениями δq_k обобщенных координат будут иметь место s уравнений вида:

$$B_{1j}(t;\ q_1, \ldots, q_n)\,\delta q_1 + B_{2j}(t;\ q_1, \ldots, q_n)\,\delta q_2 + \ldots$$
$$\ldots + B_{nj}(t;\ q_1, \ldots, q_n)\,\delta q_n = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s), \qquad (3\text{-}378)$$

и притом таких, что их нельзя заменить конечными уравнениями вида $\varphi_j(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0$. Следовательно, в этом случае нельзя произвольно выбирать все n приращения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ обобщенных координат. Произвольными будут только $n - s$, а остальные s определятся из уравнений (3-378). Число независимых друг от друга приращений обобщенных координат системы называется числом ее *степеней свободы*. Для голономной системы число степеней свободы равно числу ее обобщенных координат, а для неголономной системы оно меньше на число неинтегрируемых уравнений (3-378) между приращениями обобщенных координат.

Примерами обобщенных координат служат: угол φ поворота тела, имеющего закрепленную ось; углы Эйлера ψ, φ, θ для тела, имеющего закрепленную точку; координаты x_0, y_0, z_0 полюса, произвольно выбранного в свободном теле, и углы Эйлера ψ, φ, θ осей, проведенных в теле через этот полюс, с осями, направленными через тот же полюс параллельно осям xyz основной системы отсчета. Во всех этих примерах тело представляет собой голономную систему соответственно с одной, тремя и шестью степенями свободы. Примером неголономной

системы является шар, принужденный катиться без скольжения по заданной неподвижной плоскости. Положение шара на плоскости определяется пятью независимыми параметрами: координатами x_C, y_C его центра и углами Эйлера ψ, φ, θ осей, проведенных в шаре через его центр, с осями, проведенными через тот же центр параллельно осям xyz основной системы отсчета.

Условия качения без скольжения выражаются двумя неинтегрируемыми уравнениями:

$$\delta x_C + R(\cos\psi \sin\theta\,\delta\varphi - \sin\psi\,\delta\theta) = 0,\quad \delta y_C + R(\sin\psi \sin\theta\,\delta\varphi + \cos\psi\,\delta\theta) = 0,$$

где R — радиус шара. Следовательно, число степеней свободы в рассматриваемом случае составляет $5 - 2 = 3$.

§ 3-93. Виртуальные работы и обобщенные силы

Пусть к точкам A_α системы приложены какие-нибудь силы $\mathbf{P}_\alpha$. Если выбрать любые бесконечно малые виртуальные перемещения, определяемые виртуальными изменениями $\delta\mathbf{r}_\alpha$ радиусов-векторов точек системы или соответствующими виртуальными скоростями $\mathbf{U}_\alpha$, связанными с виртуальными изменениями радиусов-векторов формулой $\mathbf{U}_\alpha = \dfrac{\delta\mathbf{r}_\alpha}{\delta t}$, то скалярное произведение вектора силы $\mathbf{P}_\alpha$ на вектор $\delta\mathbf{r}_\alpha$ виртуального перемещения точки приложения силы называется *виртуальной работой* этой силы и обозначается

$$\delta A(\mathbf{P}_\alpha) = (\mathbf{P}_\alpha,\ \delta\mathbf{r}_\alpha) = (\mathbf{P}_\alpha,\ \mathbf{U}_\alpha)\,\delta t. \tag{3-379}$$

Формально виртуальная работа обладает всеми свойствами элементарной работы dA. В частности, аналитически виртуальная работа выражается формулой

$$\delta A(\mathbf{P}_\alpha) = P_{\alpha x}\,\delta x_\alpha + P_{\alpha y}\,\delta y_\alpha + P_{\alpha z}\,\delta z_\alpha. \tag{3-380}$$

Если даны уравнения (3-375) системы в обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$, то виртуальная работа выражается формулой

$$\delta A(\mathbf{P}_\alpha) = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbf{P}_\alpha, \frac{\partial\mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\right)\delta q_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left(P_{\alpha x}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} + P_{\alpha y}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k} + P_{\alpha z}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k}\right)\delta q_k. \tag{3-381}$$

Сумма виртуальных работ сил $\mathbf{P}_\alpha$, приложенных к точкам системы, выражается формулой

$$\sum_\alpha \delta A(\mathbf{P}_\alpha) = \delta q_1 \sum_\alpha\left(\mathbf{P}_\alpha, \frac{\partial\mathbf{r}_\alpha}{\partial q_1}\right) + \delta q_2 \sum_\alpha\left(\mathbf{P}_\alpha, \frac{\partial\mathbf{r}_\alpha}{\partial q_2}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \delta q_n \sum_\alpha\left(\mathbf{P}_\alpha, \frac{\partial\mathbf{r}_\alpha}{\partial q_n}\right). \tag{3-382}$$

Сумма скалярных произведений векторов сил, приложенных к точкам системы, на частную производную радиуса-вектора точки приложения

силы по одной и той же для всех точек системы обобщенной координате называется *соответствующей обобщенной силой*, созданной силами, приложенными к точкам системы.

Обобщенные силы $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ выражаются формулами:

$$Q_k = \sum_\alpha \left(\mathbf{P}_\alpha \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\right) = \sum_\alpha \left(P_{\alpha x}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} + P_{\alpha y}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k} + P_{\alpha z}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k}\right). \quad (3\text{-}383)$$

Через обобщенные силы сумма виртуальных работ (3-383) приложенных сил выражается формулой

$$\sum_\alpha \delta A\,(\mathbf{P}_\alpha) = Q_1\delta q_1 + Q_2\delta q_2 + \ldots + Q_n\delta q_n. \quad (3\text{-}384)$$

Если, в частности, для получения виртуального перемещения дать приращение только одной обобщенной координате, например положить $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = \ldots = \delta q_n = 0$, то для Q_1 получится формула

$$Q_1 = \frac{\sum_\alpha \delta A_1\,(\mathbf{P}_\alpha)}{\delta q_1},$$

т. е. обобщенная сила определяется как отношение суммы виртуальных работ сил, приложенных к точкам системы, при изменении только одной обобщенной координаты, к величине приращения этой координаты. Следовательно, размерность обобщенной силы зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты и выражается формулой $[Q] = \frac{[\delta A]}{[q]}$.

Для тела, вращающегося около неподвижной оси OO', при выборе за обобщенную координату угла поворота тела, обобщенной силой является сумма моментов сил, приложенных к телу, около оси вращения OO'.

§ 3-94. Обобщенная силовая функция

Если силы $\mathbf{P}_\alpha$, приложенные к точкам системы, зависят только от момента времени t и положения точек, то обобщенные силы окажутся некоторыми функциями времени t и обобщенных координат системы:

$$Q_k = Q_k\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n). \quad (3\text{-}385)$$

Если при этом формула (3-384) для суммы виртуальных работ окажется полным дифференциалом относительно обобщенных координат некоторой функции $V\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)$, зависящей, вообще, и от времени t, т. е.

$$Q_1\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_1 + Q_2\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_2 + \ldots$$
$$\ldots + Q_n\,(t;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_n = dV, \quad (3\text{-}386)$$

то эта функция V называется *обобщенной силовой функцией* для системы сил $\mathbf{P}$. Из формулы (3-386) следует, что в случае существования обобщенной силовой функции обобщенные силы выражаются как

частные производные от этой функции по соответствующим обобщенным координатам, т. е.

$$Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}. \tag{3-387}$$

Если силы $\mathbf{P}_\alpha$ для каждого момента имеют обыкновенную силовую функцию U, зависящую от t и координат точек приложения $U = U(t; \ldots; x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha, \ldots)$, то обобщенная функция получается просто подстановкой в функцию U вместо координат x_α, y_α, z_α их выражений по формулам (3-376) из уравнений системы. Если силы $\mathbf{P}_\alpha$ не зависят от времени t и связи стационарны, то и обобщенная силовая функция будет выражаться только через обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. По аналогии с потенциальной энергией функция

$$\Pi = -V \tag{3-388}$$

называется *потенциальной энергией системы* в данном силовом поле.

§ 3-95. Совершенные связи и начало возможных перемещений

Если сумма виртуальных работ реакций $\mathbf{R}_\alpha$ связей при любых заданных силах $\mathbf{F}_\alpha$, приложенных к точкам системы, и при любом кинематическом состоянии системы оказывается равной нулю, то связи называются *виртуально совершенными*, короче, *совершенными* или *идеальными*. Если система с совершенными связями под действием заданных сил, зависящих только от положения точек приложения, находится в состоянии покоя, то сумма виртуальных работ этих сил при любом виртуальном перемещении системы из положения равновесия равна нулю. Обратно, если в некотором положении системы оказывается, что сумма виртуальных работ заданных сил при любом виртуальном перемещении системы из этого положения равна нулю, то система, помещенная в это положение, при начальных скоростях, равных нулю, останется в состоянии покоя. В этом состоит *начало виртуальных скоростей*, или *начало возможных перемещений*. Оно выражается формулами:

$$\sum_\alpha \delta A(\mathbf{F}_\alpha) = 0 \tag{3-389}$$

или

$$\sum_\alpha (\mathbf{F}_\alpha, \mathbf{U}_\alpha) = 0, \tag{3-390}$$

где $\mathbf{U}_\alpha$ — векторы виртуальных скоростей.

Аналитически в координатных осях уравнения (3-389) и (3-390) принимают вид:

$$\sum_\alpha (\mathbf{F}_{\alpha x}\,\delta x_\alpha + \mathbf{F}_{\alpha y}\,\delta y_\alpha + \mathbf{F}_{\alpha z}\,\delta z_\alpha) = 0. \tag{3-391}$$

Это уравнение называется *общим уравнением аналитической системы*. Оно должно выполняться для всех значений виртуальных приращений координат, удовлетворяющих уравнениям (3-373) и (3-374), накладываемым на эти приращения конечными и неинтегрируемыми уравнениями связей.

§ 3-96. Множители Лагранжа

Если число точек системы равно n и все уравнения связей конечные, т. е. имеют вид:

$$f_j(x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, s), \tag{3-392}$$

то уравнение (3-391) заменяется системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_{kx} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k} = 0, \qquad P_{ky} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k} = 0, \\ P_{kz} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \tag{3-393}$$

которые вместе с уравнениями (3-392) образуют систему из $3n + s$ уравнений, определяющих $3n$ координат точек системы в положении равновесия и s множителей λ_j.

§ 3-97. Уравнения равновесия голономной системы в обобщенных координатах

В обобщенных координатах $q_1, q_2, \ldots, q_n$ при заданных силах $\mathbf{F}_\alpha$, зависящих только от положения точек приложения, уравнение равновесия (3-389) системы принимает вид:

$$Q_1(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_1 + Q_2(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_2 + \ldots$$
$$\ldots + Q_n(q_1, q_2, \ldots, q_n)\,\delta q_n = 0. \tag{3-394}$$

Если система голономна, то приращения $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_n$ совершенно произвольны, и уравнение (3-394) распадается на n уравнений:

$$Q_k(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{3-395}$$

т. е. в положении равновесия голономной системы под действием заданных сил все обобщенные силы должны равняться нулю. Если существует обобщенная силовая функция $V(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, т. е. $Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}$, то уравнения равновесия (3-395) принимают вид:

$$\frac{\partial V}{\partial q_k} = 0, \tag{3-396}$$

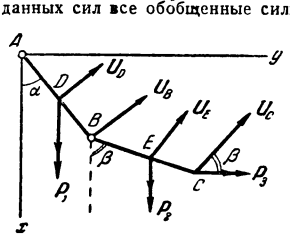


Рис. 3-71.

т. е. совпадают с необходимыми условиями экстремума обобщенной силовой функции. Если, в частности, заданные силы $\mathbf{P}_\alpha$ являются весами точек системы, т. е. $\mathbf{P}_\alpha = m_\alpha \mathbf{g}$, то обыкновенная силовая функция для случая, когда ось z направлена вертикально вверх, имеет вид: $U = -\sum_\alpha P_\alpha z_\alpha = -Pz_C$, где z_C — координата центра тяжести системы.

Следовательно, уравнение равновесия $dV = 0$ принимает вид: $dz_C = 0$, а это означает, что у системы с совершенными связями в положении равновесия центр тяжести под действием сил тяжести должен занимать наинизшее или наивысшее положение. В этом состоит *принцип Торричелли.*

Пример. Однородные стержни AB и BC веса P и длины $2a$ каждый скреплены шарниром B. Конец A закреплен в вертикальной плоскости неподвижным шарниром, а к концу C приложена горизонтальная сила $\frac{P}{2}$. Определить углы α и β при равновесии (рис. 3-71).

Система имеет две степени свободы. Обобщенными координатами служат $q_1 = \alpha$ и $q_2 = \beta$.

Для вычисления обобщенной силы Q_1 изменяем угол α, оставляя неизменным угол β. Тогда стержень BC перемещается поступательно и

$$Q_1 = \frac{(\mathbf{P}_1, \mathbf{U}_D)\,\delta t + (\mathbf{P}_2, \mathbf{U}_B)\,\delta t + (\mathbf{P}_3, \mathbf{U}_B)\,\delta t}{\delta\alpha} =$$

$$= -Pa\sin\alpha - P \cdot 2a\sin\alpha + Pa\sin\alpha,$$

так как $U_D = a\frac{\delta\alpha}{\delta t}$, $U_B = 2a\frac{\delta\alpha}{\delta t}$. Для вычисления Q_2 изменяем угол β, оставляя неизменным угол α. Тогда стержень AB остается неподвижным, а стержень BC вращается вокруг шарнира B, и

$$Q_2 = \frac{(\mathbf{P}_2, \mathbf{U}_E)\,\delta t + (\mathbf{P}_3, \mathbf{U}_C)\,\delta t}{\delta\beta} = -Pa\sin\beta + Pa\cos\beta.$$

Следовательно, уравнения равновесия $Q_1 = 0$ и $Q_2 = 0$ дают $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta = 1$.

Глава 3-10

НАЧАЛО Д'АЛАМБЕРА

§ 3-98. Сила инерции

Если материальная частица массы m вследствие воздействия на нее некоторых тел получает по отношению к инерциальной системе ускорение $\mathbf{w}$, то по принципу равенства действия и противодействия сумма векторов сил, измеряющих действие движущейся частицы на тела, сообщающие ей ускорение, изображается вектором

$$\Phi = -m\mathbf{w}. \tag{3-397}$$

Этот вектор называется *силой инерции* движущейся точки. Сам по себе он является свободным, но если его приложить к самой движущейся частице, то его можно рассматривать как фиктивную, т. е. физически не существующую, силу, и тогда он называется *д'Аламберовой силой инерции.* Формально с вектором силы инерции можно производить все математические операции, какие производятся над векторами физических сил. Так, проекции силы инерции на оси основной инерциальной системы отсчета выражаются формулами:

$$\Phi_x = -m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \Phi_y = -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad \Phi_z = -m\frac{d^2z}{dt^2}. \tag{3-398}$$

Если вектор Φ разложить на компоненты, направленные по главной

нормали и по касательной к траектории движущейся точки, то эти компоненты выразятся через орты $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\tau}$ главной нормали и касательной формулами:

$$\Phi_n = -\frac{mv^2}{\rho}\mathbf{n}, \quad \Phi_\tau = -m\frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \tag{3-399}$$

где v — алгебраическая скорость, а ρ — радиус кривизны траектории. Первый компонент Φ_n направлен противоположно нормальному ускорению $\mathbf{w}_n$ и называется *нормальной д'Аламберовой силой инерции*, второй Φ_τ направлен противоположно касательному ускорению $\mathbf{w}_\tau$ и называется *касательной д'Аламберовой силой инерции*. Если точка подчинена связи и сила инерции имеет одним из своих компонентов давление точки на эту связь, то нормальный компонент силы инерции является одним из компонентов силы давления точки на связь и называется *центробежной силой*. Центробежная сила является реальной физической силой, приложенной к телу, осуществляющему наложенную на движущуюся точку связь.

Если движется твердое тело, то система д'Аламберовых фиктивных сил инерции его частиц формально подчиняется всем законам геометрической статики, относящимся к системе внешних сил, приложенных к твердому телу, т. е. приводится к главному вектору $\mathbf{R}$ и к главному моменту M_O. Главный вектор $\mathbf{R}$ сил инерции всегда выражается формулой

$$\mathbf{R} = \sum_\alpha \Phi_\alpha = -\sum_\alpha m_\alpha \mathbf{w}_\alpha = -m\mathbf{w}_C, \tag{3-400}$$

где $\mathbf{w}_C$ обозначает ускорение центра тяжести тела. Если тело вращается вокруг оси z с алгебраической угловой скоростью ω и алгебраическим угловым ускорением ε, то проекции главного момента M_O сил инерции около начала O выражаются формулами:

$$M_{Ox} = \varepsilon I_{xz} - \omega^2 I_{yz}, \quad M_{Oy} = \varepsilon I_{yz} + \omega^2 I_{xz}, \quad M_{Oz} = -\varepsilon I_{zz}, \tag{3-401}$$

где I_{zz} — момент инерции около оси вращения, I_{xz}, I_{yz} — произведения инерции. В случае равномерного вращения $\varepsilon = 0$ силы инерции сводятся к своим нормальным компонентам, направленным по радиусам вращения точек от центра, и главный момент центробежных сил имеет компоненты:

$$M_{Ox} = -\omega^2 I_{yz}, \quad M_{Oy} = \omega^2 I_{xz}, \quad M_{Oz} = 0. \tag{3-401'}$$

Поэтому здесь произведения инерции иначе называются *центробежными моментами инерции*. Если тело представляет собой плоскую пластинку, вращающуюся в своей плоскости около центра O, то плоская система сил инерции приводится к одной равнодействующей, вектор которой по формуле (3-400) определяется значением $m\mathbf{w}_C$, а линия действия пересекает радиус вращения $OC = a$ центра тяжести в точке O' так, что $OO' = \dfrac{I_0}{ma}$, т. е. в центре качания пластинки, рассматриваемой как физический маятник, ось вращения которого проходит через центр O.

§ 3-99. Кинетостатический метод

При движении системы в любой момент времени векторы заданных активных сил $\mathbf{F}_\alpha$, приложенных к точкам A_α системы, реактивных сил $\mathbf{R}_\alpha$, возникающих от наложенных в данный момент на систему связей,

и построенных по ускорениям $\mathbf{w}_\alpha$ сил инерции Φ_α связаны уравнением

$$\mathbf{F}_\alpha + \mathbf{R}_\alpha + \Phi_\alpha = 0. \tag{3-402}$$

Так как это уравнение формально совпадает с условием уравновешенности сил, приложенных к точке A_α, то его можно истолковать следующим образом. Если поместить систему в то положение, через которое она проходит при реальном движении в данный момент t, наложить на нее стационарно те связи, которые наложены в этот момент на движущуюся систему, и приложить к ее точкам постоянные силы, равные значениям векторов $\mathbf{F}_\alpha$, $\mathbf{R}_\alpha$, Φ_α данных реактивных и инерциальных сил, соответствующих взятому моменту времени, то в этом положении при указанных фиктивных условиях система останется в состоянии покоя. Обратно, если предположить, что в рассматриваемом положении система находится в состоянии покоя, когда к ее точкам приложены силы $\mathbf{F}_\alpha$ и Φ_α, рассматриваемые как заданные, и система подчинена тем связям, какие в данный момент времени наложены на реально движущуюся систему, то вычисленные по правилам статики реакции $\mathbf{R}_\alpha$ будут равны тем значениям динамических реакций, которые соответствуют взятому моменту t. Как следствие, из уравнений (3-402) вытекает утверждение, что в любой момент времени совокупность векторов $\mathbf{F}_\alpha$, $\mathbf{R}_\alpha$, Φ_α (они изображают заданные реактивные и инерциальные силы, приложенные к точкам движущейся системы) должна удовлетворять всем математическим уравнениям, которым удовлетворяют векторы сил при равновесии системы в том положении, через которое реально движущаяся система проходит во взятый момент, и при наличии тех связей, которые на нее в этот момент наложены.

Так как при покое любой механической системы ее количество движения $\mathbf{Q}$ и кинетический момент $\mathbf{L}_O$ тождественно равны нулю, то из уравнений (3-235) и (3-248) следует, что при покое системы внешние силы подчинены уравнениям

$$\sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(e)} = 0 \quad \text{и} \quad \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) = 0, \tag{3-403}$$

а при движении в любой момент времени между реальными внешними силами $\mathbf{P}_\alpha^{(e)}$ и силами инерции Φ_α должны существовать зависимости:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_\alpha \mathbf{P}_\alpha^{(e)} + \sum_\alpha \Phi_\alpha = 0 \\ \text{и} \\ &\sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{P}_\alpha^{(e)}) + \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\Phi_\alpha) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{3-404}$$

Если среди уравнений, которым подчинены силы, приложенные к точкам покоящейся системы, имеются не содержащие сил реакций связей, то из рассмотрения фиктивного равновесия под действием заданных сил $\mathbf{F}_\alpha$ и инерциальных сил Φ_α получаются уравнения, связывающие заданные силы $\mathbf{F}_\alpha$ с ускорениями $\mathbf{w}_\alpha$ точек системы, т. е. получаются *уравнения движения несвободной системы* под действием заданных

сил $\mathbf{F}_\alpha$. Такой метод получения уравнений движения несвободной системы носит название *кинетостатического* и широко используется в теории механизмов (он излагается в отделе теории механизмов и машин).

§ 3-100. Общее уравнение движения систем с совершенными связями

Если связи, наложенные на систему, совершенны, то к фиктивному равновесию под действием заданных $\mathbf{F}_\alpha$ и инерционных сил Φ_α можно приложить начало возможных перемещений, и тогда уравнения (3-389) и (3-391) дадут равенства:

$$\sum_\alpha \delta A(\mathbf{F}_\alpha) + \sum_\alpha \delta A(\Phi_\alpha) = 0 \qquad (3\text{-}405)$$

и

$$\sum_\alpha \left[\left(F_{\alpha x} - m_\alpha \frac{d^2x_\alpha}{dt^2}\right)\delta x_\alpha + \left(F_{\alpha y} - m_\alpha \frac{d^2y_\alpha}{dt^2}\right)\delta y_\alpha + \left(F_{\alpha z} - m_\alpha \frac{d^2z_\alpha}{dt^2}\right)\delta z_\alpha\right] = 0. \qquad (3\text{-}406)$$

Уравнение (3-406) называется *общим уравнением Лагранжа—д'Аламбера для движения систем с совершенными связями*. Оно должно выполняться для всех значений виртуальных приращений δx_α, δy_α, δz_α координат точек системы, удовлетворяющих уравнениям (3-373) и (3-374), выражающим конечные и неинтегрируемые связи, наложенные на систему.

Глава 3-11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

§ 3-101. Уравнения Лагранжа первого рода

Если все связи, наложенные на систему, состоящую из конечного числа точек, выражаются конечными уравнениями

$$f_j(t;\ x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

то общее уравнение динамики (3-406), так же как в аналогичном случае общее уравнение аналитической статики (3-391), заменяется системой $3n$ уравнений:

$$\left.\begin{aligned} m_k \frac{d^2x_k}{dt^2} &= F_{kx} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad m_k \frac{d^2y_k}{dt^2} = F_{ky} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \\ m_k \frac{d^2z_k}{dt^2} &= F_{kz} + \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}407)$$

которые вместе с s уравнениями связей

$$f_j(t;\ x_1, y_1, z_1, \ldots, x_n, y_n, z_n) = 0$$

и с учетом начальных данных определяют $3n$ координат $x_k y_k z_k$ движущихся точек и s множителей λ_j как функции времени. Если эта система уравнений проинтегрирована, то проекции реакции $\mathbf{R}_k$, приложенной к точке A_α системы, для данного момента времени определяются формулами:

$$R_{kx} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial x_k}, \quad R_{ky} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial y_k}, \quad R_{kz} = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial z_k}. \tag{3-408}$$

§ 3-102. Обобщенные скорости

Если голономная система задана уравнениями (3-375)

$$\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha (t;\ q_1, \ldots, q_n)$$

или — в координатной форме — уравнениями (3-376) и находится в состоянии определенного движения, то обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ являются определенными функциями времени. Следовательно, рассматривая формулу для $\mathbf{r}_\alpha$ как сложную функцию одного независимого переменного, для геометрической производной $\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt}$ радиуса-вектора получим выражение

$$\frac{d\mathbf{r}_\alpha}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \frac{dq_k}{dt}. \tag{3-409}$$

Производные по времени от обобщенных координат точек движущейся голономной системы называются *обобщенными скоростями* и обозначаются $\dot{q}_k$, т. е.

$$\dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3-410}$$

Из формулы (3-410) для вектора $\mathbf{V}_\alpha$ реальной скорости точки движущейся системы получается выражение:

$$\mathbf{V}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k, \tag{3-411}$$

а для ее проекций:

$$\left.\begin{aligned} V_{\alpha x} &= \frac{\partial x_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k, \quad V_{\alpha y} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k, \\ V_{\alpha z} &= \frac{\partial z_\alpha}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k} \dot{q}_k. \end{aligned}\right\} \tag{3-412}$$

Отсюда для реальных бесконечно малых приращений dx_α, dy_α, dz_α координат точек системы получаются формулы:

$$\left.\begin{aligned} dx_\alpha &= \frac{\partial x_\alpha}{\partial t}\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k}\,dq_k, \quad dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial t}\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_\alpha}{\partial q_k}\,dq_k, \\ dz_\alpha &= \frac{\partial z_\alpha}{\partial t}\,dt + \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial z_\alpha}{\partial q_k}\,dq_k. \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}413)$$

Эти формулы показывают, что, если даже выбрать виртуальные приращения δq_k так, что $\delta q_k = dq_k$, все же, вообще, $dx_\alpha \neq \delta x_\alpha$, $dy_\alpha \neq \delta y_\alpha$, $dz_\alpha \neq \delta z_\alpha$, т. е. реальные перемещения точек системы в течение бесконечно малого промежутка времени от данного момента t до бесконечно близкого ему $t + dt$ не принадлежат к числу воображаемых, виртуальных перемещений, возможных в тот же момент t. Но если связи стационарны, то $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial t} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial t} = 0$, и тогда, выбирая $\delta q_k = dq_k$, получим: $dx_\alpha = \delta x_\alpha$, $dy_\alpha = \delta y_\alpha$, $dz_\alpha = \delta z_\alpha$, т. е. в случае стационарных связей реальные бесконечно малые перемещения точек системы принадлежат к числу виртуальных. Отсюда следует, что виртуально совершенные связи окажутся и актуально совершенными при реальном движении системы, потому что для суммы элементарных реальных работ сил реакции в этом случае получим:

$$\sum_\alpha dA\,(\mathbf{R}_\alpha) = \sum_\alpha \delta A\,(\mathbf{R}_\alpha) = 0.$$

В общем же случае реономных виртуально совершенных связей они актуально совершенными не будут, так как

$$\sum_\alpha \delta A\,(\mathbf{R}_\alpha) \neq \sum_\alpha dA\,(\mathbf{R}_\alpha) \neq 0.$$

§ 3-103. Кинетическая энергия в обобщенных скоростях

На основании формулы (3-411) кинетическая энергия точки системы выразится формулой

$$\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} = \frac{m_\alpha}{2}(\mathbf{V}_\alpha, \mathbf{V}_\alpha) = \frac{m_\alpha}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}\right) + m_\alpha\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}, \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}\dot{q}_k\right) +$$

$$+ \frac{m_\alpha}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j}\right)\dot{q}_k\dot{q}_j. \quad (3\text{-}414)$$

Следовательно, суммируя по всем точкам системы, получаем следующую формулу для ее кинетической энергии:

$$T = T_0 + T_1 + T_2, \tag{3-415}$$

где

$$T_0 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t} \right), \tag{3-416}$$

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) \right) \dot{q}_k, \tag{3-417}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} \left(\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \right) \dot{q}_k \dot{q}_j. \tag{3-418}$$

Если обозначить:

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial t}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k} \right) = B_k (t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n), \tag{3-419}$$

$$\sum_{\alpha} m_\alpha \left(\frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_k}, \frac{\partial \mathbf{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) = A_{kj} (t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n), \tag{3-420}$$

то

$$T_1 = \sum_{k=1}^{n} B_k (t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)\, \dot{q}_k,$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj} (t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)\ \dot{q}_k \dot{q}_j. \tag{3-421}$$

Следовательно, формула (3-415) дает кинетическую энергию как сумму трех выражений T_0, T_1, T_2, первое из которых зависит только от времени t и обобщенных координат, второе T_1 представляет собой линейную форму относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_k$ с коэффициентами, зависящими от времени и обобщенных координат, а третье T_2 — квадратичную форму относительно обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими от времени и обобщенных координат. В случае стационарных связей $T_0 = T_1 = 0$, и формула для T получает вид:

$$T = T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj} (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_n)\, \dot{q}_k \dot{q}_j, \tag{3-422}$$

т. е. в этом случае кинетическая энергия представляется в виде квадратичной формы относительно обобщенных скоростей с коэффициентами, зависящими только от обобщенных координат.

§ 3-104. Сумма виртуальных работ сил инерции

Если в формулу

$$\sum_{\alpha} \delta A\,(\Phi_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \delta A\,(-m_{\alpha}\mathrm{w}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} \delta A\left(-\frac{d\,(m_{\alpha}\mathrm{V}_{\alpha})}{dt}\right)$$

вставить вместо V_{α} ее выражение по формуле (3-411), то сумма виртуальных работ сил инерции представится через выражение для кинетической энергии по формуле (3-415) в виде:

$$\sum_{\alpha} \delta A\,(\Phi_{\alpha}) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\right] \delta q_k. \qquad (3\text{-}423)$$

При вычислении производной $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)$ выражение для $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ надо рассматривать как сложную функцию переменной t, зависящую от аргументов t; $q_1, \ldots, q_n$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, так что в эту формулу войдут еще производные $\dot{q}_k$ от обобщенных скоростей по времени, т. е. производные второго порядка от обобщенных координат по времени.

§ 3-105. Уравнения Лагранжа второго рода

Если формулу (3-423) для $\sum_{\alpha} \delta A\,(\Phi_{\alpha})$ внести в общее уравнение (3-405) динамики, то оно примет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} \left[Q_k + \frac{\partial T}{\partial q_k} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right)\right] \delta q_k = 0, \qquad (3\text{-}424)$$

а затем, так же как общее уравнение (3-394) статики, распадется на n уравнений:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (3\text{-}425)$$

При этом Q_k обозначают обобщенные силы, вычисленные по формуле (3-383) через заданные силы F_{α}. Так как векторы F_{α} выражены через момент времени t, координаты точек системы и векторы скоростей точек приложения, то в конечном счете при помощи формул (3-376) и (3-411) обобщенные силы Q_k представятся как некоторые функции аргументов t; $q_1, \ldots, q_n$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$, т. е.

$$Q_k = Q_k\,(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n). \qquad (3\text{-}426)$$

Так как левые части в формулах (3-425) представляют собой некоторые выражения, зависящие от t; $q_1, \ldots, q_n$; $\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n$; $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$, то система уравнений (3-425) математически представляет собой систему n дифференциальных уравнений второго порядка с одним независимым переменным t и искомыми функциями $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Эти дифференциальные уравнения (3-425) называются *уравнениями Лагранжа второго рода* для движения голономной системы с n степенями свободы

под действием заданных сил $\mathbf{F}_\alpha$. Если даны начальные положения и начальные скорости точек системы, допускаемые наложенными на нее связями, то это значит, что для начального значения t_0 времени даны значения $q_k^{(0)}$ и $\dot{q}_k^{(0)}$ обобщенных координат и обобщенных скоростей, и тогда эти начальные данные определяют решения дифференциальных уравнений (3-425) и тем самым — движение системы, соответствующее начальным физическим условиям.

Если для заданных сил $\mathbf{F}_\alpha$ существует обобщенная силовая функция $V(t;\ q_1, \ldots, q_n)$, определяемая формулой (3-386), т. е. $Q_k = \dfrac{\partial V}{\partial q_k}$, то уравнения Лагранжа (3-425) можно написать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial (T+V)}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3-427}$$

Сумма $T + V = T - \Pi$, где Π обозначает согласно формуле (3-388) потенциальную энергию системы, называется *лагранжевым*, или *кинетическим*, *потенциалом* системы и обозначается

$$L = T - \Pi. \tag{3-428}$$

Математически Π представляется как функция аргументов

$$t;\ q_1, \ldots, q_n,$$

потому что силы $\mathbf{F}_\alpha$, создающие обобщенную силовую функцию, зависят только от момента t и от положения точек системы, но не от их скорости; отсюда

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}. \tag{3-429}$$

Следовательно, формально уравнения (3-427) можно писать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3-430}$$

Пример. Составить уравнение Лагранжа для движения математического маятника длины l, точка C подвеса которого движется по

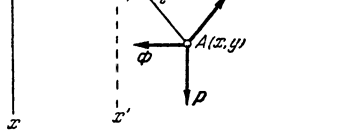


Рис. 3-72.

заданному закону по горизонтальной оси y. Пусть закон движения точки C дан формулой: $OC = f(t)$. Беря за обобщенную координату q угол, составляемый нитью маятника с вертикалью, получим (рис. 3-72):

$$x = l \cos q;\ y = f(t) + l \sin q.$$

Отсюда:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -l \sin q \cdot \dot{q}, \quad V_y = \frac{dy}{dt} = f'(t) + l \cos q \cdot \dot{q},$$

$$T = \frac{m}{2} [l^2 \dot{q}^2 + 2lf'(t) \cos q \cdot \dot{q} + f'^2(t)].$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = ml^2 \dot{q} + mlf'(t) \cos q, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = -mlf'(t) \sin q \cdot \dot{q}.$$

Обобщенная сила

$$Q = mg \frac{\partial x}{\partial q} = -mgl \sin q.$$

Отсюда уравнение Лагранжа:

$$ml^2 \ddot{q} + mlf''(t) \cos q - mlf'(t) \sin q \cdot \dot{q} + mlf'(t) \sin q \cdot \dot{q} = mgl \sin q,$$

или

$$\ddot{q} + \frac{g}{l} \sin q = -\frac{f''(t)}{l} \cos q.$$

Это же уравнение получится, если рассмотреть относительное движение маятника в осях $Cx'y'$, вводя переносную силу Φ Кориолиса. Так как $\Phi \parallel Cy$ и $\Phi_y = -m\ddot{f}''(t)$, то уравнение относительного движения по формуле (3-206) будет:

$$ml\ddot{q} = -mg \sin q - mf''(t) \cos q,$$

т. е.

$$\ddot{q} + \frac{g}{l} \sin q = -\frac{f''(t)}{l} \cos q.$$

§ 3-106. Интеграл энергии

Если выражение потенциала L по формуле (3-429) не содержит явно аргумента t, т. е.

$$L = L(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \tag{3-431}$$

то уравнения Лагранжа (3-430) имеют *первый интеграл* в виде равенства:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k - L = h, \tag{3-432}$$

где h обозначает постоянную величину, сохраняющую одно и то же значение в течение всего движения. Этот случай независимости кинетического потенциала явно от времени имеет место заведомо при стационарных связях. В этом случае кинетическая энергия T по формуле (3-421) является однородной формой относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_k$, а потому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \dot{q}_k = 2T,$$

и формула (3-432) получает вид:

$$T + \Pi = h, \tag{3-433}$$

т. е. выражает *закон сохранения полной механической энергии.*

§ 3-107. Обобщенные импульсы

Производные от кинетического потенциала по обобщенным скоростям называются *обобщенными импульсами* и обозначаются r_k так что

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3-434}$$

Если какая-нибудь обобщенная координата q_j не входит явно в выражение кинетического потенциала, т. е. $\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$, то эта обобщенная координата называется *циклической*, а соответствующий ей обобщенный импульс $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ — *циклическим*. Для циклических обобщенных координат q_j уравнения Лагранжа (3-430) дают равенства

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = \alpha_j, \tag{3-435}$$

где α_j постоянны. Эти равенства называются *циклическими интегралами уравнений Лагранжа*. Они могут быть записаны в виде:

$$p_j = \alpha_j, \tag{3-436}$$

т. е. циклические обобщенные импульсы остаются постоянными в течение всего движения. Например, при движении свободной точки в плоскости под действием центральной силы, величина которой зависит только от расстояния точки до центра силы, принимая за обобщенные координаты полярные координаты ρ и φ, будем иметь:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2), \quad \Pi = f(\rho), \quad L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2) - f(\rho),$$

так что координата φ является циклической; циклический импульс $p_\varphi = m\rho^2\dot{\varphi}$ и циклический интеграл (3-436) принимает вид: $\rho^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const}$, что согласно формуле (3-160) выражает постоянство секторной скорости относительно центра силы.

§ 3-108. Канонические уравнения

Формулы (3-434), определяющие обобщенные импульсы на основании формул (3-421), представляют собой систему линейных уравнений относительно обобщенных скоростей $\dot{q}_k$, которые из этих уравнений можно выразить через t, $q_1, q_2, \ldots, q_n$; $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Если эти выражения вставить в формулу

$$\sum_{k=1}^{n} p_k\dot{q}_k - L(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n),$$

то полученная функция

$$H(t; q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = \sum_{k=1}^{n} p_k \dot{q}_k - L(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \quad (3\text{-}437)$$

называется *характеристической функцией Гамильтона*. Если связи стационарны, то на основании формулы (3-433) функция H выражает *полную механическую энергию системы*. С помощью характеристической функции систему (3-430) уравнений Лагранжа можно заменить системой $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \quad (3\text{-}438)$$

Эти уравнения называются *каноническими уравнениями движения голономной системы* под действием сил, имеющих обобщенную силовую функцию. В случае стационарных связей система (3-438) имеет интеграл

$$H(q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) = h, \quad (3\text{-}439)$$

выражающий *закон сохранения механической энергии*.

Глава 3-12

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ

§ 3-109. Устойчивое равновесие

Положение покоя системы, подчиненной стационарным связям и находящейся под действием заданных сил, называется *устойчивым равновесием*, если в случае любого достаточно малого изменения ее положения и сообщения ее точкам любых достаточно малых скоростей она будет оставаться сколь угодно близкой к рассматриваемому положению все последующее время.

Пусть положение равновесия определяется нулевыми значениями обобщенных координат q_k, а начальные значения обобщенных координат и обобщенных скоростей равны $q_k^{(0)}$ и $\dot{q}_k^{(0)}$. Положение равновесия устойчиво, если при наперед заданных положительных достаточно малых ε и ε_1 можно указать такие зависящие от ε и ε_1 положительные числа η и η_1, что при выполнении условий $|q_k^{(0)}| < \eta$, $|\dot{q}_k^{(0)}| < \eta_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ в течение всего последующего времени движения будут выполняться неравенства $|q_k| < \varepsilon$, $|\dot{q}_k| < \varepsilon_1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Если система находится под действием заданных сил $\mathbf{F}_\alpha$, создающих обобщенную силовую функцию, и, следовательно, имеет потенциальную энергию $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$, то достаточное условие устойчивости равновесия дается *теоремой Лежен — Дирихле*: если в положении равновесия системы ее потенциальная энергия имеет минимум, то это положение равновесия устойчиво. Если заданные силы $\mathbf{F}_\alpha$ являются силами тяжести точек системы, то потенциальная энергия достигает минимума, когда центр тяжести системы занимает наинизшее из возможных положений.

Для применения теоремы Дирихле существенно, чтобы потенциальная энергия $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ зависела от всех обобщенных координат q_k. То движение, которое система совершает после достаточно малого отклонения от положения устойчивого равновесия и при достаточно малых начальных скоростях, называется *малым колебанием системы около положения устойчивого равновесия*.

§ 3-110. Приближенные выражения кинетической и потенциальной энергии при малых колебаниях

Если устойчивое положение равновесия получается при нулевых значениях обобщенных координат, то в формуле для кинетической энергии при стационарных связях $T = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} A_{kj}(q_1, \ldots, q_n)\dot{q}_k\dot{q}_j$ в коэффициенты A_{kj} можно вставить вместо переменных аргументов q_k, остающихся по абсолютной величине малыми, нулевые значения, и тогда, обозначив

$$A_{kj}(0, \ldots, 0) = a_{kj}, \tag{3-440}$$

получим для кинетической энергии приближенную формулу

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} a_{kj}\dot{q}_k\dot{q}_j, \tag{3-441}$$

т. е. при малых колебаниях кинетическая энергия выражается однородной квадратичной формой относительно обобщенных скоростей с постоянными коэффициентами. Формулу для потенциальной энергии $\Pi(q_1, \ldots, q_n)$ можно разложить в ряд Маклорена, т. е.

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) = \Pi(0, \ldots, 0) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_k}\right)_0 q_k + \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n}\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_k \partial q_j}\right)_0 q_k q_j + \ldots$$

В положении равновесия $\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_k}\right)_0 = 0$. Следовательно, обозначив

$$\left(\frac{\partial^2\Pi}{\partial q_k \partial q_j}\right)_0 = c_{kj}, \tag{3-442}$$

получим для потенциальной энергии приближенную формулу

$$\Pi(q_1, \ldots, q_n) = \Pi(0, \ldots, 0) + \frac{1}{2}\sum_{k,j}^{1,\ldots,n} c_{kj}q_k q_j. \tag{3-443}$$

Постоянные коэффициенты a_{kj} в формуле (3-440) называются *квазиинерционными*, а коэффициенты c_{kj} в формуле (3-443) — *квазиупругими коэффициентами системы* при ее малых колебаниях в данном силовом поле. Они зависят от выбора обобщенных координат.

Если, кроме сил поля, создающих потенциальную энергию П, к точкам системы, совершающей малые колебания около положения устойчивого равновесия, других данных сил не приложено, то на основании приближенных формул (3-441) и (3-442) *уравнения Лагранжа* (3-430) примут вид:

$$a_{k1}\ddot{q}_1 + a_{k2}\ddot{q}_2 + \ldots + a_{kn}\ddot{q}_n + c_{k1}q_1 + c_{k2}q_2 + \ldots + c_{kn}q_n = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{3-444}$$

Следовательно, математическая *теория свободных*, т. е. при наличии только заданных сил поля, *малых колебаний* состоит в интегрировании и исследовании системы (3-444) однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

§ 3-111. Свободные малые колебания системы с одной степенью свободы

В случае одной степени свободы уравнения системы (3-376) принимают вид:

$$x_\alpha = x_\alpha(q), \quad y_\alpha = y_\alpha(q), \quad z_\alpha = z_\alpha(q). \tag{3-445}$$

Эти уравнения в то же время являются параметрическими уравнениями траекторий точек системы. Если равновесие имеет место при $q = 0$, то координаты точек в этом положении будут:

$$x_\alpha^{(0)} = x_\alpha(0), \quad y_\alpha^{(0)} = y_\alpha(0), \quad z_\alpha^{(0)} = z_\alpha(0). \tag{3-446}$$

При малых колебаниях приближенные уравнения траектории будут:

$$x_\alpha = x_\alpha^{(0)} + x'_\alpha(0)\,q; \quad y_\alpha = y_\alpha^{(0)} + y'_\alpha(0)\,q;$$
$$z_\alpha = z_\alpha^{(0)} + z'_\alpha(0)\,q. \tag{3-447}$$

Следовательно, малые колебания точек системы с одной степенью свободы приближенно являются прямолинейными и происходят по прямым L_α, касательным к точным траекториям в равновесных положениях. Отклонение s_α точки A_α от ее равновесного положения $A_\alpha^{(0)}$ выражается формулой

$$s_\alpha = \sqrt{x'^2_\alpha(0) + y'^2_\alpha(0) + z'^2_\alpha(0)}\,q. \tag{3-448}$$

Следовательно, приближенная формула (3-441) для кинетической энергии получает вид:

$$T = \frac{\dot{q}^2}{2}\sum_\alpha m_\alpha\left[x'^2_\alpha(0) + y'^2_\alpha(0) + z'^2_\alpha(0)\right]. \tag{3-449}$$

Отсюда инерциальный коэффициент a системы выражается формулой

$$a = \sum_\alpha m_\alpha\left[x'^2_\alpha(0) + y'^2_\alpha(0) + z'^2_\alpha(0)\right]. \tag{3-450}$$

Приближенная формула (3-442) для потенциальной энергии получает вид:

$$\Pi = \Pi(0) + \frac{cq^2}{2}. \tag{3-451}$$

Достаточным условием минимума $\Pi(0)$ будет неравенство $\Pi''(0) > 0$, т. е. $c > 0$. Система (3-444) дифференциальных уравнений сводится к одному уравнению:

$$a\ddot{q} + cq = 0. \tag{3-452}$$

Его физический смысл состоит в том, что оно эквивалентно равенству $\frac{a\dot{q}^2}{2} + \frac{cq^2}{2} = \text{const}$, или $T + \Pi = \text{const}$, т. е. оно выражает *закон сохранения механической энергии*. Полагая

$$\frac{c}{a} = k^2, \tag{3-453}$$

имеем уравнение $\ddot{q} + k^2 q = 0$. Его общее решение имеет вид:

$$q = h \sin(kt + \theta), \tag{3-454}$$

где h и θ — произвольные постоянные. Отсюда для отклонения s_α получается формула

$$s_\alpha = h_\alpha \sin(kt + \theta), \tag{3-455}$$

где

$$h_\alpha = h\sqrt{x'^2_\alpha(0) + y'^2_\alpha(0) + z'^2_\alpha(0)}.$$

Следовательно, при малых колебаниях системы с одной степенью свободы ее точки приближенно совершают малые прямолинейные гармонические колебания с центром в равновесном положении; амплитуды h_α колебания различных точек различны, но фаза $kt + \theta$ у всех точек одна и та же. Период колебания

$$2\tau = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{c}} \tag{3-456}$$

для всех точек один и тот же, и вся система периодически возвращается в положение равновесия. Период $\frac{2\pi}{k}$ называется *собственным периодом системы*, а k — частотой собственных колебаний системы. Она имеет физический смысл, а потому отношение $\frac{a}{c}$ не зависит от выбора обобщенной координаты.

§ 3-112. Свободные малые колебания системы с двумя степенями свободы

В случае двух обобщенных координат q_1 и q_2 формулы (3-441) и (3-443) принимают вид:

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}\dot{q}_2^2);$$

$$\Pi = \Pi(0, 0) + \frac{1}{2}(c_{11}q_1^2 + 2c_{12}q_1q_2 + c_{22}q_2^2).$$

Достаточным условием минимальности $\Pi(0, 0)$ служат неравенства:

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0. \tag{3-457}$$

Уравнения (3-444) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 = 0, \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{3-458}$$

причем $a_{21} = a_{12}$; $c_{21} = c_{12}$.

Для их решения надо составить так называемое *уравнение частот*:

$$\Delta(k^2) = \begin{vmatrix} c_{11} - k^2 a_{11} & c_{12} - k^2 a_{12} \\ c_{21} - k^2 a_{21} & c_{22} - k^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0. \tag{3-459}$$

Оно имеет два положительных корня k_1^2 и k_2^2, лежащих в границах:

$$0 \leqslant k_1^2 \leqslant \frac{c_{11}}{a_{11}}, \quad \frac{c_{22}}{a_{22}} < k_2^2 < \infty, \tag{3-460}$$

если $\frac{c_{11}}{a_{11}} < \frac{c_{22}}{a_{22}}$. Если $k_1^2 \neq k_2^2$, то каждому корню уравнения (3-460) соответствует свое колебание, называемое *главным*. При первом главном колебании обобщенные координаты q_1 и q_2 выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(1)} &= C_1^{(1)}(c_{22} - k_1^2 a_{22}) \sin(k_1 t + \theta_1); \\ q_2^{(1)} &= -C_1^{(1)}(c_{12} - k_1^2 a_{12}) \sin(k_1 t + \theta_1), \end{aligned}\right\} \tag{3-461}$$

где $C_1^{(1)}$ и θ_1 — произвольные постоянные.

При втором главном колебании аналогично

$$\left.\begin{aligned} q_1^{(2)} &= C_2^{(2)}(c_{22} - k_2^2 a_{22}) \sin(k_2 t + \theta_2); \\ q_2^{(2)} &= -C_2^{(2)}(c_{12} - k_2^2 a_{12}) \sin(k_2 t + \theta_2). \end{aligned}\right\} \tag{3-462}$$

Общее же решение уравнений (3-456) имеет вид:

$$q_1 = q_1^{(1)} + q_1^{(2)}; \quad q_2 = q_2^{(1)} + q_2^{(2)}. \tag{3-463}$$

Траектории точек системы с двумя степенями свободы при малых колебаниях приближенно являются плоскими кривыми (так называемые *фигуры Лиссажу*).

Уравнение частот (3-459) имеет равные корни, если

$$\frac{c_{11}}{a_{11}} = \frac{c_{12}}{a_{12}} = \frac{c_{22}}{a_{22}}. \tag{3-464}$$

Если общее значение отношений (3-464) обозначить через k^2, то это k^2 и будет двойным корнем уравнения частот (3-459). В этом случае общее решение системы (3-458) дается формулами:

$$q_1 = C_1 \sin(kt + \theta_1); \quad q_2 = C_2 \sin(kt + \theta_2). \tag{3-465}$$

Траектории точек системы приближенно являются *эллипсами*.

§ 3-113. Затухающие колебания системы с одной степенью свободы

Если к точкам системы, кроме сил $\mathbf{F}_\alpha$ поля, приложены силы $\mathbf{N}_\alpha$ сопротивления, пропорциональные скоростям точек, т. е.

$$\mathbf{N}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{V}_\alpha, \tag{3-466}$$

то наличие этих сил сопротивления уменьшает отклонения точек, а потому движение системы после ее отклонения от положения устойчивого равновесия в поле сил останется малым колебанием, и кинетическая и потенциальная энергии приближенно будут выражаться формулами $T=\frac{a\dot{q}^2}{2}$, $\Pi=\Pi(0)+\frac{cq^2}{2}$. Обобщенная сила Q, созданная силами сопротивления, по формуле (3-383) будет:

$$Q=\sum_{\alpha}\left(-\lambda_{\alpha}\mathbf{V}_{\alpha},\ \frac{\partial\mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q}\right)=-\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left(\frac{\partial\mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q},\ \frac{\partial\mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q}\right)\dot{q}=$$

$$=-\dot{q}\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left|\frac{\partial\mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q}\right|^2=-\dot{q}\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left[x'^2_{\alpha}(q)+y'^2_{\alpha}(q)+z'^2_{\alpha}(q)\right]. \quad (3\text{-}467)$$

При малых колебаниях можно приближенно положить

$$\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left[x'^2_{\alpha}(q)+y'^2_{\alpha}(q)+z'^2_{\alpha}(q)\right]\approx$$

$$\approx\sum_{\alpha}\lambda_{\alpha}\left[x'^2_{\alpha}(0)+y'^2_{\alpha}(0)+z'^2_{\alpha}(0)\right]=\lambda. \quad (3\text{-}468)$$

Следовательно,

$$Q=-\lambda\dot{q}, \quad (3\text{-}469)$$

и *уравнение Лагранжа* получает вид:

$$a\ddot{q}+cq=-\lambda\dot{q}. \quad (3\text{-}470)$$

Его физический смысл состоит в том, что

$$\frac{d(T+\Pi)}{dt}=-\lambda\dot{q}^2<0, \quad (3\text{-}471)$$

а потому механическая энергия системы при наличии сил сопротивления убывает. Функция

$$\Phi=-\frac{\lambda\dot{q}^2}{2} \quad (3\text{-}472)$$

называется *диссипативной функцией Рэлея*. Она характеризует быстроту убывания механической энергии системы. Обозначив

$$\frac{c}{a}=k^2,\quad \frac{\lambda}{a}=2n, \quad (3\text{-}473)$$

придадим уравнению (3-470) вид:

$$\ddot{q}+2n\dot{q}+k^2q=0. \quad (3\text{-}474)$$

Если $k^2-n^2>0$, то общее решение уравнения (3-474) имеет вид:

$$q=he^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2-n^2}\,t+\vartheta\right), \quad (3\text{-}475)$$

где постоянные h и θ определяются по начальным данным q_0 и $\dot{q}_0$ формулами:

$$h = \sqrt{q_0^2 + \frac{(\dot{q}_0 + nq_0)^2}{k^2 - n^2}}, \qquad \operatorname{tg}\theta = \frac{q_0\sqrt{k^2 - n^2}}{\dot{q}_0 + nq_0}.$$

Отклонения s_α точек системы от положения равновесия, даваемые (3-448), выражаются формулой

$$s_\alpha = h_\alpha e^{-nt}\sin\left(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \theta\right), \tag{3-476}$$

где h_α определяется формулой (3-455). Следовательно, точки совершают колебания с периодом

$$2\tau = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \tag{3-477}$$

Абсолютные величины последовательных наибольших отклонений точек от положения равновесия образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем

$$e^{-n\tau} = e^{-\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}}. \tag{3-478}$$

Величина натурального логарифма отношения абсолютных величин предыдущего и последующего наибольших отклонений, т. е. $\frac{n\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$, называется *логарифмическим декрементом колебаний*. Если $n^2 - k^2 > 0$, то общее решение уравнения (3-473) имеет вид:

$$q = e^{-nt}\left(C_1 \operatorname{ch}\sqrt{n^2 - k^2}\,t + C_2 \operatorname{sh}\sqrt{n^2 - k^2}\,t\right). \tag{3-479}$$

Постоянные C_1 и C_2 по начальным данным q_0 и $\dot{q}_0$ определяются формулами:

$$C_1 = q_0, \qquad C_2 = \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{n^2 - k^2}}. \tag{3-480}$$

Движение не носит колебательного характера и называется *апериодическим*. При больших значениях t приближенно можно считать:

$$q \approx \frac{1}{2}(C_1 + C_2)\, e^{-(n - \sqrt{n^2 - k^2})t}, \tag{3-481}$$

а потому $\lim\limits_{t \to \infty} q = 0$ и система асимптотически приближается к положению равновесия.

§ 3-114. Вынужденные колебания при наличии сопротивления

Если на систему, кроме сил $\mathbf{F}_\alpha$ поля и сил сопротивления $\mathbf{N}_\alpha = -\lambda_\alpha \mathbf{V}_\alpha$, действуют еще силы, заданные как функции времени и создающие обобщенную силу $Q(t)$, и система продолжает совершать малые колебания около положения равновесия в поле сил $\mathbf{F}_\alpha$, то приближенное уравнение Лагранжа принимает вид:

$$a\ddot{q} + \lambda\dot{q} + cq = Q(t), \tag{3-482}$$

где по-прежнему кинетическая энергия выражается формулой $T = \frac{a\dot{q}^2}{2}$, потенциальная — формулой $\Pi = \frac{cq^2}{2}$ и обобщенная сила сопротивления — формулой $Q = -\lambda\dot{q}$.

Если уравнение (3-482) согласно обозначениям (3-473) написано в виде: $\ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = \frac{Q(t)}{a}$, то его решение при начальных данных $t_0 = 0$, q_0, $\dot{q}_0$ имеет вид:

при $k > n$

$$q = \left[q_0 \cos\sqrt{k^2 - n^2}\, t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin\sqrt{k^2 - n^2}\, t \right] e^{-nt} + \\ + \frac{1}{a\sqrt{k^2 - n^2}} \int_0^t Q(\xi)\, e^{-n(t-\xi)} \sin\left[\sqrt{k^2 - n^2}\,(t - \xi)\right] d\xi; \tag{3-483}$$

при $n > k$

$$q = \left[q_0 \operatorname{ch}\sqrt{n^2 - k^2}\, t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \operatorname{sh}\sqrt{n^2 - k^2}\, t \right] e^{-nt} + \\ + \frac{1}{a\sqrt{n^2 - k^2}} \int_0^t Q(\xi)\, e^{-n(t-\xi)} \operatorname{sh}\left[\sqrt{n^2 - k^2}\,(t - \xi)\right] d\xi; \tag{3-484}$$

при $k = n$

$$q = [q_0 + (\dot{q}_0 + nq_0)\, t]\, e^{-nt} + \frac{1}{a} \int_0^t Q(\xi)\, e^{-n(t-\xi)}\, (t - \xi)\, d\xi. \tag{3-485}$$

Первые части в этих формулах представляют затухающие колебания, получающиеся без добавочной обобщенной силы $Q(t)$. Последние же интегральные члены определяют так называемое *вынужденное малое колебание*. Так как затухающие колебания практически быстро уменьшаются, то через некоторый промежуток времени все движение системы сводится к вынужденным колебаниям.

Наиболее важен случай гармонической обобщенной силы, выражаемой формулой

$$Q = H \sin(pt + \delta).$$

В этом случае при начальных данных $t_0 = 0$, q_0, $\dot{q}_0$ и при $k > n$ решение уравнения (3-482) принимает вид:

$$q = e^{-nt}\left[q_0 \cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{\dot{q}_0 + nq_0}{\sqrt{k^2-n^2}} \sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right] - e^{-nt}\left[\sin(\delta-\varepsilon)\cos\sqrt{k^2-n^2}\,t + \frac{p\cos(\delta-\varepsilon) + n\sin(\delta-\varepsilon)}{\sqrt{k^2-n^2}} \sin\sqrt{k^2-n^2}\,t\right] + A\sin(pt+\delta-\varepsilon), \quad (3\text{-}486)$$

где

$$A = \frac{H}{a\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}, \quad (3\text{-}487)$$

$$\cos\varepsilon = \frac{k^2-p^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}, \qquad \sin\varepsilon = \frac{2np}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}}. \quad (3\text{-}488)$$

Так как первые два члена в формуле (3-486) представляют затухающие колебания, то в этом случае вынужденными называются колебания, определяемые последним членом $A\sin(pt+\delta-\varepsilon)$. Это — колебания гармонические с амплитудой A и фазой $pt+\delta-\varepsilon$. Период их $2\tau = \frac{2\pi}{p}$ совпадает с периодом сил Q, определяемым формулой (3-486), а фаза $pt+\delta-\varepsilon$ сдвинута сравнительно с фазой $pt+\delta$ на угол ε. Если бы система была отклонена от положения равновесия в поле сил F_α постоянной обобщенной силой величины H и находилась бы в состоянии покоя, то обобщенная координата в новом положении покоя имела бы значение $A_0 = \frac{H}{ak^2}$. Отношение амплитуды A вынужденных колебаний при обобщенной силе $Q = H\sin(pt+\delta)$ к статическому отклонению A_0 называется *коэффициентом динамичности*:

$$\frac{A}{A_0} = \lambda = \frac{k^2}{\sqrt{(k^2-p^2)^2+4n^2p^2}},$$

или

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{p}{k}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2\left(\frac{p}{k}\right)^2}}. \quad (3\text{-}489)$$

Обозначив

$$\frac{p}{k} = z, \qquad \frac{n}{k} = \delta, \quad (3\text{-}490)$$

придадим формуле для коэффициента динамичности вид:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)^2 + 4\delta^2 z^2}}. \quad (3\text{-}491)$$

При постоянном δ этот коэффициент λ достигает максимального значения при $z = \sqrt{1-2\delta^2}$, если $\delta < \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$, т. е. если $n \leqslant 0{,}707\, k$.

Максимальное значение $\lambda_{\text{макс}} = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$. При совпадении частоты k свободных колебаний с частотой p вынуждающей обобщенной силы Q, т. е. при $z = 1$, λ получает значение

$$\lambda_r = \frac{1}{2\delta}. \tag{3-492}$$

Этот случай называется *резонансом*. При совпадении частоты p с частотой $\sqrt{k^2-n^2}$ затухающих колебаний, т. е. при $z = \sqrt{1-\delta^2}$, λ получает значение

$$\lambda^* = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\frac{3}{4}\delta^2}}. \tag{3-493}$$

При небольшом сопротивлении λ_r и λ^* весьма близки к $\lambda_{\text{макс}}$, как это видно из таблицы (заимствована из курса теоретической механики Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье, т. II, стр. 467).

δ	$z_m = \sqrt{1-2\delta^2}$	$\lambda_{\text{макс}}$	λ_r	λ^*
0,05	0,9975	10,013	10,000	10,010
0,10	0,9899	5,025	5,000	5,019
0,15	0,9772	3,371	3,333	3,362
0,20	0,9695	2,552	2,500	2,538
0,25	0,9357	2,065	2,000	2,049
0,30	0,9055	1,747	1,667	1,726
0,40	0,8246	1,366	1,250	1,333
0,50	0,7071	1,155	1,000	1,102
$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$	0,000	1,000	0,707	0,894

Сдвиг ε фазы вынужденного колебания, согласно формулам (3-488), определяется формулой

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{2z\delta}{1-z^2}. \tag{3-494}$$

Значения коэффициента динамичности λ и сдвига ε^0 фазы, выраженного в градусах для некоторых значений δ, даются в таблице на стр. 140 (заимствована из курса теоретической механики Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье, часть II, стр. 468). При $\delta = 0$ ε представляет собой разрывную функцию z, равную 0 при $z < 1$ и π при $z > 1$. Таблица показывает, что при z, достаточно удаленном от значения 1, т. е. в области частот p вынуждающей обобщенной силы, достаточно удаленных от резонансного значения k, коэффициент динамичности λ мало изменяется с изменением δ и в этом случае можно не учитывать влияния сил сопротивления на значение амплитуды A вынужденных колебаний.

z	$\delta=0{,}0$	$\delta=0{,}05$		$\delta=0{,}10$		$\delta=0{,}15$		$\delta=0{,}20$		$\delta=0{,}25$	
	λ	λ	ε^0	λ	ε^0	λ	ε^0	λ	ε^0	λ	ε^0
0,00	1,00	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0	1,00	0,0
0,10	1,01	1,01	0,6	1,01	1,3	1,01	1,9	1,01	2,5	1,01	2,9
0,20	1,04	1,04	1,2	1,04	2,4	1,04	3,6	1,04	4,7	1,04	5,9
0,30	1,10	1,10	1,9	1,10	3,7	1,10	5,6	1,09	7,5	1,09	9,4
0,40	1,19	1,19	2,8	1,18	5,4	1,18	8,1	1,17	10,8	1,16	13,4
0,50	1,33	1,33	3,8	1,32	7,6	1,30	11,3	1,29	15,0	1,26	18,5
0,60	1,56	1,55	5,3	1,54	10,6	1,50	15,7	1,46	20,6	1,41	25,2
0,70	1,96	1,94	7,8	1,89	15,4	1,82	22,4	1,72	28,8	1,62	34,5
0,75	2,28	2,25	9,7	2,16	18,9	2,03	27,2	1,88	34,4	1,72	40,6
0,80	2,78	2,71	12,5	2,53	23,9	2,31	33,7	2,08	41,7	1,86	48,0
0,85	3,60	3,44	17,0	3,07	31,4	2,65	42,5	2,28	50,8	1,98	56,8
0,90	5,26	4,76	25,3	3,82	43,5	3,03	55,0	2,46	62,2	2,05	67,2
0,925	6,95	5,85	32,7	4,27	52,2	3,20	62,5	2,52	68,7	2,07	72,7
0,95	10,26	7,33	44,1	4,67	62,7	3,30	71,0	2,55	75,5	2,06	78,3
0,975	20,50	9,16	63,4	4,98	75,9	3,36	80,5	2,55	82,9	2,04	84,2
1,000	∞	10,00	90,0	5,00	90,0	3,33	90,0	2,50	90,0	2,00	90,0
1,025	19,76	8,73	116,5	4,73	104,0	3,20	99,4	2,42	97,1	1,94	95,6
1,05	9,76	6,80	134,8	4,28	116,5	3,02	108,3	2,31	103,9	1,87	101,1
1,075	6,45	5,31	145,3	3,77	125,8	2,80	115,7	2,19	109,8	1,79	106,2
1,10	4,76	4,22	152,3	3,29	133,7	2,55	122,3	2,05	115,5	1,70	110,8
1,15	3,11	2,94	160,3	2,53	144,8	2,17	133,0	1,78	125,4	1,52	119,3
1,20	2,27	2,19	164,8	1,99	151,4	1,76	140,6	1,54	132,5	1,36	126,3
1,25	1,78	1,74	167,4	1,63	156,0	1,48	146,3	1,33	138,2	1,19	132,0
1,30	1,45	1,42	169,3	1,36	159,4	1,26	150,5	1,16	143,0	1,06	136,7
1,40	1,04	1,03	171,8	1,00	163,9	0,96	156,4	0,90	149,7	0,84	143,8
1,50	0,80	0,80	173,2	0,77	166,5	0,75	160,2	0,72	154,3	0,69	149,0
1,75	0,49	0,48	175,1	0,48	171,5	0,47	166,7	0,45	161,3	0,45	157,0
2,00	0,33	0,33	176,2	0,33	172,4	0,33	168,7	0,32	165,0	0,32	161,6
2,50	0,19	0,19	177,2	0,19	174,5	0,19	171,9	0,19	169,2	0,18	166,6
3,00	0,125	0,125	177,8	0,125	175,7	0,123	173,5	0,123	171,5	0,123	169,5
4,00	0,067	0,067	178,5	0,067	177,0	0,066	175,5	0,065	174,0	0,066	172,3
5,00	0,042	0,042	178,9	0,042	177,6	0,042	176,4	0,042	175,3	0,042	174,0

§ 3-115. Вынужденные колебания без сопротивления

Если сопротивление отсутствует, то уравнение (3-482) принимает вид

$$a\ddot{q} + cq = Q(t), \tag{3-495}$$

а его решение (3-483) дается при начальных данных q_0 и $\dot{q}_0$ формулой

$$q = q_0 \cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k} \sin kt + \frac{k}{ca} \int_0^t Q(\xi) \sin k(t-\xi)\, d\xi, \tag{3-496}$$

где по-прежнему $k^2 = \frac{c}{a}$. При начальных данных $q_0 = \dot{q}_0 = 0$ и при $Q(0) = 0$ вынужденные колебания определяются формулой

$$q = \frac{Q(t)}{ca} - \frac{1}{ca} \int_0^t Q'(\xi) \cos k(t-\xi)\, d\xi. \tag{3-497}$$

В случае гармонической обобщенной силы $Q = H\sin(pt+\delta)$ формула (3-486) принимает при $k \neq p$ вид:

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt - \frac{H}{a(k^2-p^2)}\left(\sin\delta\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta\sin kt\right) + \\ + \frac{H}{a(k^2-p^2)}\sin(pt+\delta). \qquad (3\text{-}498)$$

Последний член представляет вынужденные гармонические колебания с амплитудой $A = \left|\frac{H}{a(k^2-p^2)}\right|$. Если $k > p$, то фаза этих колебаний $pt+\delta$ совпадает с фазой вынуждающей силы Q. Если же $k < p$, то вынужденные колебания выражаются формулой

$$Q = A\sin(pt+\delta+\pi),$$

т. е. их фаза опережает фазу вынуждающей силы на π. В случае резонанса, т. е. при $p = k$, формула (3-486) заменяется следующей:

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt + \frac{H}{2ak^2}[\cos\delta\sin kt - kt\cos(kt+\delta)]. \qquad (3\text{-}499)$$

Член $-\frac{H}{2ak}t\cos(kt+\delta)$ определяет так называемые *расходящиеся вынужденные колебания*, потому что математически при больших значениях t он может сделаться сколь угодно большим, но физически это не означает, что при движении системы параметр q действительно получит эти значения, так как при значительном отклонении системы уже нельзя пользоваться приближенной формой уравнения Лагранжа.

В случае, когда обобщенная сила $Q(t)$ является периодической функцией времени с периодом $\tau = \frac{2\pi}{p}$, она, вообще, может быть представлена тригонометрическим рядом вида:

$$Q(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} H_s\sin(spt+\delta_s). \qquad (3\text{-}500)$$

При $a_0 = 0$, полагая $\frac{H_s}{a} = h_s$, получим решение уравнения (3-495) в виде:

$$q = q_0\cos kt + \frac{\dot{q}_0}{k}\sin kt - \sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s}{k^2-s^2p^2}\left(\sin\delta_s\cos kt + \frac{p}{k}\cos\delta_s\sin kt\right) + \\ + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{h_s}{k^2-s^2p^2}\sin(spt+\delta_s), \qquad (3\text{-}501)$$

если $k \neq np$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Последняя сумма представляет вынужденное колебание, являющееся наложением ряда гармонических колебаний. При $k = np$ имеет место резонанс n-го порядка, которому соответствует расходящееся колебание, определяемое формулой

$$q = -\frac{h_n t}{2k}\cos(kt+\delta_n).$$

Глава 3-13

УДАР

§ 3-116. Мгновенный импульс

Ударом называется кратковременное взаимодействие тел, вызывающее за ничтожно малый промежуток времени резкое изменение скоростей их точек. Сила, действующая в течение удара и имеющая столь большую величину, что ее импульс за ничтожно малый промежуток времени удара имеет конечную величину, называется *ударной*. Математическая теория удара состоит в том, что перемещениями точек в течение промежутка времени удара пренебрегают и импульс ударной силы рассматривают как вектор, приложенный к точке в том положении, которое она сохраняет в течение удара. Такой приложенный импульс называется *мгновенным*. Иногда вектор мгновенного импульса называется просто ударом, приложенным к точке. Если промежуток времени, в течение которого происходит удар, ограничен моментами t и $t+\tau$, где τ ничтожно мало, то мгновенный импульс определяется через ударную силу $\mathbf{F}$ формулой

$$\mathbf{S} = \int_{t}^{t+\tau} \mathbf{F}\, dt. \tag{3-502}$$

Отсюда, обратно, средняя величина ударной силы определяется формулой

$$\mathbf{F}_{ср} = \frac{\mathbf{S}}{\tau}. \tag{3-503}$$

Если, кроме ударной силы, к точке приложены силы ограниченной величины, то ими при рассмотрении удара можно пренебрегать, и формула (3-232) для изменения количества движения точки при ударе примет вид:

$$m\mathbf{V}(t+\tau) - m\mathbf{V}(t) = \mathbf{S}. \tag{3-504}$$

Оба вектора $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{V}(t+\tau)$ прикладываются в одной и той же геометрической точке, соответствующей положению материальной точки при ударе, и называются соответственно *скоростью материальной точки до удара* и *после удара*. Если имеется материальная система, то вообще резкое изменение скорости одних точек должно сопровождаться резким же изменением скоростей других точек, т. е. все точки системы вообще испытывают одновременно удары. Ударные силы при этом могут быть как внешними, так и внутренними, и как данными, так и реакциями связей. Соответственно этому мгновенные импульсы могут быть внешними и внутренними, данными и реактивными. Согласно свойству внутренних сил сумма мгновенных внутренних импульсов всегда равна нулю, и формула (3-236) для изменения количества движения системы при ударе принимает вид:

$$\mathbf{Q}(t+\tau) - \mathbf{Q}(t) = \sum_{\alpha} \mathbf{S}_{\alpha}^{(e)}, \tag{3-505}$$

где $\mathbf{S}_{\alpha}^{(e)}$ обозначает внешний мгновенный импульс, приложенный к точке A_{α} системы. Для изменения скорости $\mathbf{V}_C$ центра инерции системы при ударе имеем формулу

$$m\mathbf{V}_C(t+\tau) - m\mathbf{V}_C(t) = \sum_{\alpha} \mathbf{S}_{\alpha}^{(e)}, \tag{3-506}$$

где m — масса системы. При отсутствии внешних ударных сил количество движения системы и скорость ее центра инерции при ударе не изменяются.

Так как радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки в течение удара считается неизменным, то для изменения момента количества движения при ударе формула (3-504) дает:

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{V}(t+\tau) - \mathbf{r} \times m\mathbf{V}(t) = \mathbf{r} \times \mathbf{S}. \tag{3-507}$$

Векторное произведение $\mathbf{r} \times \mathbf{S}$ называется *моментом* около начала радиуса-вектора *мгновенного импульса*, или *моментом удара*, и обозначается $M_O(\mathbf{S})$. Через ударную силу $\mathbf{F}$ этот момент выражается формулой

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{S}) = \mathbf{r} \times \mathbf{S} = \int_t^{t+\tau} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt. \tag{3-508}$$

Отсюда для суммы моментов внутренних мгновенных импульсов получается формула

$$\sum_\alpha \left(\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{S}_\alpha^{(i)}\right) = \int_t^{t+\tau} \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{F}^{(i)})\, dt = 0. \tag{3-509}$$

Следовательно, для изменения при ударе кинетического момента системы имеет место формула

$$\mathbf{L}_O(t+\tau) - \mathbf{L}_O(t) = \sum_\alpha (\mathbf{r}_\alpha \times \mathbf{S}_\alpha^{(e)}) = \sum_\alpha \mathbf{M}_O(\mathbf{S}_\alpha^{(e)}). \tag{3-510}$$

Для осевых кинетических моментов при ударе имеет место формула

$$L_x(t+\tau) - L_x(t) = \sum_\alpha M_x(\mathbf{S}_\alpha^{(e)}), \tag{3-511}$$

где $M_x(\mathbf{S}_\alpha^{(e)})$ обозначает проекцию на ось x момента мгновенного внешнего импульса. Работа ударной силы в течение промежутка времени удара имеет конечную величину и выражается *формулой Кельвина*:

$$A = \left(\mathbf{S}, \frac{\mathbf{V}(t+\tau) + \mathbf{V}(t)}{2}\right). \tag{3-512}$$

§ 3-117. Соударение точки с неподвижной гладкой поверхностью

Если точка ударяется о гладкую поверхность, имея до удара скорость $\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_1$, составляющую с нормалью к поверхности угол α, а после удара отходит от поверхности со скоростью $\mathbf{V}(t+\tau) = \mathbf{V}_2$, составляющей с нормалью угол β, то мгновенный импульс $\mathbf{S}$ направлен по нормали к поверхности. Проекции скоростей $\mathbf{V}_1$ и $\mathbf{V}_2$ на касательную к поверхности равны между собой, а абсолютные величины их проекций на нормаль находятся в постоянном отношении, зависящем только от материала точки и поверхности:

$$\frac{|v_{2n}|}{|v_{1n}|} = k. \tag{3-513}$$

Этот коэффициент k лежит в границах $0 < k < 1$ и называется *коэффициентом восстановления*. Для некоторых материалов k или ничтожно мало, или очень близко к единице. В первом случае теоретически считают $k = 0$ и удар называется *неупругим*, во втором считают $k = 1$ и удар называется *вполне упругим*. Углы α и β удовлетворяют условию

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = k. \tag{3-514}$$

Мгновенный импульс определяется через скорость v_1 до удара и угол падения α формулой

$$S = mv_1 (1 + k) \cos\alpha, \tag{3-515}$$

где m — масса точки.

§ 3-118. Прямое центральное соударение двух тел

Если два тела с массами m и m' движутся поступательно с параллельными скоростями V_1 и V'_1 и в некоторый момент соприкасаются друг с другом в точке, лежащей на одной прямой с центрами тяжести C и C' тел, параллельной скоростям V_1 и V'_1, то такое соударение тел называется *прямым центральным*. В точке соприкосновения тел возникают ударные реакции и тела испытывают прямой центральный удар. Движение тел после удара остается поступательным, и скорости их V_2 и V'_2 направлены по той же прямой, как до удара, но меняют свою величину. Относительные скорости $V_2 - V'_2$ и $V_1 - V'_1$ подчинены *закону Ньютона*:

$$V_2 - V'_2 = -k (V_1 - V'_1), \tag{3-516}$$

где коэффициент восстановления k зависит только от материала тел и лежит в границах $0 \leq k \leq 1$. Проекции v_1, v'_1, v_2, v'_2 скоростей тел до и после удара на прямую C_1C_2, соединяющую центры тяжестей тел, связаны уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= \frac{(m - km')\, v_1 + m' (1 + k)\, v'_1}{m + m'}, \\ v'_2 &= \frac{(m' - km)\, v'_1 + m (1 + k)\, v_1}{m + m'}. \end{aligned}\right\} \tag{3-517}$$

Мгновенный импульс S, приложенный к телу массы m, имеет алгебраическую величину

$$S = (1 + k) \frac{mm'}{m + m'} (v'_1 - v_1). \tag{3-518}$$

Так как внешних ударных сил при соударении тел нет, то скорость V_C центра инерции всей системы при ударе не меняется и определяется формулой

$$V_C = \frac{mV_1 + m'V'_1}{m + m'} = \frac{mV_2 + m'V'_2}{m + m'}. \tag{3-519}$$

Через ее проекцию c на прямую C_1C_2 скорости после удара выражаются формулами:

$$\left.\begin{aligned} v_2 &= c + k (c - v_1), \\ v'_2 &= c + k (c - v'_1). \end{aligned}\right\} \tag{3-520}$$

Для случая $k = 0$, называемого *абсолютно неупругим соударением*, формулы получают вид:

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_2' = \mathbf{V}_C, \tag{3-521}$$

т. е. после соударения тела движутся как одно твердое тело.

Для случая $k = 1$, называемого *абсолютно упругим соударением*, формулы получают вид:

$$v_2 = \frac{(m - m')\, v_1 + 2m' v_1'}{m + m'}; \quad v_2' = \frac{(m' - m)\, v_1' + 2m v_1}{m + m'}. \tag{3-522}$$

§ 3-119. Действие удара на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси

От удара, приложенного к телу, вращающемуся около неподвижной оси O_1O_2, резко изменяется угловая скорость тела и возникают ударные реакции в закрепленных точках оси. Изменение $\omega_2 - \omega_1$ алгебраического значения угловой скорости определяется через внешние данные мгновенные импульсы $\mathbf{S}_k^{(e)}$ формулой

$$I_{O_1O_2}(\omega_2 - \omega_1) = \sum_{k=1}^{n} M_{O_1O_2}(\mathbf{S}_k^{(e)}). \tag{3-523}$$

Если ось вращения принять за ось z, координаты закрепленных точек O_1 и O_2 обозначить через z_1 и z_2 и приложить к телу в точке M $(s, 0, 0)$ данный мгновенный импульс $\mathbf{S}$, то мгновенные реактивные импульсы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$, возникающие в закрепленных точках, определятся из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} -my_C(\omega_2 - \omega_1) &= S_x + S_{1x} + S_{2x}, \\ mx_C(\omega_2 - \omega_1) &= S_y + S_{1y} + S_{2y}, \\ 0 &= S_z + S_{1z} + S_{2z}, \\ I_{xz}(\omega_2 - \omega_1) &= z_1 S_{1y} + z_2 S_{2y}, \\ I_{yz}(\omega_2 - \omega_1) &= sS_z - z_1 S_{1x} - z_2 S_{2x}, \end{aligned}\right\} \tag{3-524}$$

где x_C, y_C — координаты центра тяжести тела, I_{xz} и I_{yz} — произведения инерции. Отсюда следует, что мгновенные реактивные импульсы окажутся равными нулю, т. е. ось не испытает удара, при следующих условиях: данный мгновенный импульс $\mathbf{S}$ должен быть направлен перпендикулярно к оси вращения и перпендикулярно к плоскости, проведенной через ось вращения и центр тяжести тела; ось вращения должна быть главной осью инерции в точке пересечения ее с плоскостью, проведенной перпендикулярно к оси вращения через точку приложения данного мгновенного импульса $\mathbf{S}$, и, наконец, положение точки приложения данного мгновенного импульса должно определяться расстоянием

$$s = \frac{I_{zz}}{mx_C}. \tag{3-525}$$

В этом случае отсутствия мгновенных реактивных импульсов точка M для данного удара называется *центром удара*. В случае, когда вращающееся тело представляет собой тонкую пластинку и ось вращения

лежит в плоскости этой пластинки, для отсутствия мгновенных реактивных импульсов данный мгновенный импульс должен быть направлен перпендикулярно к плоскости пластинки и приложен в ее центре качания, соответствующем данной оси вращения.

§ 3-120. Изменение кинетической энергии при ударе от введения длительных совершенных связей

Если причиной удара является наложение на систему в момент удара новых связей, которые сохраняются в движении после удара, то такие связи называются *длительными*. Если других мгновенных импульсов, кроме реактивных, возникающих от наложения длительных связей, нет и если наложенные связи являются совершенными для движения после удара, то происходит потеря кинетической энергии системы, выражаемая *формулой Карно*:

$$T_1 - T_2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha u_\alpha^2}{2}, \tag{3-526}$$

в которой T_1 и T_2 обозначают кинетическую энергию до и после удара, а u_α — так называемая *потерянная скорость*, т. е. разность скоростей точки до и после удара:

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{V}_\alpha(t) - \mathbf{V}_\alpha(t+\tau).$$

§ 3-121. Изменение кинетической энергии при прямом центральном соударении тел

Если тела масс m и m' соударяются прямым центральным ударом с коэффициентом восстановления k, то потеря кинетической энергии определяется через скорости v_1 и v_1' до удара формулой

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k^2}{2}\frac{mm'}{m+m'}(v_1 - v_1')^2, \tag{3-527}$$

а через скорости v_2 и v_2' после удара — формулой

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k^2}{2k^2}\frac{mm'}{m+m'}(v_2 - v_2')^2. \tag{3-528}$$

По аналогии с формулой Карно потерю энергии можно выразить формулой

$$T_1 - T_2 = \frac{1-k}{1+k}\left\{\frac{m}{2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{m'}{2}(v_1' - v_2')^2\right\}. \tag{3-529}$$

При абсолютно упругом соударении $k = 1$ и $T_1 = T_2$, т. е. не происходит потери кинетической энергии. При абсолютно неупругом соударении $k = 0$ и потеря кинетической энергии (т. е. ее переход в другие формы) будет максимальной:

$$T_1 - T_2 = \frac{m}{2}(v_1 - v_2)^2 + \frac{m'}{2}(v_1' - v_2')^2. \tag{3-530}$$

ОТДЕЛ ЧЕТВЕРТЫЙ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

И. К. Снитко

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинский алфавит

A – удельная работа деформации; потенциальная энергия ($кГ \cdot см/см^3$).
B — бимомент ($кГ \cdot см^2$).
b — ширина поперечного сечения.
C — жесткость системы ($кГ \cdot см^2$).
c_φ — жесткость защемления ($кГ \cdot см$).
c_v — жесткость опоры ($кГ/см$).
D — жесткость балки при изгибе ($кГ \cdot см^2$).
$D_н$ — девиатор напряжений.
d — диаметр болта, заклепки.
A_x, B_x, C_x, D_x — функции влияния для балок на упругом основании.
E — модуль упругости (Юнга) ($кГ/см^2$).
E_1 — касательный модуль ($кГ/см^2$).
F — площадь поперечного сечения.
f — стрела прогиба, перемещение.
G — модуль сдвига ($кГ/см^2$); вес тела ($кГ$).
g — ускорение силы тяжести.
H — натяжение нити; распор арки.
h — высота поперечного сечения; высота сварного шва (катет).
i — погонная жесткость стержня ($кГ \cdot см$).
i — радиус инерции площади сечения ($см$).
$J_к$ — условный момент инерции площади сечения при кручении ($см^4$).
J_ρ — полярный момент инерции площади сечения ($см^4$).
J_z, J_y — осевые моменты инерции площади сечения для осей z, y ($см^4$).
$J_{макс}$, $J_{мин}$ — главные моменты инерции площади сечения ($см^4$).
J_ω — секторный момент инерции площади сечения ($см^6$).
J_{zy} — центробежный момент инерции площади сечения ($см^4$).
k — коэффициент постели ($кГ/см^3$).
$k_к$ — коэффициент концентрации напряжений.
$k_н$ — коэффициент неоднородности материала.
$k_{пч}$ — коэффициент запаса по пределу прочности.

$k_т$ — то же по пределу текучести.
$k_ф$ — эффективный коэффициент концентрации.
$k_я$ — ядровое расстояние.
l — длина стержня или пролета балки.
l, m, n — направляющие косинусы нормали к площадке.
M — момент сил; изгибающий момент ($кГ \cdot см$).
M_x, M_y, M_z — моменты сил относительно осей x, y, z для стержня ($кГ \cdot см$); то же вдоль этих осей в пластинках ($кГ \cdot см/см$).
$M_ф$ — фиктивный момент (прогиб) ($см$).
m — модуль Лямэ ($кГ/см^2$).
m — коэффициент условий работы.
N — продольная сила в стержне ($кГ$); то же в пластинке ($кГ/см$).
N_x — то же вдоль оси x.
$n_{пч}$ — запас прочности (или устойчивости).
$n_п$ — коэффициент перегрузки для постоянной нагрузки.
$n_в$ — то же для временной нагрузки.
P — сосредоточенная нагрузка, сила, вес ($кГ$).
$P_ф$ — фиктивная сила (угол поворота).
p — полное напряжение в теле или на его поверхности ($кГ/см^2$).
$p_{xν}$, $p_{yν}$, $p_{zν}$ — компоненты напряжения вдоль осей x, y, z для площадки с нормалью $ν$.
Q — поперечная сила в стержне ($кГ$); то же в пластинке ($кГ/см$).
Q_z, Q_y — то же вдоль осей z, y.
$Q_ф$ — фиктивная поперечная сила (угол поворота).
q — коэффициент чувствительности.
q — интенсивность нагрузки ($кГ/см$).
R — реакция опоры ($кГ$).
R — радиус кривизны.
$R_{расч}$ — расчетное сопротивление материала ($кГ/см^2$).
$R^н$ — нормативное сопротивление материала ($кГ/см^2$).
r — ранг циклической нагрузки.
S_z, S_y — статические моменты площади сечения относительно осей z, y ($см^3$).
$S^{отс}$ — статический момент отсеченной площади сечения ($см^3$).
$S_ω$ — секториальный статический момент площади сечения ($см^4$).
$S_{ωy}$, $S_{ωz}$ — секториально-линейные моменты площади сечения ($см^5$).
s — длина кривой.
T — модуль продольного изгиба ($кГ/см^2$).
T — период колебаний системы.
$T_д$ — тензор деформаций.
$T_н$ — тензор напряжений.
$T^о_н$, $T^ф_н$ — тензоры напряжений: объемный (шаровой) и девиатор.
t — температура.
t — толщина тонкого профиля.

u, v, w, — компоненты перемещения вдоль осей x, y, z.
U — потенциальная энергия.
v — прогиб балки; скорость движения тела.
W_p — полярный момент сопротивления площади сечения ($см^3$).
$W_к$ — условный момент сопротивления площади сечения при кручении ($см^3$).
W_z, W_y — моменты сопротивления площади сечения относительно осей z, y.
w — прогиб пластинки, плиты, мембраны.
X — неизвестное в методе сил.
Z — неизвестное в методе деформаций.

Греческий алфавит

α — коэффициент линейного расширения.
α — параметр в уравнении продольно-поперечного изгиба.
β — коэффициенты влияния размеров, коррозии, состояния поверхности.
β — динамический коэффициент.
γ — относительный сдвиг, угол сдвига.
γ — объемный вес тела ($Т/м^3$).
Δ — перемещение.
Δ_{kp} — перемещение по направлению k от действия силы P.
Δl — абсолютное удлинение стержня длиной l.
δ_{kn} — перемещение по направлению k от единичного воздействия в n.
ε — относительная линейная деформация.
ε_x, ε_y, ε_z — то же вдоль осей x, y z.
ε_1, ε_2, ε_3 — главные относительные деформации.
ε_I, ε_{II}, ε_{III} — инварианты тензора деформаций: линейный, квадратичный и кубичный.
ε_0 — относительная объемная деформация.
$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_{ср}$ — октаэдрическая (средняя) деформация.
ε_i — интенсивность деформации.
λ — модуль Лямэ ($кГ/см^2$).
λ — гибкость стержня.
μ — коэффициент Пуассона; коэффициент длины сжатого стержня; коэффициент распределения неуравновешенного момента в узле рамы.
η — функция влияния для балки на упругом основании.
Ω — площадь эпюры моментов ($Т \cdot м^2$).
ω — секториальная координата площади сечения ($см^2$).
ω — круговая частота колебаний системы.
ν — параметр приведенной длины сжатого стержня.
ρ — радиус кривизны.
σ — нормальное напряжение ($кГ/см^2$).
$[\sigma]$ — допускаемое нормальное напряжение.
σ_i — интенсивность напряжения.
σ_1, σ_2, σ_3 — главные напряжения.
σ_x, σ_y, σ_z — нормальные напряжения на площадках, перпендикулярных к осям x, y, z.
σ_I, σ_{II}, σ_{III} — инварианты тензора напряжений.

σ_a — амплитуда напряжения.
σ_r — нормальное радиальное напряжение.
σ_r — предел выносливости при ранге r циклической нагрузки.
σ_t — нормальное тангенциальное напряжение.
σ_0 — объемное напряжение.
$\sigma_п$ — предел пропорциональности;
$\sigma_{пч}$ — предел прочности.
$\sigma_{ср} = \sigma_{окт}$ — среднее (октаэдрическое) напряжение.
$\sigma_т$ — предел текучести.
$\sigma_у$ — предел упругости.
σ_ν — нормальное напряжение на площадке с нормалью ν.
τ — касательное напряжение ($кГ/см^2$)
$[\tau]$ — допускаемое касательное напряжение.
$\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{13}$ — наибольшие касательные напряжения.
τ_{xy} — касательное напряжение, направленное по оси x на площадке, перпендикулярной к оси y.
τ_ν — касательное напряжение на площадке с нормалью ν.
$\tau_i = \tau_{окт}$ — октаэдрическое касательное напряжение; интенсивность касательного напряжения.

Глава 4-1

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О НАПРЯЖЕНИЯХ И ДЕФОРМАЦИЯХ

§ 4-1. Напряженное состояние

Если около произвольной точки (x, y, z) тела выделить бесконечно малый прямоугольный параллелепипед (рис. 4-1), то действие соседних элементов тела следует оценивать системой из девяти компонентов напряжения; ими будут три нормальных напряжения σ и шесть касательных τ, образующих *тензор*

Рис. 4-1.

$$T_н = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}. \qquad (4\text{-}1)$$

Размерность напряжения — сила, деленная на площадь, например $кГ/см^2$.

Задача отыскания компонентов тензора статически неопределима (девять неизвестных при шести уравнениях равновесия). Тензор (4-1) симметричен, поскольку касательные напряжения подчиняются закону парности:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx};\ \tau_{xz} = \tau_{zx};\ \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad (4\text{-}2)$$

при доказательстве которого используются условия:

$$\sum M_x = 0; \quad \sum M_y = 0 \text{ и } \sum M_z = 0.$$

Три других условия $\sum x=0$, $\sum y=0$ и $\sum z=0$ приводят к установлению связи компонентов с массовыми силами: весом параллелепипеда и силами инерции.

Между компонентами тензора (4-1) существуют различные инвариантные соотношения; за независимые удобно принять следующие три:

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{\mathrm{I}} &= \sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma_0=\text{const};\\
\sigma_{\mathrm{II}} &= \sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^2-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2=\\
&\quad =\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1=\text{const};\\
\sigma_{\mathrm{III}} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\\
&\quad -\sigma_z\tau_{xy}^2=\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\text{const}.
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3)$$

Здесь σ_0— так называемое *объемное напряжение*, а $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ – *главные напряжения*, удовлетворяющие уравнению

$$\sigma^3-\sigma^2\sigma_{\mathrm{I}}+\sigma\sigma_{\mathrm{II}}-\sigma_{\mathrm{III}}=0, \qquad (4\text{-}4)$$

которое получают из того условия, что по площадкам действия главных напряжений σ отсутствуют касательные напряжения τ. *Наибольшие касательные напряжения*:

$$\tau_{12}=0{,}5\,(\sigma_1-\sigma_2);\quad \tau_{23}=0{,}5\,(\sigma_2-\sigma_3);\quad \tau_{13}=0{,}5\,(\sigma_1-\sigma_3) \qquad (4\text{-}5)$$

возникают на площадках, отклоненных от соответствующих пар главных площадок (*1-2*, *2-3*, *1-3*) на $\pm 45°$; максимальными из напряжений (4-5)

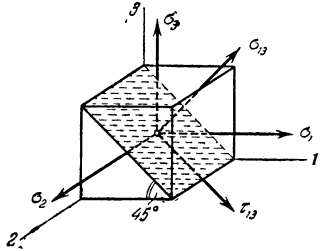


Рис. 4-2.

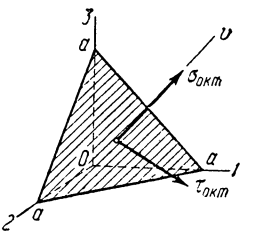


Рис. 4-3.

являются τ_{13}. Одновременно с напряжениями (4-5) на тех же площадках действуют соответственно нормальные напряжения:

$$\sigma_{12}=0{,}5\,(\sigma_1+\sigma_2);\quad \sigma_{23}=0{,}5\,(\sigma_2+\sigma_3);\quad \sigma_{13}=0{,}5\,(\sigma_1+\sigma_3). \qquad (4\text{-}6)$$

На рис. 4-2 показаны направления τ_{13} и σ_{13}.

На так называемых *октаэдрических площадках*, равнонаклоненных к трем главным ($\cos \nu,1=1:\sqrt{3}$; $\nu,1=\nu,2=\nu,3=54°46'$, рис. 4-3), действуют среднее нормальное напряжение

$$\sigma_{\text{окт}}=\sigma_{\text{ср}}=\sigma_0:3=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3):3 \qquad (4\text{-}7)$$

и октаэдрическое касательное напряжение

$$\tau_{\text{окт}} = \tau_i = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2)} =$$
$$= \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2+\tau_{23}^2+\tau_{13}^2}\,. \qquad (4\text{-}8)$$

Интенсивностью напряжения σ_i называют приведенное (расчетное) напряжение, определенное теорией энергии изменения формы; его связывают с τ_i формулой

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}}\tau_i. \qquad (4\text{-}9)$$

Тензор напряжения (4-1) может быть разложен на составляющие:

а) *объемный* (или шаровой) *тензор*:

$$T_{\text{н}}^{\text{о}} = \begin{Vmatrix} \sigma_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\text{ср}} \end{Vmatrix}, \qquad (4\text{-}10)$$

компоненты которого вызывают лишь изменение объема параллелепипеда;

б) *тензор девиатор* (скашивающий):

$$T_{\text{н}}^{\text{ф}} = D_{\text{н}} = \begin{Vmatrix} \sigma_x-\sigma_{\text{ср}} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma_{\text{ср}} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma_{\text{ср}} \end{Vmatrix}, \qquad (4\text{-}11)$$

компоненты которого вызывают лишь изменение формы.

Если известен тензор (4-1) и требуется найти нормальное σ_ν и касательное τ_ν напряжения на так называемой *косой площадке*, направляющие косинусы которой относительно осей x, y, z равны l, m и n (причем $l^2+m^2+n^2=1$), то пользуются формулами:

$$\sigma_\nu = \sigma_x l^2+\sigma_y m^2+\sigma_z n^2+2(\tau_{xy}lm+\tau_{yz}mn+\tau_{zx}nl); \qquad (4\text{-}12)$$

$$\tau_\nu = \sqrt{p^2-\sigma_\nu^2}\,; \qquad (4\text{-}13)$$

$$p^2 = p_{x\nu}^2+p_{y\nu}^2+p_{z\nu}^2; \qquad (4\text{-}14)$$

$$\left.\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx}l+\sigma_y m+\tau_{yz}n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{zx}l+\tau_{zy}m+\sigma_z n. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}15)$$

Направляющие косинусы первой главной площадки находят, решая (4-14) с любыми двумя из (4-15), подставляя

$$p=\sigma_1;\ p_{x\nu}=\sigma_1 l;\ p_{y\nu}=\sigma_1 m;\ p_{z\nu}=\sigma_1 n.$$

Для плоской задачи, когда напряжения действуют лишь в плоскости xOy, во всех предыдущих формулах полагают:

$$\sigma_z=\tau_{zx}=\tau_{zy}=0;\ n=0$$

(следовательно, $l^2 + m^2 = 1$); одно из трех главных напряжений равно также нулю (допустим, $\sigma_2 = 0$); тогда из (4-4) находят

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}. \qquad (4\text{-}16)$$

Отклонение $\sigma_1 = \sigma_{макс}$ от оси x определяют углом α, причем

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}; \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_{макс} - \sigma_y} = -\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_{мин}}. \qquad (4\text{-}16')$$

§ 4-2. Деформации

Деформация бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда (рис. 4-1) представляется шестью компонентами *тензора*:

$$T_д = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Vmatrix}, \qquad (4\text{-}17)$$

в котором ε — относительные линейные деформации (рис. 4-4, *а*), γ — относительные сдвиги (рис. 4-4, *б*). Тензор (4-17), так же как и (4-1), симметричен, поскольку $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$ и $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.

Инварианты тензора деформаций строятся аналогично (4-3):

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ \varepsilon_{II} &= \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_z\varepsilon_x - 0{,}25\,(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) = \\ &= \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1; \\ \varepsilon_{III} &= \varepsilon_x\varepsilon_y\varepsilon_z + 0{,}25\,\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - 0{,}25\,(\varepsilon_x\gamma_{yz}^2 + \varepsilon_y\gamma_{zx}^2 + \\ &\quad + \varepsilon_z\gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}18)$$

Здесь ε — *относительная объемная деформация*; $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ — *главные деформации*, определяемые из уравнения

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2\varepsilon_I + \varepsilon\varepsilon_{II} - \varepsilon_{III} = 0. \qquad (4\text{-}19)$$

Грани куба, ребра которого ориентированы по направлениям ε_1, ε_2 и ε_3, не испытывают искажений углов (главный куб). *Наибольшие сдвиги* определяются формулами:

$$\gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2; \quad \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3; \quad \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \qquad (4\text{-}20)$$

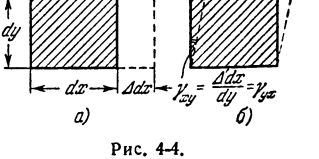


Рис. 4-4.

и наблюдаются в площадках, получаемых поворотом двух из трех пар граней главного куба на $\pm 45°$ при сохранении третьей пары.

В направлении, нормальном к октаэдрической площадке, относительное *октаэдрическое удлинение* составляет

$$\varepsilon_{окт} = \varepsilon_{ср} = \varepsilon_0 : 3 = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) : 3, \qquad (4\text{-}21)$$

а сдвиг в ней — *октаэдрический сдвиг* — равен:

$$\gamma_{\text{окт}} = \gamma_i = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^2} =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+1{,}5\,(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)}\,. \qquad (4\text{-}22)$$

Интенсивностью деформации ε_i называют деформацию, пропорциональную γ_i:

$$\varepsilon_i = \gamma_i : \sqrt{2}. \qquad (4\text{-}23)$$

Тензор деформаций (4-17) может быть разложен на составляющие:

а) *объемный* (или шаровой) *тензор*:

$$T_{\text{д}}^{0} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_{\text{ср}} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\text{ср}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\text{ср}} \end{Vmatrix}, \qquad (4\text{-}24)$$

оценивающий *изотропную деформацию* — равномерное изменение объема;

б) *тензор девиатор* (скашивающий):

$$T_{\text{д}}^{\text{ф}} = D_{\text{д}} = \begin{Vmatrix} \varepsilon_x-\varepsilon_{\text{ср}} & 0{,}5\gamma_{xy} & 0{,}5\gamma_{xz} \\ 0{,}5\gamma_{yx} & \varepsilon_y-\varepsilon_{\text{ср}} & 0{,}5\gamma_{yz} \\ 0{,}5\gamma_{zx} & 0{,}5\gamma_{zy} & \varepsilon_z-\varepsilon_{\text{ср}} \end{Vmatrix}, \qquad (4\text{-}25)$$

оценивающий изменение формы параллелепипеда.

§ 4-3. Закон Гука

Ограничимся изотропным упругим телом, обладающим двумя *модулями упругости* E и G (табл. 4-1), связанными между собой *коэффициентом Пуассона* μ:

$$E = 2G\,(1+\mu). \qquad (4\text{-}26)$$

Простейшая форма записи *обобщенного закона упругости* (Гука):

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy} : G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz} : G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx} : G; \qquad (4\text{-}27)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \mu\,(\sigma_y+\sigma_z)}{E}; \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu\,(\sigma_z+\sigma_x)}{E}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \mu\,(\sigma_x+\sigma_y)}{E}, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}28)$$

или иначе, выражая напряжения через деформации:

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}; \qquad (4\text{-}29)$$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{3\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_{\text{ср}}+\varepsilon_x\right) = \lambda\varepsilon_0 + 2m\varepsilon_x; \\ \sigma_y &= \lambda\varepsilon_0 + 2m\varepsilon_y; \quad \sigma_z = \lambda\varepsilon_0 + 2m\varepsilon_z, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}30)$$

где ε_0 — объемная деформация, λ и m — *модули Ламэ*:

$$\lambda = 2G\,\frac{\mu}{1-2\mu} = E\,\frac{\mu}{(1+\mu)\,(1-2\mu)}; \quad m = G. \qquad (4\text{-}31)$$

Таблица 4-1. Модули E и G ($кГ/см^2$) и коэффициент Пуассона μ

Материалы	E, 10^6	G, 10^5	μ	
Сталь	1,9—2,2	7,8—8,2	0,25—0,35	Бо́льшие значения:
Стальные канаты	1,3—1,8	—	—	
Чугун (сжатие)	0,8—1,2	2,9—4	0,18—0,25	
Медь	0,8—1,1 *)	3,1—3,8	0,33	*) для красной меди;
Латунь	1	3,6	0,36	
Бронза	0,9—1,2	3,2—4	0,32—0,4	
Алюминий	0,65—0,75 **)	2,5—2,7	0,33	**) для дюралюминия;
Цинк катаный	0,85	3,2	0,31	
Целлулоид	0,018	0,65	0,40	
Каучук	0,0001	0,005	0,46	
Стекло	0,55—0,7	2,2—2,8	0,25	
Лед	0,05—0,1	0,25—0,5	0,45	
Бетон	0,15—0,4 ***)	0,7—1,7	0,1—0,15	***) при марке больше 400;
Гранит, мрамор	0,35—0,5	1,5—1,9	0,2—0,3	
Каменная кладка (сжатие)	0,03—0,1	0,14—0,44	0,1—0,15	
Известняк плотный	0,35	1,5	0,2	
Песчаник	0,2	0,85	0,2	
Уголь	0,05—0,08	0,22—0,36	0,12	
Древесина вдоль волокна	0,08—0,15 ****)	—	—	****) для твердых пород.
Пробка	0,00006	—	0	
Ремень	0,005—0,02	—	—	

Из (4-30) сложением получают *объемный закон упругости*:

$$\sigma_0 = 3\sigma_{ср} = E_0\varepsilon_0; \quad \sigma_{ср} = E_0\varepsilon_{ср}, \tag{4-32}$$

где *объемный модуль упругости*

$$E_0 = 3\lambda + 2m = \frac{E}{1-2\mu} \tag{4-33}$$

лежит в пределах от E (при $\mu = 0$) до ∞ (при $\mu = 0{,}5$).

Из (4-30) вычитанием получают другую форму записи закона упругости:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_y); \quad \sigma_y - \sigma_z = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_z); \\ \sigma_z - \sigma_x = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_x); \end{aligned}\right\} \tag{4-34}$$

если же учесть еще (4-32), то находят:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_x - \varepsilon_{ср}); \quad \sigma_y - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_y - \varepsilon_{ср}); \\ \sigma_z - \sigma_{ср} = 2G(\varepsilon_z - \varepsilon_{ср}). \end{aligned}\right\} \tag{4-35}$$

В тензорной форме закон Гука записывают так:

а) *закон изменения объема* [см. (4-10), (4-24)]:

$$T^{\circ}_{н} = E_0 \cdot^{\circ}_{д}, \tag{4-36}$$

здесь каждый компонент тензора левой части согласно (4-32) в E_0 раз больше соответствующего компонента тензора правой части;

б) *закон изменения формы* [см. (4-11), (4-25)]:

$$D_{\text{н}} = 2GD_{\text{д}}; \tag{4-37}$$

каждый компонент тензора левой части в $2G$ раз больше соответствующего компонента тензора правой.

Закон изменения формы можно представить также, учтя формулы (4-9) и (4-23), в виде:

$$\sigma_i = E\varepsilon_i \quad \text{или} \quad \tau_i = G\gamma_i, \tag{4-38}$$

причем в этом случае в формуле (4-26) допускается $\mu = 0{,}5$ и

$$G = E : 3. \tag{4-39}$$

Деля почленно (4-37) на второе выражение (4-38), получают равенство так называемых *направляющих тензоров напряжений* $\bar{D}_{\text{н}}$ и направляющих тензоров деформаций $\bar{D}_{\text{д}}$:

$$\bar{D}_{\text{н}} = \bar{D}_{\text{д}},$$

что является еще одной формой записи закона изменения формы.

§ 4-4. Теории прочности

Для оценки прочности малого элемента тела, находящегося в сложном напряженном состоянии, используются различные расчетные формулы, составленные в зависимости от принятого критерия прочности. *Расчетное напряжение* $\sigma_{\text{расч}}$ можно представить как n-ю часть *предела текучести* ($\sigma_{\text{т}}$) или *предела прочности* ($\sigma_{\text{пч}}$):

$$\sigma_{\text{расч}} \leqslant \sigma_{\text{т}} : n_{\text{т}} = [\sigma], \qquad \sigma_{\text{расч}} \leqslant \sigma_{\text{пч}} : n_{\text{пч}} = [\sigma], \tag{4-40}$$

где n — *коэффициент запаса*, а $[\sigma]$ — *допускаемое нормальное напряжение* при простом растяжении; в простейших теориях $\sigma_{\text{расч}}$ выражают через главные напряжения $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

а) По *теории наибольших нормальных напряжений*:

$$\sigma_{\text{расч I}} = \sigma_1 \leqslant [\sigma]; \tag{4-41}$$

эта теория почти не применяется из-за ненадежности.

б) По *теории наибольших нормальных деформаций*:

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_{\text{расч II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma] \\ \text{или} \quad &\sigma_{\text{расч II}} = |\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)| \leqslant [\sigma]; \end{aligned}\right\} \tag{4-42}$$

эта теория иногда применяется в расчетах элементов из хрупких материалов или при хрупкой деформации пластичных материалов.

в) По *теории наибольших касательных напряжений*:

$$\sigma_{\text{расч III}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]; \tag{4-43}$$

эта теория применяется к расчетам деталей из пластичных материалов; обычно требует наибольших размеров конструкции.

г) По *теории наибольшей потенциальной энергии*:

$$\sigma_{\text{расч IV}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu\,(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \leqslant [\sigma]. \quad (4\text{-}44)$$

д) По *теории энергии изменения формы* [или октаэдрических касательных напряжений (4-8)]:

$$\sigma_{\text{расч V}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2} \leqslant [\sigma]. \quad (4\text{-}45)$$

Две последние теории предпочтительны перед остальными в случае пластичного материала; $\sigma_{\text{расч IV}}$ иногда применяется при $\sigma_{ср} > 0$; часто и без этого ограничения применяется $\sigma_{\text{расч V}}$, что согласуется с опытными данными.

Имеются теории, кладущие в основу своего построения не один критерий, а два (или несколько) разнородных; их иногда называют *обобщенными* (*комбинированными*). В этих теориях напряженные состояния, характеризуемые напряжениями σ_{C_1} и τ_{C_1} (или σ_{C_2} и τ_{C_2}), считаются отвечающими требованиям прочности, если соответствующие точки графика рис. 4-5 (C_1 и C_2) лежат ниже предельной кривой $C'AC''B$.

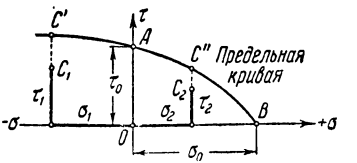


Рис. 4-5.

е) По *теории прочности Мора* предельная кривая иногда заменяется прямой и за координаты точек C' и C'' принимают соответственно (для площадок наибольшего сдвига):

$$\sigma_1 = \tau_1 = 0{,}5\,\sigma_{сж}; \qquad \sigma_2 = \tau_2 = 0{,}5\,\sigma_р, \quad (4\text{-}46)$$

где $\sigma_{сж}$ и $\sigma_р$ — допускаемые напряжения сжатия и растяжения; тогда условие прочности принимает вид:

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} + \frac{\tau}{\tau_0} = 1, \quad (4\text{-}47)$$

где σ (+ или —), τ (всегда +) — действующие напряжения, а

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_{сж}\,\sigma_р}{\sigma_{сж} - \sigma_р}; \qquad \tau_0 = \frac{\sigma_{сж}\,\sigma_р}{\sigma_{сж} + \sigma_р}. \quad (4\text{-}48)$$

ж) По *теории прочности И. Н. Миролюбова* (1953 г.):

$$\frac{\sigma_{окт}}{[\sigma]_{окт}} + \frac{\tau_{окт}}{[\tau]_{окт}} = 1; \quad (4\text{-}49)$$

в числителе — действующие октаэдрические напряжения (4-7) и (4-8); в знаменателе — допускаемые напряжения, выражающиеся через σ_0 и τ_0 (4-48) следующим образом:

$$[\sigma]_{окт} = \frac{2}{3}\,\sigma_0, \qquad [\tau]_{окт} = \frac{\sqrt{8}}{3}\,\tau_0. \quad (4\text{-}50)$$

В этом случае предельная линия $C'AC''B$ (см. рис. 4-5) также переходит в прямую. При равенстве $\sigma_{сж} = \sigma_р$ формула (4-49) обращается в (4-45).

з) По *теории прочности П. П. Баландина*:

$$\frac{\sigma_{окт}}{[\sigma]_{окт}} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{окт}}{[\sigma]_{окт}}\right)^2 + k^2\left(\frac{\tau_{окт}}{[\tau]_{окт}}\right)^2} = 1. \qquad (4\text{-}51)$$

Здесь обозначения те же, что и в теории ж), причем $k = 2\,\dfrac{\sigma_{сж}\,\sigma_р}{\sigma_{сж} + \sigma_р}$; при равенстве $\sigma_{сж} = \sigma_р$ теория ж) эквивалентна д).

§ 4-5. Концентрация напряжений и динамическая прочность

При наличии в *растянутом* стержне отверстий (рис. 4-6) максимальное напряжение $\sigma_{макс}$ определяется формулой

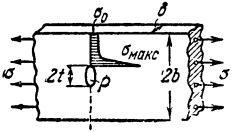


Рис. 4-6.

$$\sigma_{макс} = k\sigma_0, \qquad (4\text{-}52)$$

где $\sigma_0 = N : 2b\delta$ — номинальное напряжение; k — *коэффициент концентрации*, зависящий от размера отверстия t и радиуса закругления ρ:

$$k \approx 1 + 2\sqrt{t:\rho}. \qquad (4\text{-}53)$$

Формула (4-53) справедлива, если $b \gg t$; в противном случае k растет, и при изменении $t : b = \lambda$ от 0 до 0,5 и при $t = \rho$ следует принимать

$$k \approx 3\,(1 + 1{,}7\,\lambda^2). \qquad (4\text{-}54)$$

В случае глубоких выточек (рис. 4-7) формула (4-52) сохраняется, причем $\sigma_0 = N : 2a\delta$, а коэффициент концентрации

$$k \approx 1 + 0{,}4\,\frac{a}{\rho} - 0{,}006\,\frac{a^2}{\rho^2}. \qquad (4\text{-}55)$$

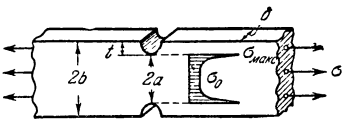


Рис. 4-7.

При выполнении выкружки для плавности перехода от одной толщины к другой (рис. 4-8), если $t : \rho > 1$:

$$k \approx 1{,}6 + 0{,}08\,\frac{t}{\rho}\left(1 + 0{,}03\,\frac{a}{\rho}\right). \qquad (4\text{-}55')$$

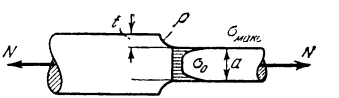


Рис. 4-8.

Приводимые в формулах (4-52)—(4-55') коэффициенты k являются теоретическими; действительные (эффективные) коэффициенты $k_ф$ определяются формулой

$$k_ф = 1 + q\,(k - 1), \qquad (4\text{-}56)$$

где q — *коэффициент чувствительности материала* — лежит в пределах от 0 до 1; для сталей $q \approx 0{,}5 \div 0{,}8$; бо́льшие значения относятся к высокопрочным мелкозернистым сталям; для цветных металлов q ближе к 0,5.

При *изгибе* коэффициент k корректируется; по формуле (4-55) его следует брать с понижением на 20%. При *кручении* в этом же случае $k \approx 2$, а в формуле (4-55) понижается на 25%. Более подробные сведения см. в специальных справочниках.

Действие многократно приложенных *повторно-переменных нагрузок* влечет за собой понижение прочностных характеристик, зависящее от ранга циклической нагрузки (рис. 4-9):

$$r = \sigma_{мин} : \sigma_{макс}. \quad (4\text{-}57)$$

Рис. 4-9.

Наиболее опасной является нагрузка при $r = -1$. В таком случае предел прочности, называемый *пределом выносливости* (*усталости*), σ_{-1} (или τ_{-1}), если его определять по изгибаемому образцу, составляет

$$\sigma_{-1}^{(и)} \approx 0{,}4\sigma_{пч};$$

по растягиваемому образцу:

$$\sigma_{-1}^{(р)} \approx 0{,}28\sigma_{пч};$$

по скручиваемому образцу:

$$\tau_{-1}^{(к)} \approx 0{,}22\sigma_{пч},$$

где $\sigma_{пч}$ — статический предел прочности (см. гл. 4-2), соответствующий $r = +1$.

Для промежуточных значений r между $+1$ и -1 предел выносливости определяется с помощью специального графика (рис. 4-10) как ордината промежуточной точки C:

$$\sigma_r = \sigma_{ср} + \sigma_a, \quad (4\text{-}58)$$

где среднее напряжение цикла $\sigma_{ср}$ и амплитуда цикла σ_a соответственно равны (рис. 4-9):

$$\sigma_{ср} = 0{,}5\,(\sigma_{макс} + \sigma_{мин}); \qquad \sigma_a = 0{,}5\,(\sigma_{макс} - \sigma_{мин}). \quad (4\text{-}59)$$

При спрямлении кривой ACB из (4-58) находят:

$$\sigma_r = \sigma_{-1} + \sigma_{ср}\left(1 - \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{пч}}\right); \qquad \sigma_a = \sigma_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_{ср}}{\sigma_{пч}}\right). \quad (4\text{-}60)$$

В предположении параболической кривой получают:

$$\sigma_a = \sigma_{-1}\left(1 - \frac{\sigma_{ср}^2}{\sigma_{пч}^2}\right). \quad (4\text{-}61)$$

Переход к допускаемому напряжению в этом случае выполняется делением крайних ординат графика, представленного на рис. 4-10: начальная ордината делится на коэффициент запаса n и на коэффициент

концентрации $k_ф$; конечная ордината ($\sigma_{пч}$) делится часто только на n. Тогда допускаемое напряжение цикла r можно представить функцией основного $[\sigma] = \sigma_{пч} : n$ [см. ф-лу (4-40)]:

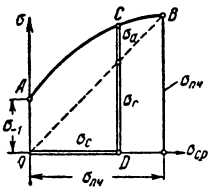


Рис. 4-10.

$$[\sigma]_r = [\sigma]\,\varphi_r, \tag{4-62}$$

где коэффициент понижения

$$\varphi_r = \frac{1 + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{ср}}}{1 + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{ср}}\dfrac{[\sigma]}{[\sigma_{-1}]}} \tag{4-63}$$

сам зависит от $[\sigma_{-1}] = \sigma_{-1} : (nk_ф)$.

Явление некоторого повышения прочностных характеристик металлов наблюдается при так называемом *скоростном деформировании*, когда скорость v_1 нагружения образца превышает обычно достигаемую в лаборатории механических испытаний (см. § 4-8) скорость v_0 в десятки и сотни тысяч раз. Одна из предлагаемых формул имеет вид:

$$\sigma_1 = \sigma_0 + m \lg \frac{v_1}{v_0}; \tag{4-64}$$

здесь σ_1 и σ_0 — характеристики, отвечающие скоростям v_1 и v_0; m — опытный коэффициент; для сталей с пределом прочности $\sigma_{пч} < 110$ *кГ/мм²* рекомендуют (ориентировочно):

$m = 1{,}5 \div 2{,}5$ *кГ/мм²* для предела прочности;

$m = 2{,}5 \div 4$ *кГ/мм²* для предела упругости.

Стали, имеющие $\sigma_{пч} > 110$ *кГ/мм²*, роста характеристик не показывают.

§ 4-6. Внутренние силы стержней и пластинок

В общем случае пространственно нагруженного стержня (рис. 4-11; произвольное сечение *I-I* этого стержня испытывает действие шести компонентов внутренних сил: продольной силы N_x, двух поперечных

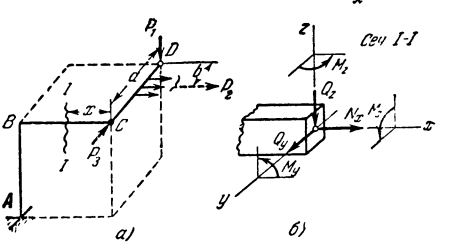


Рис. 4-11.

сил Q_y и Q_z, двух изгибающих моментов M_y и M_z и одного крутящего момента M_x. Все компоненты определяются *методом сечений* с помощью шести уравнений статики через внешние силы, лежащие по

одну сторону от сечения. Например, в случае, показанном на рис. 4-11:

$$N_x = P_2; \quad Q_y = -P_3; \quad Q_z = P_1; \quad M_y = -P_1 x;$$
$$M_z = -P_2(a-b) + P_3 x; \quad M_x = -P_1 a.$$

(Знаки для сечения I—I согласованы с положительными направлениями на рис. 4-11, *б*.) Силы измеряются в *кГ*, моменты — в *кГ · см*.

Компоненты внутренних сил в пластинке (в сечении, перпендикулярном к оси x) показаны на рис. 4-12; их величины принято относить к единице соответствующего размера (заштриховано), поэтому силы имеют единицу измерения *кГ/см*, а моменты — *кГ·см/см*, т. е. *кГ*. На рис. 4-12 показаны: N_x, Q_x и M_x — продольная, поперечная силы и изгибающий момент, способствующие деформированию единичной полосы пластинки вдоль оси x; N_{yx} и M_{yx} — сдвигающая сила и крутящий момент, действующие на ту же полосу. Аналогично (также методом сечений) выявляются внутренние силы, действующие перпендикулярно к оси y; ими будут N_y, Q_y, M_y и N_{xy} и M_{xy}.

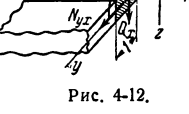


Рис. 4-12.

Литература. 1. Беляев Н. М., Сопротивление материалов, Гостехиздат, 1958. 2. Филоненко-Бородич М. М., Курс сопротивления материалов, Гостехиздат, 1955.

Глава 4-2

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЕЙ

§ 4-7. Основные формулы

При центральном растяжении стержня (рис. 4-13) продольной силой N в произвольном сечении I-I нормальное напряжение σ, определяемое формулой

$$\sigma = N : F, \tag{4-65}$$

должно удовлетворять условию прочности

$$N : F \leqslant [\sigma], \tag{4-66}$$

где F — площадь поперечного сечения.

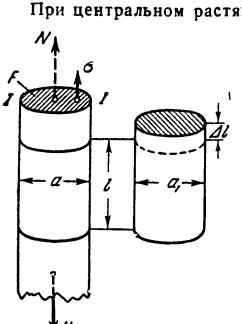


Рис. 4-13.

Формулы (4-65) и (4-66) остаются в силе и в случае сжатия; подлежит уточнению лишь величина $[\sigma]$ (см. гл. 4-7). В случае местного действия силы (смятие, контактные явления) напряжения в месте контакта и вблизи него не считаются равномерно распределенными (см. гл. IX в книге Беляев Н. М., Сопротивление материалов, 1958). Любой произвольный участок стержня (рис. 4-13) длиной l изменяет свои размеры следующим образом: абсолютное Δl и относительное ε продольные удлинения составляют:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}; \quad \varepsilon = \Delta l : l, \tag{4-67}$$

где E — модуль Юнга (см. табл. 4-1); абсолютное Δa и относительное ε_1 поперечные укорочения равны:

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \varepsilon_1 = \Delta a : a = -\mu\varepsilon, \tag{4-68}$$

где μ — коэффициент Пуассона (табл. 4-1). Если N или F (или оба) переменны по длине стержня, то

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_x dx}{EF_x}. \tag{4-69}$$

Закон Гука:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{4-70}$$

§ 4-8. Диаграмма растяжения. Механические характеристики

При достаточно медленном растяжении (порядка 0,01% в 1 *сек*) малоуглеродистой стали записывающий прибор испытательной машины вычерчивает диаграмму вида, показанного на рис. 4-14, где ординаты — нормальные напряжения — равны силам N, поделенным на начальную площадь поперечного сечения F, а абсциссы — абсолютные удлинения, разделенные на первоначальную длину l. У каждого материала имеется своя характерная диаграмма растяжения, более или менее отличная от приведенной на рис. 4-14.

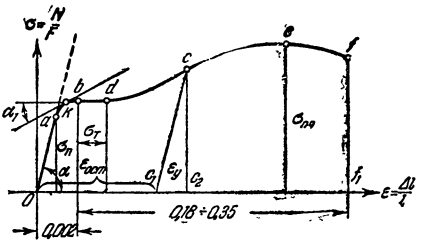


Рис. 4-14.

Характерные ординаты диаграммы имеют следующие названия: *предел прочности* $\sigma_{пч}$ — наивысшее напряжение, при котором начинает образовываться шейка (или разрушается образец, если он хрупкий); *предел текучести* $\sigma_т$ — напряжение, при котором образец удлиняется без роста нагрузки; если площадка текучести bd не обнаруживается, соответствующее $\sigma_т$ относительное удлинение принимается равным 0,002; *предел пропорциональности* $\sigma_п$ — наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука; оно мало отличается от предела упругости $\sigma_у$ — наибольшего напряжения, до которого имеются лишь упругие деформации (лимит для остаточных деформаций ограничивается при этом обычно какой-либо нормой, например 0,0002).

На первом участке диаграммы (прямая Oa) $\operatorname{tg}\alpha = \text{const}$ в масштабе графика дает величину модуля Юнга $E = \text{const}$; на остальных участках переменный модуль деформации может быть оценен аналогично; например, для точки k имеем: $\operatorname{tg}\alpha_1 = E_1 = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$. Иногда удобно пользоваться не *касательным модулем* E_1, а *секущим модулем* (рис. 4-15) $E' = \operatorname{tg}\alpha' = \sigma : \varepsilon$; поскольку модуль Юнга $E = (\sigma + \Delta\sigma) : \varepsilon$, то, деля E' на E, находят:

$$\sigma : \varepsilon = E' = E(1 - \omega); \quad \omega = \frac{\Delta\sigma}{\sigma + \Delta\sigma}. \quad (4\text{-}71)$$

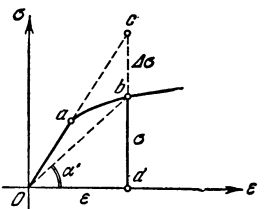


Рис. 4-15.

Механические характеристики некоторых материалов приведены в табл. 4-2. Если процесс нагружения стержня приостановить (точка c на рис. 4-14) и разгружать образец, то графиком разгрузки будет обычно прямая cc_1, параллельная прямой Oa; при этом $Oc_1 = \varepsilon_{ост}$ — *остаточная деформация*, а $c_1c_2 = \varepsilon_{упр}$ — *упругая деформация*.

Повторная нагрузка образца после разгрузки обычно покажет возврат графика в точку c по прямой, с дальнейшим ходом диаграммы по кривой cef, т. е. обнаруживается *наклеп* (повышение упругих свойств). О гистерезисе при повторной нагрузке см. в учебниках.

Элементарная площадка диаграммы растяжения $\sigma d\varepsilon$ определяет величину так называемой *элементарной удельной работы*; в упругих пределах (прямая Oa) упругая удельная работа на единицу объема $A_{упр}$ при деформировании от 0 до ε составляет:

$$A_{упр} = \frac{\sigma\varepsilon}{2} = \frac{\sigma^2}{2E}; \quad (4\text{-}72)$$

соответствующая упругая работа, приходящаяся на весь объем тела, — *потенциальная энергия деформации* (при N и F постоянных) — на длине l определяется формулой

$$V_{упр} = \int_0^l \frac{\sigma^2}{2E} F dl = \frac{N^2 l}{2EF}. \quad (4\text{-}73)$$

Удельная энергия, затраченная на деформирование тела вплоть до его разрушения, составляет:

$$A_{полн} = \eta \sigma_{пч} \varepsilon_{пч}, \quad (4\text{-}74)$$

где *коэффициент полноты диаграммы* η лежит в пределах $0{,}75 \div 0{,}90$.

В табл. 4-3 приведены данные, характеризующие некоторые материалы с точки зрения количества потенциальной энергии, какое они способны воспринять на единицу своего веса при деформировании в упругих пределах.

Таблица 4-2. **Механические характеристики материалов при $t = 20°$ С**

Материалы	Пределы ($кГ/мм^2$)			% удлинения при разрыве	Вид деформации
	пропорциональности	текучести	прочности		
Сталь 3	19—21	23	38—45	21	Любой
Сталь 30	22—24	28	48—60	22	»
Сталь 50	30—32	34	63—80	16	»
Сталь пружинная для тросов	70—90	90—120	120—170	16	»
Чугун серый	3,5—4,5	—	12—21	0,25	Растяжение
» »	10—15	—	50—100		Сжатие
Медь листовая	5	7	21	50	Растяжение
Латунь	5—9	7—12	20—35	20—40	»
Бронза					»
Дюралюминий	18—20	24	37		Любой
Целлулоид	—	—	5—7	—	Растяжение
Каучук	0,2—0,4	—	0,4—0,9	—	Сжатие
Стекло *)	4—10	—	8—20	—	»
Гранит *)	3—10	—	4—24	—	»
Песчаник *)	2—8	—	4—20	—	»
Каменная кладка	0,2—0,6	—	0,35—2	—	»
Бетон *)	0,25—2,5	—	0,50—5	—	»
Сосна вдоль волокна	2,5	—	4	—	»
» » »	3	—	8	—	Растяжение

*) При растяжении пределы меньше в 8—12 раз.

Радиоактивные излучения оказывают на металлы действие, подобное наклепу. У металлов при определенных дозах облучения растет прочность, а пластичность падает.

Таблица 4-3. **Удельная упругая работа на единицу веса**

Материал	Объемный вес γ ($Г/см^3$)	Предел пропорциональности $\sigma_п$ ($кГ/мм^2$)	Удельная работа $A_{упр}$ ($кГ \cdot см/см^2$)	$A_{упр} : \gamma$ ($кГ \cdot см/кГ$)
Сталь 3	7,8	21	1	140
Сталь пружинная	7,8	80	15	1950
Алюминий	2,5	20	2,9	1140
Сосна	0,8	2,5	0,30	390
Каучук	0,95	0,4	8	8400

Изменение механических характеристик материалов с повышением температуры представлено в табл. 4-4; данные — ориентировочные, так как при $t > 250°$ напряженное и деформированное состояния обычно не стабильны и наблюдается процесс их изменения с течением времени.

Таблица 4-4. **Механические характеристики при росте температуры ($кГ/мм^2$)**

Материал	$t = 20°$			$t = 250°$			$t = 750°$		
	$E:100$	$\sigma_т$	$\sigma_{пч}$	$E:100$	$\sigma_т$	$\sigma_{пч}$	$E:100$	$\sigma_т$	$\sigma_{пч}$
Сталь 3	205	22	42	200	18	45	130	12	28
Сталь жаропрочная	215	40	65	210	42	68	150	30	40
Дюралюминий . .	7,4	24	37	7	20	32	3	8	12
Медь	10	7	21	8	5	15	2	2	6

§ 4-9. Допускаемые напряжения. Запас прочности*). Способы расчетов

Различают расчеты: а) по допускаемым напряжениям; б) по несущей способности; в) по предельным состояниям.

Допускаемые напряжения $[\sigma]$ или $[\tau]$ могут быть вычислены по формулам:

для статических нагрузок

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пч}}{n_{пч} k_ф} \quad \text{или} \quad [\sigma] = \frac{\sigma_т}{n_т k_ф}, \tag{4-75}$$

где n и k — соответственно коэффициенты запаса и концентрации напряжений (см. § 4-5); в случае пластичных материалов $k \to 1$:

для повторно-переменных нагрузок [см. § 4-4, ф-ла (4-62)]

$$[\sigma]_r = [\sigma] \cdot \varphi, \tag{4-76}$$

где $[\sigma]$ определяется формулой (4-75) при $k = 1$; понижающий коэффициент φ составляет:

$$\varphi = \frac{1 + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{ср}}}{1 + \dfrac{\sigma_a}{\sigma_{ср}} \dfrac{\sigma_т}{\sigma'_{-1}}}, \tag{4-77}$$

где корректированный предел выносливости

$$\sigma'_{-1} = \sigma_{-1} : k_ф \beta; \tag{4-78}$$

$k_ф$ — эффективный коэффициент концентрации (см. § 4-5); β — коэффициент, учитывающий влияние: размеров деталей — β_p (масштабный

*) См. гл. IX «Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении» под ред. С. Д. Пономарева, 1952; гл. XIII «Курса сопротивления материалов», т. 1, 2 под ред. М. М. Филоненко-Бородич, 1955—56.

фактор), состояния поверхности — $\beta_п$, наличия коррозии — $\beta_{кор}$ и других факторов — $\beta_д$; β определяется формулой:

$$\beta = \beta_р\, \beta_п\, \beta_{кор} \beta_д\,. \tag{4-79}$$

Ориентировочные значения коэффициентов β можно вычислять, пользуясь выражениями (4-80) — (4-82):

$$1 : \beta_р \approx 1 - \frac{d - 10}{2d_0 - 20}, \tag{4-80}$$

где d — диаметр детали (*мм*); $10 \leqslant d \leqslant d_0$, причем $d_0 = 200$ *мм* для углеродистой стали при отсутствии концентрации напряжений; $d_0 = 100$ *мм* для легированной стали при наличии концентрации; $d_0 = 30$ *мм* там же при высокой концентрации;

$$1 : \beta_п \approx a - \frac{\sigma_{пч} - 30}{100}(b - a), \tag{4-81}$$

где $\sigma_{пч}$ — предел прочности ($кГ/мм^2$); коэффициенты a и b берутся из табл. 4-5; в этой же таблице приведены коэффициенты a_1 и b_1 к формуле

$$1 : \beta_п \beta_{кор} = a_1 - \frac{\sigma_{пч} - 30}{100}(b_1 - a_1), \tag{4-82}$$

причем числа без скобок относятся к коррозии в пресной, а в скобках — в морской воде.

Таблица 4-5. **Коэффициенты a, a_1 и b, b_1 к формулам (4-81)—(4-82)**

	Шлифовка	Полировка	Обработка резцом	Насечка	Не обработано
a	1	1,1	0,97	0,92	0,82
b	1	1,15	0,90	0,52	0,30
a_1	—	—	—	—	0,64 (0,48)
b_1	—	—	—	—	0,18 (0,16)

Коэффициент запаса ($n_{пч}$ или $n_т$) либо устанавливается нормами проектирования, либо определяется общими условиями работы и технико-экономическими требованиями конструирования; при этом учитываются: возможная перегрузка, стабильность свойств материала, отклонения от расчетной схемы, проектная долговечность.

Коэффициенты $n_т$ лежат в пределах 1,4 — 2,5; коэффициенты $n_{пч}$ — в пределах 2 — 10 в зависимости от материала, конструкции и условий работы. В случае динамического действия нагрузок эти величины

уменьшаются дополнительно на так называемый *динамический коэффициент* (см. гл. 4-11).

В табл. 4-6 — 4-19 приводятся некоторые сведения из норм.

Таблица 4-6. Допускаемые напряжения для металла при статическом нагружении ($кГ/мм^2$) *)

Металл	Растяжение, сжатие, изгиб $[\sigma]$	Сдвиг, срез $[\tau]$	Кручение $[\tau]$	Смятие $[\sigma]$
Стали				
Ст. Ос., Ст. 2, Ст. 20. . .	14—16	9—10	8—10	21—24
Сталь заклепочная В . .	—	14—16	—	28—32
» чистые болты В .	12—14	12—14	—	28—32
» » » С .	—	10—12	—	24—28
» черные болты . .	12—14	8—10	—	17—20
Ст. 3, Ст. 30	16—18	10—11	10—11	24—27
Сталь заклепочная В . .	—	14—16	—	32—36
» чистые болты В.	12—14	12—14	—	32—36
» » » С.	—	10—12	—	23—32
» черные болты . .	12—14	8—10	—	20—22
» анкеры	10—12	—	—	—
» отрыв головок . .	9—11	—	—	—
» катки	—	—	—	6—7
СХЛ 2	21—25	12—15	12—15	31—38
Сталь заклепочная В . .	—	16—18	—	42—50
» отрыв головок . .	12—14	—	—	—
Сталь углеродистая в машиностроении	12—25	7—15	6—15	18—38
То же легированная . . .	25—60	12—36	10—36	30—90
Сталь пружинная	50—140	30—80	25—70	—
Медь	3—12	1,5—6	—	4—15
Латунь	7—14	4—7	—	10—20
Бронза	6—12	3—7	—	9—18
Электрон	9—12	5—7	—	—
Алюминий	3—8	—	—	—
Дюралюминий	8—18	5—10	5—10	12—28

*) См. Сборник руководящих указаний по проектированию, изготовлению и монтированию стальных конструкций промышленных сооружений и гражданских зданий, 1949.

Примечания. 1. Срез и смятие В относятся к заклепкам и болтам, поставленным в сверленые или рассверленные отверстия; срез и смятие С — к поставленным в нерассверленные отверстия.

2. Для материалов, указанных в таблице ниже СХЛ 2,— данные ориентировочные.

3. Меньшие значения для марок стали, помещенных в таблице от СХЛ 2 и выше, — при действии основных нагрузок; бо́льшие — при действии основных и дополнительных нагрузок (температура, ветер и т. п.).

Таблица 4-7. **Допускаемые напряжения на стальное литье и чугун ($кГ/мм^2$)**

Марки	Растяжение, сжатие, изгиб [σ]	Сдвиг, срез [τ]	Смятие торца [σ]	Сжатие катков [σ]
Ст. 15-4020	12 —14,5	9—11	18—20	0,35—0,42
Ст. 35-5015	15 —18	11,5—14	22,5—27	0,5 —0,6
Сч 12-28	(3,5—4)	2,5—3	17—21	—
Сч 15-32	12 —14,5			
Сч 18-36	(4,5—5,5)	3,5—4	21—25	—
Сч 21-40	15 —18			

Примечания. 1. Меньшие значения — для основных нагрузок; бо́льшие — для основных и дополнительных (ветер, температура).

2. Для чугуна при растяжении и изгибе данные в скобках, при сжатии —без скобок.

3. Пределы прочности чугуна — две последние цифры марки, для стали — две предпоследние.

Таблица 4-8. **Допускаемые напряжения для сварных швов ($кГ/мм^2$)**

Деформация	Обмазка электродов		
	Тонкая	Толстая в конструкции из	
		Ст. Ос. и Ст. 2	Ст. 3
Растяжение	10—11	11 —12,5	13—14,5
Сжатие	11—12,5	12,5—14,5	14,5—16
Срез	8—10	10 —11	11—12,5

Примечание. См. примечание 1 к табл. 4-7.

Таблица 4-9. **Допускаемые напряжения деталей вагонов ($кГ/мм^2$) *)**

Детали и марка	Растяжение, сжатие, изгиб [σ]	Срез, кручение [τ]	Смятие [σ]
Детали кузова и тележки Ст. 3, Ст. 20	16,5	—	14
Детали кузова и тележки Ст. 5, Ст. 35	19—30	—	18
Рессоры Ст. 55	95	75	—
Детали тормоза, Ст. 3	13	—	11
» » Ст. 5, Ст. 35	16	—	14
Оси по ГОСТ 4008-48	4,5—7	—	—

*) См. гл. IV книги «Вагоны» под ред. М. В. Винокурова, 1949.

Таблица 4-10. Основные допускаемые напряжения для сосны и ели ($кГ/см^2$) *)

Вид деформации	Постоянное сооружение	Временное сооружение
Изгиб, сжатие и смятие вдоль волокон	100—120	120—150
Растяжение вдоль волокон	70—100	85—120
Сжатие и смятие поперек волокон	15—20	18—25
Смятие местное » »	25—30	30—40
» под шайбами	35—40	40—50
Скалывание при изгибе вдоль волокон	20—22	24—25
Скалывание во врубках вдоль волокон	10—12	12—14
» » » поперек »	5—6	6—7
Перерезывание волокон	45	55—60

*) К табл. 4-10—4-12 см. Н и ТУ-2-47 и ГОСТ 2482-44.

Примечания. 1. Нормы для постоянных сооружений относятся к древесине с влажностью не больше 23%.

2. Переход от напряжений смятия вдоль волокон σ к напряжениям поперек волокон σ_1 выполнять по формуле

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma}{1 + \sin^3 \alpha \left(\frac{\sigma}{\sigma_1} - 1\right)},$$

где α — угол отклонения σ_α от σ.

3. Для древесины других пород учитывать поправки по табл. 4-11.

4. При проектировании вагонов напряжения понижаются против наименьших на 20%.

Таблица 4-11. Поправочные коэффициенты к данным табл. 4-10 для разных пород древесины

Породы	Растяжение, изгиб и сжатие вдоль волокон	Сжатие и смятие поперек волокон	Скалывание и срез
Лиственница	1,2	1,2	1,0
Сосна якутская, пихта кавказская, кедр	0,9	0,9	0,9
Сосна и ель Кольского п-ва, пихта уральская и сибирская	0,8	0,8	0,8
Дуб, граб, бук, клен	1,3	2,0	1,6
Береза, ясень, вяз	1,1	1,6	1,3
Осина, тополь	0,8	1,0	0,8

Таблица 4-12. **Допускаемые вертикальные давления на сваи**

Диаметр (*см*)	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	32	34	36
Давление на деревянную сваю (*T*)	11	12	13,5	14,5	16	17	18,5	20	21	23	24,5	28	32	36

Допускаемые горизонтальные давления на сваи принимаются до $^1/_6$ вертикальных.

Таблица 4-13. **Расчетные пределы прочности бетонов и каменных кладок (*кГ/мм*²)*)**

Материалы и род условий	Марки бетона и кладки						
	0,9	1,4	2	3	4	5	6
Бетоны							
Сжатие осевое (призматическая прочность) . . .	0,72	1,08	1,45	2	2,6	3,1	3,5
Сжатие при изгибе	0,9	1,35	1,8	2,5	3,25	3,9	4,4
Растяжение осевое	0,1	0,14	0,17	0,22	0,27	0,31	0,35
Срез непосредственный .	0,19	0,27	0,35	0,47	0,58	0,68	0,77
Кладки (сжатие)							
Кирпичная при марке раствора 0,1	0,19	0,24	0,3	0,4	—	—	—
Кирпичная при марке раствора 1,0	0,34	0,44	0,5	0,6	—	—	—
Бутовая при марке раствора 0,1	0,07	0,09	0,12	0,14	0,16	—	0,2
Бутовая при марке раствора 1,0	—	0,19	0,25	0,3	0,35	—	0,4

*) См. ГОСТ 4286-48.

Примечание. В случае растяжения кладок предел прочности в 7—12 раз меньше. Марка дана в *кГ/мм*².

Таблица 4-14. **Допускаемые напряжения для бетона и каменных кладок (*кГ/см*²) *)**

Материал	Сжатие осевое	Сжатие при изгибе	Скалывание	Растяжение осевое	Марка
Бетон в железобетоне	53	65	5—13	13	140
	72	90	7—17	17	200
	100	125	9—22	22	300
Бетон в бетонном сооружении	43	—	2,7	2,7	140
	58	—	3,5	3,5	200
Кирпичная кладка при марке раствора 50	15	—	1—1,4	1,0	150
	17	—	1—1,4	2,1	200
Бутовая кладка при марке раствора 50	12	—	1—2,5	1,5	400
	17	—	1—2,5	1,5	700

*) Ориентировочные данные по нормам автотранспортных сооружений.

Таблица 4-15. Допускаемые давления $[\sigma]$ ($кГ/см^2$) на грунт и коэффициенты постели $[k]$ ($кГ/см^3$) *)

Название грунта	$[\sigma]$ ($кГ/см^2$)	$[k]$ ($кГ/см^3$)
Глины при коэффициенте пористости 1	1—3	1—4
Глины при коэффициенте пористости 0,6	3—6	4—10
Суглинки при коэффициенте пористости 1	1—2,5	1—4
Суглинки при коэффициенте пористости 0,5	2,5—3,5	4—10
Супеси при коэффициенте пористости 0,7	1,5—3	1—1,5
Супеси при коэффициенте пористости 0,5	2,5—3	1,5—2,5
Пески мелкие	1,5—3,5	1—2,5
» средние	2,5—4	1,5—3
» крупные	3,5—5,5	1,5—3,5
Гравий, гальки	7—3	2,5—5
Известняки, скалы	6—40	20—400

*) См. Н и ТУ-6-48.

Примечания. 1. Глубины залегания грунта не менее 2 *м*.

2. Допускаемое давление на малотрещиноватую скалу должно быть не более $^1/_7$ предела прочности.

Расчетной формулой при расчете *по допускаемым напряжениям* при сложном сопротивлении может служить формула

$$\frac{\sigma^2}{[\sigma]^2\varphi_\sigma^2}+\frac{\tau^2}{[\tau]^2\varphi_\tau^2}\leqslant 1, \tag{4-83}$$

или

$$\frac{1}{n_\sigma^2}+\frac{1}{n_\tau^2}\leqslant 1,$$

где σ и τ — действительные напряжения; $[\sigma]$ и $[\tau]$ и равно φ_σ и φ_τ определяются, как указано в объяснении к формулам (4-76) и (4-77); n_σ и n_τ — запасы прочности по σ и τ.

Расчет по несущей способности (иначе по *состоянию разрушения*) сводится к использованию соотношения между допускаемой силой $[P]$ (или моментом $[M]$) и разрушающей силой $P_{разр}$ (или $M_{разр}$) в форме:

$$[P]\,n=P_{разр};\quad [M]\,n=M_{разр}, \tag{4-84}$$

где n — коэффициент запаса. Разрушающая сила (или момент) находится из того условия, что в статически определимой системе в состояние разрушения переходит одно сечение (или один стержень); в n раз статически неопределимой системе разрушается (в общем случае) $n+1$ сечение. В простейшем случае (им здесь ограничимся) переход сечения в состояние разрушения сопровождается появлением во всем сечении напряжений $\sigma_т$ (или $\tau_т$) (см. табл. 4-2) или $\sigma_{пч}$ ($\tau_{пч}$).

Ориентировочные значения коэффициентов n для некоторых материалов приведены в табл. 4-16. При отсутствии нормированных данных для n его определяют приближенно по формуле (4-75).

Таблица 4-16. **Запасы прочности n при расчете по несущей способности** *)

Виды воздействия	Железобетон	Каменная кладка	Сталь
Центральное внецентренное сжатие при армировании	1,6—2,2	1,8—2,5	1,6—2,1
То же без армирования	1,7—2,5	2,3—3	—
Достижение бетоном предела прочности при растяжении при наличии косой арматуры .	1,2—1,4	—	—
при отсутствии косой арматуры	2,2—3,3		

*) См. ГОСТ 4286-48, Н и ТУ-3-49 и Н-Т-49.

Примечания. 1. Меньшие значения n назначаются при основных и дополнительных воздействиях нагрузки и при отношении временной к постоянной нагрузке, меньшем 2.

2. Бо́льшие значения соответствуют более высоким классам капитальности сооружений.

3. Величины n для стали указаны по $\sigma_т$.

Предельными состояниями конструкции *) называют такие, при достижении которых невозможна дальнейшая нормальная эксплуатация; различают три предельных состояния:

1-е по *несущей способности* (прочности, устойчивости и выносливости);

2-е по *развитию чрезмерных деформаций*;

3-е по *образованию трещин или повреждений*.

Расчетная формула по 1-му предельному состоянию имеет вид:

$$N_{расч} \leqslant N_{пред}, \tag{4-85}$$

где $N_{расч}$ — *расчетное усилие* (или момент) — вычисляется в функции нормативных нагрузок; оно является суммарным усилием от постоянной $N^{норм}_{пост}$ и от временной $N^{норм}_{врем}$ нагрузок с учетом коэффициентов перегрузок $n_{пост}$ и $n_{врем}$, т. е.

$$N_{расч} = N^{н}_{п} n_{п} + N^{н}_{в} n_{в} \tag{4-86}$$

(величины $n_{п}$ и $n_{в}$ приведены в табл. 4-17);

$N_{пред}$ — *предельное сопротивление* материала и конструкции, определяемое методами сопротивления материалов с учетом:

а) особенностей работы конструкции, оцениваемых особыми *коэффициентами условий работы* m (табл. 4-17);

б) возможного понижения расчетного сопротивления $R_{расч}$ материала сравнительно с нормативным $R^{н}$ вследствие вероятной неодно-

*) С 1956 г. применение этого порядка расчета начато в строительном проектировании (СН и П-55).

родности материала; при этом:

$$R_{\text{расч}} = R^{\text{н}} k_{\text{н}}; \tag{4-87}$$

$$N_{\text{пред}} = AmR^{\text{н}} k_{\text{н}}, \tag{4-88}$$

где $k_{\text{н}}$ — *коэффициент неоднородности*, принимаемый в пределах 0,85—1,0; A — *геометрическая характеристика* сечения (при действии силы N — *см*²; при действии момента M — *см*³). Значения $R_{\text{расч}}$ для некоторых материалов приведены в табл. 4-18.

Таблица 4-17. **Ориентировочные коэффициенты перегрузки n и коэффициенты условий работы m**

Виды перегрузок и работы	$n_{\text{п}}$	$n_{\text{в}}$	m
Постоянная нагрузка	1—1,2	—	—
Снег	—	1,4	—
Ветер	—	1,2—1,5	—
Полезная нагрузка	—	1,2—1,4	—
Работа на растяжение	—	—	0,8—1
» » сжатие	—	—	0,6—0,9
» » срез, скалывание	—	—	0,8—1
» » изгиб	—	—	0,9—1

Таблица 4-18. **Расчетные сопротивления $R_{\text{расч}}$ [формула (4-87)]**

Материалы и сопротивление	*кГ/мм*²
Ст. 2, Ст. 3 — растяжение, сжатие, изгиб	20—21
Ст. 2, Ст. 3 — срез	12—13
Ст. 2, Ст. 3 — смятие торца	30—32
Сосна — изгиб, сжатие, смятие вдоль волокон	1,3
» растяжение	1
» скалывание	0,12
» сжатие и смятие поперек волокон	0,18
Кирпичная кладка при марке кирпича и раствора 100	0,18
» » » » » » » 75	0,14
Бетон в железобетоне — сжатие осевое	0,65—0,9—1,25
» » » изгиб	0,75—1,05—1,4
» » » растяжение осевое	0,04
Арматура в железобетоне { Ст. 3	21
Арматура в железобетоне { Ст. 5	24

Примечания 1. Данные для бетона отвечают его маркам соответственно 140, 200, 300.

2. Для смятия под углом см. указание в примечании 2 к табл. 4-10.

Расчет по 2-му предельному состоянию требует соблюдения условия

$$\Delta_{\text{расч}} \leqslant [f], \tag{4-89}$$

где $\Delta_{\text{расч}}$ — *действительное перемещение конструкции*, определяемое от нормативной нагрузки; $[f]$ — перемещение, допускаемое нормами расчета (табл. 4-19).

Расчет по 3-му предельному состоянию выполняется по специальным указаниям для тех конструкций (например, железобетонных) и в тех условиях, когда трещины или повреждения еще не нарушают прочности и устойчивости.

Таблица 4-19. **Примерные величины допускаемых прогибов в долях пролета**

Виды конструкций	Материал	
	сталь	древесина
Мосты, балки, фермы	$\frac{1}{500} - \frac{1}{1000}$	$\frac{1}{300} - \frac{1}{400}$
» » настилы	$\frac{1}{300} - \frac{1}{500}$	$\frac{1}{250}$
Междуэтажные перекрытия	$\frac{1}{250} - \frac{1}{400}$	$\frac{1}{250}$
Чердачные »	$\frac{1}{200} - \frac{1}{250}$	$\frac{1}{200}$

§ 4-10. Учет собственного веса

Гибкая нить. Центрально растянутый (сжатый) силой P стержень переменного сечения площадью F_x получает на расстоянии x от точки O (рис. 4-16) напряжение σ_x и удлинение Δx:

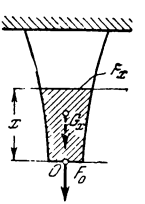


Рис. 4-16.

$$\sigma_x = \frac{P + G_x}{F_x}, \tag{4-90}$$

$$\Delta x = \int_0^x \frac{P + G_x}{EF_x}\, dx; \tag{4-91}$$

при $G_x = Fx\gamma$, где γ — объемный вес и $F_x = F = \text{const}$ (*призма*),

$$\sigma_x = \frac{P}{F} + x\gamma, \tag{4-92}$$

$$\Delta x = \frac{Px}{EF} + \frac{x^2\gamma}{2E}; \tag{4-93}$$

при $\sigma_x = \sigma = \text{const}$ (*брус равного сопротивления*) и $F_0 = P : \sigma$

$$F_x = F_0 e^{\frac{\gamma x}{\sigma}}, \tag{4-94}$$

$$\Delta x = \frac{\sigma}{E}\, x. \tag{4-95}$$

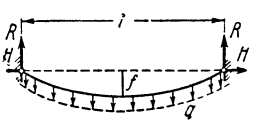


Рис. 4-17.

Гибкая пологая нить с опорами в одном уровне (рис. 4-17). Для равномерно-распределенной нагрузки q (*кГ/см*) на пролете длины l при

стреле провисания f получают реакции R и H, напряжение σ и длину s нити по кривой:

$$R=0{,}5\,ql,\quad H=\frac{ql^2}{8f},\quad \sigma=\frac{\gamma l^2}{8f};\tag{4-96}$$

$$s=l\left(1+\frac{8}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)\quad\text{или}\quad s=l\left(1+\frac{16}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)^{1/2},\tag{4-97}$$

где $\gamma=q:F$, F — площадь сечения нити.

Таблица 4-20. **Длина пролета l ($м$) нити в зависимости от пологости l/f и напряжения σ ($кГ/мм^2$) при $\gamma=8$ $Т/м^3$**

σ, $кГ/мм^2$	$l:f$		
	1000	100	50
100	100	1000	2000
10	10	100	200

Примечания. 1. Зависимость для l линейная.

2. При $\gamma_1\neq 8$ $Т/м^3$ длина l_1 находится через табличную длину l по формуле $l_1=l\frac{8}{\gamma_1}$. Удлинение пологой нити (учитывается при больших σ и l):

$$\Delta s\approx\frac{\Delta\sigma l}{E}=\frac{H_1-H_0}{EF}\,l,\tag{4-98}$$

где H_0 и H_1 — натяжения при начальной q_0 и последующей q_1 нагрузках. В общем случае (любая нагрузка) расчет ведется по формулам:

уравнение кривой провисания

$$y=M:H_1;\tag{4-99}$$

длина кривой

$$s_1=l+\frac{1}{2H_1^2}\int_0^l Q_1^2dx+\frac{\Delta\sigma\cdot l}{E},\tag{4-100}$$

где M и Q_1 — изгибающий момент и поперечная сила простой балки при заданной нагрузке; натяжение H_1 находится из условия $s_1=s$, где s берется из формулы (4-97).

§ 4-11. Статически неопределимые задачи

А. При расчете по *способу допускаемых напряжений* составляются уравнения равновесия и условия совместности перемещений; число последних равно степени статической неопределимости. Пусть (рис. 4-18) требуется подобрать сечение F вертикального стержня при нагрузке на кран $P=13$ $Т$ и $[\sigma]=16$ $кГ/мм^2$.

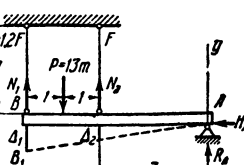


Рис. 4-18.

Стержень AB системы предполагаем абсолютно жестким. Система один раз статически неопределима; используем уравнения:

а) статики

$$\sum M_A = 0 \quad \text{или} \quad N_1 \cdot 5 + N_2 \cdot 3 = 13 \cdot 4;$$

б) перемещений (при условии поворота AB в положение AB_1)

$$\Delta_2 : \Delta_1 = 3 : 5 \quad \text{или} \quad \frac{N_2 l}{EF} \frac{E \cdot 1{,}2F}{N_1 l} = 0{,}6.$$

Решая эти уравнения, находим $N_1 = 8\ T$, $N_2 = 4\ T$. Из уравнений статики $\Sigma X = 0$ и $\Sigma Y = 0$ находим $H_A = 0$; $R_A = 1\ T$. Потребная площадь сечения находится по усилию $N_1 = 8\ T$:

$$1{,}2F = 8000 : 1600 = 5\ см^2, \quad \text{или} \quad F = 4{,}17\ см^2.$$

Б. Расчет по *состоянию разрушения* выполняется в таком порядке: а) действующая нагрузка P повышается до величины разрушающей Pn умножением на коэффициент запаса n; б) намечается состояние разрушения в $n+1$ стержне, где n — степень статической неопределимости. В случае по рис. 4-18 имеем: $N_{1т} = 1{,}2F\sigma_т$; $N_{2т} = F\sigma_т$. Из уравнения статики $\Sigma M_A = 0$ имеем:

$$13n \cdot 4 = N_{1т} \cdot 5 + N_{2т} \cdot 3,$$

откуда, полагая

$$\sigma_т : n = [\sigma] = 1600\ кГ/см^2,$$

получаем $F = 3{,}61\ см^2$.

В. Для той же системы (рис. 4-18) выполним расчет по *предельным состояниям*. Допустим, что вся нагрузка P составляется из $P_{пост} = 3\ T$ и $P_{врем} = 10\ T$; пусть коэффициенты перегрузки $n_п = 1{,}1$ и $n_в = 1{,}3$; кроме того, для Ст. 3 нормативное сопротивление $R = \sigma_т = 24\ кГ/мм^2$, а коэффициенты условий работы m и неоднородности k равны $m = k = 0{,}91$. Тогда для усилия $N_1 = 8\ T$, определенного из расчета статически неопределимой системы, имеем:

$$N_1 \cdot \frac{3}{13} n_п + N_1 \cdot \frac{10}{13} n_в \leqslant 1{,}2F\sigma_т km,$$

откуда $F = 4{,}22\ см^2$.

§ 4-12. Расчет на действие температуры

При действии температуры на статически определимые системы наблюдаются свободные деформации стержней при отсутствии напряжений; если $t = \text{const}$ — приращение температуры по длине l стержня, то его удлинение Δl_t составляет:

$$\Delta l_t = \alpha l \Delta t, \tag{4-101}$$

где α — коэффициент линейного расширения, значения которого для некоторых материалов приведены в таблице:

Материал	Сталь, бетон	Дюраль	Латунь, бронза	Медь	Свинец, цинк, олово	Фарфор
$\alpha \cdot 10^6$	12	22	18	16	28	3

В статически неопределимой системе, если деформации стержня в прежних (что и выше) условиях стеснены, удлинение стержня при $F=\text{const}$ составляет:

$$\Delta l=\frac{Nl}{EF}+\alpha l\,\Delta t, \tag{4-102}$$

а напряжение, как обычно, $\sigma=N:F$. Пусть в системе по рис. 4-18 при $F_1=1{,}2F$ и $F_2=F$ правый стержень получил дополнительный нагрев на 40° С; при этом $P=0$, $E=2\cdot10^6$ $кГ/см^2$, $\alpha=13\cdot10^{-6}$. Уравнения статики ($\Sigma M_A=0$) и перемещений [§ 4-11, а)] становятся:

а) $5N_1+3N_2=0$, или $\sigma_1=-0{,}5\sigma_2$;

б) $\Delta_2=0{,}6\Delta_1$ или с помощью (4-102)

$$\frac{\sigma_2}{E}+\alpha\Delta t=\frac{\sigma_1}{E};$$

совместно решая их, находим: $\sigma_2=-800$ $кГ/см^2$ и $\sigma_1=400$ $кГ/см^2$.

§ 4-13. Напряжения и деформации в наклонных направлениях

При одноосном растяжении (рис. 4-19)

$$\sigma_\alpha=\sigma\cos^2\alpha,\qquad \tau_\alpha=\sigma\sin\alpha\cos\alpha; \tag{4-103}$$

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_\alpha&=\varepsilon_x\cos^2\alpha+\varepsilon_y\sin^2\alpha,\\ \gamma_\alpha&=(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin\alpha\cos\alpha,\end{aligned}\right\} \tag{4-104}$$

причем

$$\varepsilon_y=-\mu\varepsilon_x;\quad \varepsilon_x=\sigma:E. \tag{4-105}$$

При двухосном растяжении (рис. 4-20):

$$\sigma_\alpha=\sigma_x\cos^2\alpha+\sigma_y\sin^2\alpha,\qquad \tau_\alpha=(\sigma_x-\sigma_y)\sin\alpha\cos\alpha, \tag{4-106}$$

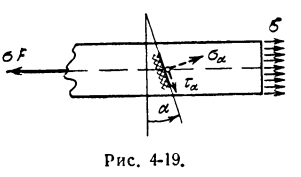


Рис. 4-19.

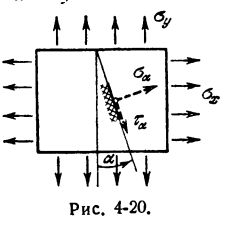


Рис. 4-20.

формулы (4-104) сохраняют силу; при этом

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x-\mu\sigma_y}{E},\qquad \varepsilon_y=\frac{\sigma_y-\mu\sigma_x}{E}; \tag{4-107}$$

удельная упругая работа деформации равна:

$$A=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y)=\frac{1}{2E}(\sigma_x^2+\sigma_y^2-2\mu\sigma_x\sigma_y). \tag{4-108}$$

§ 4-14. Тонкостенные оболочки вращения

Для произвольной точки A (рис. 4-21) главные радиусы кривизны: R_1 — меридианной кривой $r=f(x)$ и R_2 — широтного круга, причем $R_2=r:\cos\alpha$, где r — радиус широтного круга в плоскости,

перпендикулярной к оси вращения x. В случае внутреннего давления p, нормального к поверхности оболочки, условия равновесия (уравнение Лапласа):

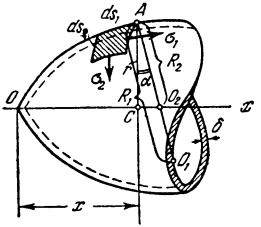


Рис. 4-21.

$$\frac{\sigma_1}{R_1}+\frac{\sigma_2}{R_2}=\frac{p}{\delta}, \qquad \sigma_1=\frac{pR_2}{2\delta}. \quad (4\text{-}109)$$

Относительные деформации элемента $ds_1 ds_2$ определяются по формулам (4-97); изменение радиуса R_2:

$$\Delta R_2 = R_2\varepsilon_2 = R_2\frac{\sigma_2-\mu\sigma_1}{E}. \quad (4\text{-}110)$$

Сферический сосуд ($R_1=R_2=R$) (рис. 4-21а):

$$\sigma_1=\sigma_2=\frac{pR}{2\delta}, \quad \Delta R=\frac{pR^2(1-\mu)}{2E\delta}. \quad (4\text{-}111)$$

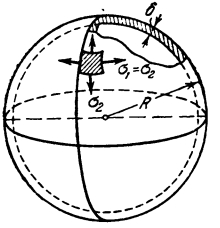


Рис. 4-21а.

Цилиндрический сосуд ($R_1=\infty$, $R_2=R$) (рис. 4-21б):

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{pR}{2\delta}; \qquad \sigma_2=2\sigma_1,\\ \Delta R&=\frac{pR^2}{2E\delta}(2-\mu).\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}112)$$

Круговое кольцо ($R_1=\infty$, $R_2=R$):

$$\sigma_1=0, \quad \sigma_2=\frac{pR}{\delta}, \quad \Delta R=\frac{pR^2}{E\delta}. \quad (4\text{-}113)$$

Конический сосуд ($R_1=\infty$, $R_2=r:\cos\alpha=\frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\cos\alpha}$) (рис. 4-21в):

$$\sigma_1=\frac{pR_2}{2\delta}; \qquad \sigma_2=2\sigma_1. \quad (4\text{-}114)$$

Тор — сосуд, полученный вращением кругового кольца радиуса R

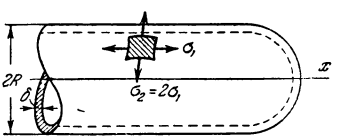
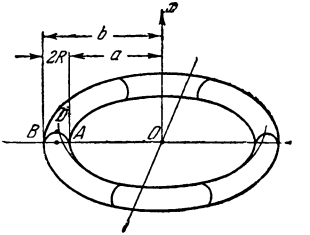


Рис. 4-21б.



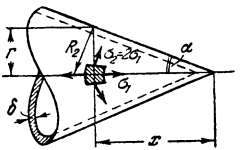


Рис. 4-21в.

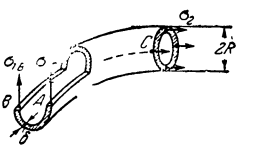


Рис. 4-21г.

(рис. 4-21г) вокруг оси x ($R_1=R=\mathrm{const}$, $R_2=-a$ для точки A, $R_2=b$

для точки B):

$$\sigma_2=\frac{pR}{2\delta};\quad \sigma_{1B}=\frac{pR}{\delta}\left(1-\frac{R}{2b}\right);\quad \sigma_{1A}=\frac{pR}{\delta}\left(1+\frac{R}{2a}\right). \quad (4\text{-}115)$$

В точке D, лежащей на расстоянии $a+R$ от оси x, $R_2=\infty$, следовательно, по уравнению (4-109) $\sigma_{1D}=\frac{pR}{\delta}$.

§ 4-15. Фермы *)

Простейшей расчетной схемой ферм служит *шарнирно-стержневая* система, имеющая прямолинейные элементы и нагруженная в узлах. Стержни фермы испытывают либо усилия растяжения, либо усилия сжатия.

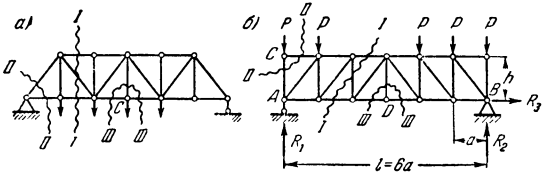


Рис. 4-22.

Здесь поясняются основы расчета лишь некоторых простейших типов ферм. На рис. 4-22 — фермы с параллельными поясами: *а* — с треугольной решеткой, *б* — раскосная. На рис. 4-23 — полигональные фермы: *а* — полураскосная, *б* — шпренгельная. На рис. 4-24: *а* — ферма крана, *б* — стропильная ферма.

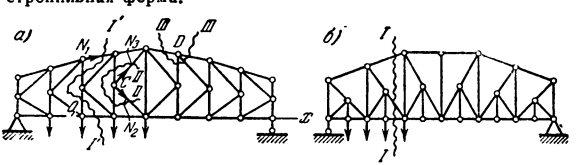


Рис. 4-23.

Ферма должна быть геометрически неизменяемой и удовлетворять необходимому в этих целях требованию: *число внутренних стержней равно удвоенному числу узлов без трех*. Например, в ферме рис. 4-22, *а* узлов 12, стержней 21; в ферме рис. 4-24, *а* узлов 11, стержней 19 (оттяжка AB — внешний стержень).

Для аналитического определения усилий используют метод сечений; характерные рекомендуемые виды сечений показаны на рис. 4-22—4-24.

При вырезании узлов (сечения *II—II*, *III—III* и *IV—IV* на всех схемах) добиваются либо того, чтобы при этом сечение прошло только через два стержня, и тогда, поскольку для сил, сходящихся в точке, используют два условия статики, неизвестные будут найдены; либо до-

*) См. главу 7 книги «Основы строительной механики стержневых систем» И. М. Рабиновича, 1956.

биваются того, чтобы при разрезании большего числа стержней усилия в излишних стержнях были предварительно найдены.

Рассмотрим, например, схему рис. 4-24, *б*; из сечения *II—II* вырезанием узла *F* находят усилия в двух стержнях *FD* и *FK*; в узле *D* сходятся три стержня, в том числе *FD*; следовательно, теперь из сечения *III—III* можно найти усилия в остальных двух стержнях; в узле *B* сходятся четыре стержня; значит, задача может быть решена, если вначале будут найдены, скажем, усилия в стержнях *AB* (из сечения *I—I*) и *BE* (из сечения *II'—II'*).

Сечения *III—III* на схеме рис. 4-22, *а* и *б* характерны тем, что при наличии трех стержней в узле два лежат на одной прямой; в этом случае усилие в третьем стержне легко находится проекцией всех сил на ось, перпендикулярную к первым двум стержням.

В способе вырезания узлов, когда в каждом вновь отсекаемом узле имеются лишь два новых неизвестных усилия, остальные же предварительно найдены, наблюдается накопление ошибок. Рекомендуется независимое определение усилий в каждом отдельном стержне. Весьма часто это удается сделать, применяя не вырезание узлов, а рассечение, отмеченное *I—I* на схемах рис. 4-22—4-24.

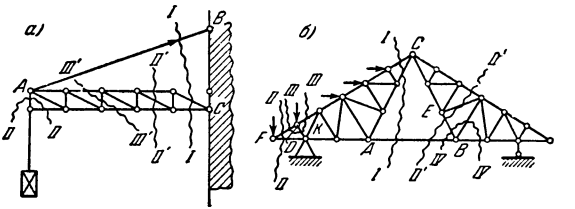


Рис. 4-24.

Рассечение *I—I* через три стержня, оси которых не пересекаются в одной точке, позволяет применить три уравнения статики; наиболее удобны уравнения моментов относительно точек пересечения каждой пары стержней (*точек Риттера*); если какие-либо два стержня параллельны (как в случае ферм по рис. 4-22, *а* и *б*), точка Риттера уходит в бесконечность, и применяют уравнение проекций на ось, перпендикулярную к параллельным стержням.

Пусть требуется рассчитать ферму с параллельными поясами по рис. 4-22, *б*. Опорные реакции будут: $R_1 = 2{,}33P$, $R_2 = 2{,}67P$, $R_3 = 0$. Вырезая сечением *II—II* узел *C* (рис. 4-25, *а*), предполагая, что неизвестные усилия N_1 и N_2 — растягивающие, и проектируя силы на оси x и y, получаем: $N_1 = 0$; $N_2 = -P$ (сжатие). Рассекая ферму сечением *I—I* и отбрасывая правую часть фермы, неизвестные усилия N_3, N_4 и N_5 снова намечаем растягивающими (рис. 4-25, *б*). Для определения N_3 (точка Риттера в бесконечности) составляем уравнение проекций: $\Sigma Y = 0 = 2{,}33P - 2P - N_3$, откуда $N_3 = 0{,}33P$. Точками Риттера для усилий N_4 и N_5 будут O_4 и O_5. Из уравнения $\Sigma M_{O_4} = 0$ имеем:

$$2{,}33P \cdot 2a - 2P \cdot 1{,}5a + N_4 h = 0,$$

откуда $N_4 = -1{,}66P\dfrac{a}{h}$ (сжатие). Поскольку точка O_5 располагается на одной вертикали с точкой O_4, получим $N_5 = -N_4$ (растяжение). Для определения усилия в центральной стойке фермы вырезаем узел *D* сечением *III—III* (рис. 4-25, *в*). Из условия $\Sigma Y = 0$ находим $N_6 = 0$. Аналогично определяются усилия в остальных стержнях. Ферма по рис. 4-22, *а*

решается подобным же образом. Крановая и стропильная фермы рассчитываются в том же порядке, что и ферма рис. 4-22, *б*; предварительно с помощью разрезов *I—I*, используя точку Риттера *C*, находят усилие в стержне *AB*; затем, зная N_{AB} и выполняя разрезы *II—II* и *III—III*, определяют усилия в остальных стержнях.

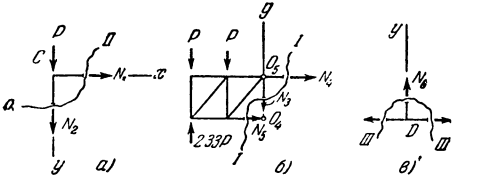


Рис. 4-25.

В полураскосной ферме (рис. 4-23, *а*) рекомендуются особые разрезы. С помощью сечения *I'—I'* можно найти усилия в поясах: например, для усилия N_1 берут точку Риттера O_1. С помощью сечения *II—II* устанавливают соотношение между усилиями N_2 и N_3 (из условия $\Sigma X = 0$); выполняя затем вертикальное сечение, находят N_2 и N_3. Вырезанием узла *D* (сечение *III—III*) можно найти усилие в стойке.

Шпренгельную ферму (рис. 4-23, *б*) можно решить с помощью разрезов через три стержня (подобных *I—I*) и вырезанием узлов.

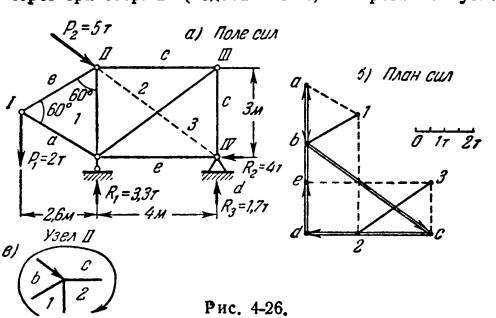


Рис. 4-26.

Графическое решение фермы состоит в построении диаграммы Максвелла—Кремоны, последовательность выполнения которой объясним по рис. 4-26. В поле сил (рис. 4-26, *а*) размечены внешние поля *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ограниченные областью фермы, а также линиями действия внешних сил $P_1 = 2T$, $P_2 = 5T$ и реакций опор: $R_1 = 3{,}3T$, $R_2 = 4T$ и $R_3 = 1{,}7T$ (последние найдены из уравнений статики). Внутренние поля обозначены цифрами *1*, *2*, *3*. Прочтение внутренних усилий выполняется с помощью обозначений тех полей, которые разграничиваются соответствующими стержнями. Например, для узла *II* усилие в горизонтальном элементе верхнего пояса (рис. 4-26, *в*) читается *c*2 (названия полей поставлены так, как это требуется направлением часовой стрелки); усилие в стойке, примыкающей к узлу *II*, читается 21.

План сил (рис. 4-26, *б*) строится в масштабе сил в таком порядке. Откладываются по величине и направлению внешние силы

(включая и опорные реакции): *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ea*, образующие замкнутый многоугольник. Затем вырезаются узел за узлом (в такой последовательности, чтобы в очередном узле было не более двух неизвестных) и для каждого узла достраивается замкнутый же силовой многоугольник.

Для системы по рис. 4-26 последовательность вырезания узлов принята следующей: *I*, *II*, *III*, *IV*. Для узла *I* в плане сил получен треугольник *ab*1*a*; для узла *II* — многоугольник 1*bc*221 и т. д.

Усилия сжатия отмечены пунктиром, усилия растяжения — сплошными линиями.

Литература. 1. См. гл. 4-1, стр. 161. 2. Рабинович И. М., Основы строительной механики стержневых систем. Стройиздат, 1956. 3. Справочник машиностроителя, т. 3, Машгиз, 1955.

Глава 4-3

СДВИГ, СРЕЗ

§ 4-16. Общие формулы

Касательные напряжения τ при действии поперечных сил Q на малый элемент Δs бруса (рис. 4-27) приближенно определяют в предположении равномерного их распределения по площади F поперечного сечения:

$$\tau = Q : F, \tag{4-116}$$

где $Q = P$; формула используется в расчетах на срез (скалывание) болтов, заклепок, сварных швов, элементов соединений, врубок.

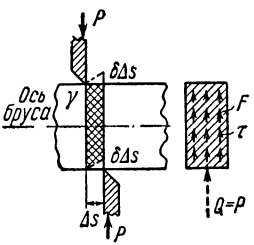


Рис. 4-27.

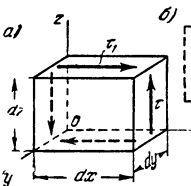


Рис. 4-28а.

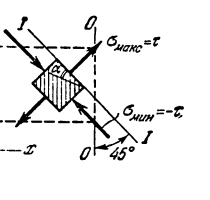


Рис. 4-28б.

В пределах упругости малая относительная деформация сдвига (*угол сдвига*) равна:

$$\gamma = \frac{\delta \Delta s}{\Delta s}. \tag{4-117}$$

Закон Гука:

$$\tau = G\gamma, \tag{4-118}$$

где *модуль сдвига* G ($кГ/см^2$) связан с модулем растяжения E:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}; \tag{4-119}$$

μ — коэффициент Пуассона (см. § 4-3 гл. 4-1 и табл. 4-1). Удельная *энергия сдвига*

$$A_{сд} = \frac{\tau^2}{2G} = \frac{\tau\gamma}{2}. \tag{4-120}$$

Формулы (4-116)—(4-120) соответствуют деформациям чистого сдвига (рис. 4-28а), когда бесконечно малый элемент испытывает действие касательных напряжений $\tau = \tau_1$, лежащих в плоскостях, параллельных одной плоскости (например, xz). Если грани действия напряжений $\tau = \tau_1$ повернуть на 45°, то обнаруживаются главные напряжения сдвига: $\sigma_{макс} = \tau$; $\sigma_{мин} = -\tau$ (рис. 4-28б). Для площадки, отклоненной на углы α от $I—I$ и $\alpha_1 = \alpha + 45°$ от $O—O$, получаем:

$$\sigma_{\alpha_1} = \tau \sin 2\alpha_1; \qquad \tau_{\alpha_1} = -\tau \cos 2\alpha_1; \tag{4-121}$$

$$\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon \sin 2\alpha_1; \qquad \gamma_{\alpha_1} = -2\varepsilon \cos \alpha_1, \tag{4-122}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\tau (1 + \mu)}{E}.$$

§ 4-17. Клепаные соединения

Заклепки (а также и болты), обеспечивающие прикрепление стержней к узлу конструкции, рассчитываются на *срез* и на *смятие*.

На рис. 4-29, *а* показано прикрепление к балке *Б* с помощью косынки *К* двухуголкового стержня, растягиваемого силой $N = 12{,}3$ *Т*.

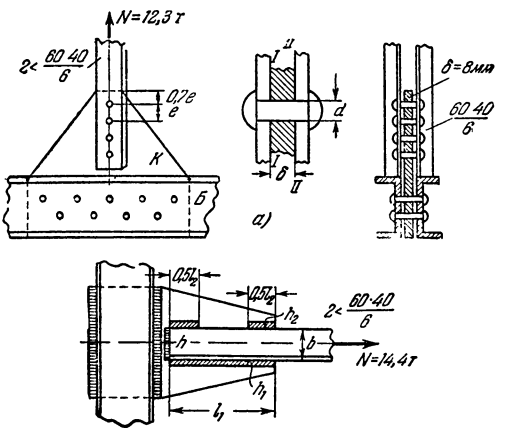


Рис. 4-29.

Заклепки испытывают в данном случае двойной срез (по плоскостям $I—I$ и $II—II$). Расчетная формула:

$$Q = N = \frac{\pi d^2}{4} kn\,[\tau]; \tag{4-123}$$

d — диаметр заклепок; n — их число; k — число срезов заклепки. Задаваясь допускаемым напряжением $[\tau] = 1000$ *кГ/см*^{2} и диаметром

$d = 1{,}4$, при $k = 2$ находим усилие среза на одну заклепку $Q_1 = \frac{\pi d^2}{4} k\,[\tau] = 3080$ *кГ*; таким образом, требуются (по срезу) $n = N : Q_1 \approx$ ≈ 4 заклепки. Растягивающее напряжение в уголках $60 \cdot 40 \cdot 6$, площадь сечения которых по ГОСТу составляет $5{,}72 \cdot 2 = 11{,}44$, а с учетом ослабления отверстием для заклепки $F = 11{,}44 - 2 \cdot 0{,}6 \cdot 1{,}4 = 9{,}76$ *см*², равно $\sigma = N : F = 1260$ *кГ/см*².

Условно принимают равномерное распределение напряжений *смятия* по каждой заклепке на площади $d\delta$, где δ — толщина косынки. Расчетная формула на смятие:

$$N = d\delta n\,[\sigma_{см}]. \qquad (4\text{-}124)$$

При $[\sigma_{см}] \approx 2[\sigma_{раст}] = 2800$ *кГ/см*² получаем:

$$\delta = N : dn\,[\sigma_{см}] = 0{,}8\ см.$$

Расстояние между заклепками (шаг e) назначают из того условия, чтобы напряжения τ по возможной площади *скалывания* $(e - d)\,\delta$ не превосходили $[\tau]$, т. е. $(e - d)\,\delta\tau n = N$, откуда $e \approx 5{,}2$ *см*; обычно назначают $e \geqslant 3{,}5\,d = 4{,}9$ *см*.

§ 4-18. Сварные соединения

Расчет прикрепления стержня к узлу конструкции с помощью сварки (рис. 4-29, *б*) выполняется по формуле, учитывающей сопротивление срезу сварных швов при допускаемом напряжении $[\tau_{св}]$:

$$Q = N = [\tau_{св}]\,0{,}7\,k\,(h_1 l_1 + h_2 l_2 + hb), \qquad (4\text{-}125)$$

где k — число уголков, из которых состоит стержень; h_1 и h_2 — толщины фланговых швов (сплошного длиной l_1 и прерывистого общей длиной l_2); h — толщина лобового шва; обычно $h_2 l_2 \approx 0{,}3\,h_1 l_1$.

Пусть $N = 14{,}4$ *Т*, $h_1 = h_2 = h = 4$ *мм*; прикрепляется при $[\tau_{св}] = 900$ *кГ/см*² 2 ∠ $60 \cdot 40 \cdot 6$; следовательно, $b = 6$ *см*. Из формулы (4-125) находим $l_1 + l_2 = 26$ *см*; далее, $l_1 = 20$ *см* и $l_2 = 6$ *см*. На практике к полученным размерам l_1 и l_2 добавляют по 0,5 — 1,0 *см*. Иногда лобового шва не ставят, тогда в формуле (4-125) отбрасывают последний из членов в скобках.

§ 4-19. Врубки

Соединения в дереве, выполняемые с помощью врубок, рассчитываются на скалывание и смятие. Например, в случае, показанном на рис. 4-30, скалывание может наблюдаться по площади ab; соответствующие напряжения τ определяются формулой

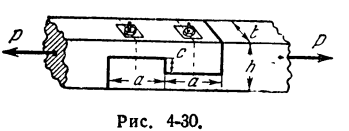


Рис. 4-30.

$$\tau = Q : ab, \qquad (4\text{-}126)$$

причем $Q = P$. Смятие происходит по вертикальной площадке cb, и расчетной формулой служит

$$\sigma_{см} = N : cb, \qquad (4\text{-}127)$$

причем $N = P$. Ослабленное сечение (шириной b и высотой $0{,}5\,(h - c)$) испытывает внецентренное растяжение (см. гл. 4-8).

Литература: См. гл. 4-1, стр. 161.

Глава 4-4

КРУЧЕНИЕ

§ 4-20. Формулы для расчета разных профилей

Для кругового цилиндра (сплошного или пустотелого), защемленного одним концом и испытывающего на другом действие скручивающего момента $M_x = M_к$ (рис. 4-31), *касательные напряжения* τ в пределах упругости определяются формулами:

$$\left.\begin{aligned} \tau_\rho &= \frac{M_к}{J_p}\rho, \\ \tau &= \frac{M_к}{W_p}, \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}128)$$

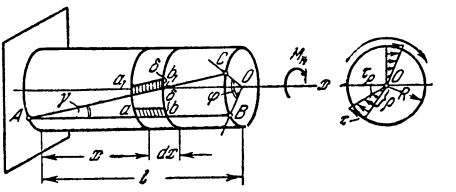


Рис. 4-31.

где момент инерции поперечного сечения сплошного цилиндра $J_p = 0{,}5\,\pi R^4$ и момент сопротивления $W_p = 0{,}5\,\pi R^3$; для пустотелого цилиндра, имеющего радиус внутренней полости R_1, соответственно

$$J_p = 0{,}5\pi R^4 (1 - c^4), \qquad W_p = 0{,}5\pi R^3 (1 - c^4), \quad (4\text{-}129)$$

где $c = R_1 : R$; при $c = 0$ получаем характеристики сплошного цилиндра; при очень тонком кольце

$$J_p = 2\pi R^3\delta; \qquad W_p = 2\pi R^2\delta, \quad (4\text{-}130)$$

где δ — толщина кольца. Угол закручивания на единицу длины φ' и угол сдвига γ_ρ на расстоянии ρ от точки O:

$$\varphi' = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_к}{GJ_p}, \quad \gamma_\rho = \varphi'\rho; \quad (4\text{-}131)$$

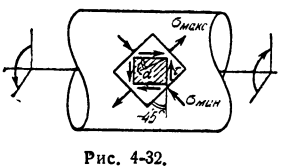


Рис. 4-32.

угол закручивания на длине x

$$\varphi = \frac{M_к x}{GJ_p}; \quad (4\text{-}132)$$

если $M_к$ меняется по длине цилиндра, то φ получают интегрированием выражения (4-131); *закон Гука*:

$$\tau_\rho = G\gamma_\rho = G\varphi'\rho. \quad (4\text{-}133)$$

Главные напряжения действуют на площадках, отклоненных от поперечных сечений на $\pm 45°$ (рис. 4-32), и составляют

$$\frac{\sigma_{макс}}{мин} = \pm\tau. \quad (4\text{-}134)$$

На площадках, отклоненных от продольных сечений на угол α, напряжения определяются по формулам:

$$\sigma_\alpha = -\tau \sin 2\alpha, \qquad \tau_\alpha = \tau \cos 2\alpha. \quad (4\text{-}135)$$

Удельная энергия при кручении составляет:

$$A_к = \frac{\tau_\rho^2}{2G} = \frac{M_к^2 \rho^2}{2GJ_p^2}, \qquad (4\text{-}136)$$

где ρ — расстояние от центра цилиндра. Потенциальная энергия для элемента длиной dx равна:

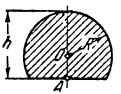
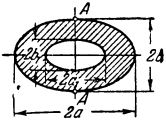
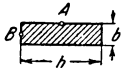
$$dV_x = \frac{M_к^2 dx}{2GJ_p}. \qquad (4\text{-}137)$$

Для стержней некруговых профилей формулы наибольших напряжений $\tau_{расч}$ и углов поворота $d\varphi$ в пределах упругости имеют вид:

$$\tau_{расч} = M_к : W_к, \qquad d\varphi = \frac{M_к dx}{GJ_к}; \qquad (4\text{-}138)$$

условные моменты сопротивления сечения $W_к$ и условные моменты инерции $J_к$ берутся из табл. 4-21.

Таблица 4-21. **Условные моменты инерции $J_к$ и сопротивления $W_к$ для формул (4-138)**

Форма сечения	$J_к$	$W_к$	Место $\tau_{расч}$
Сегмент 	$\left(1{,}3\,\frac{h}{R}-1\right)R^4$ $h > 0{,}25R$	$\frac{\left(1{,}3\frac{h}{R}-1\right)R^3}{0{,}15\frac{h}{R}+0{,}7}$	точка A
Эллипс 	$\pi\,\frac{b^4 n^3(1-c^4)}{1+n^2}$ $c = a_1 : a = b_1 : b$ $n = a : b = a_1 : b_1$ справедливо и при $c = 0$	$\pi\,\frac{b^3 n}{2}(1-c^4)$	точка A
Узкий прямоугольник 	$\frac{m-0{,}63}{3}\,b^4$ $m = h : b > 4$	$\frac{m-0{,}63}{3}\,b^3$	точка A

Продолжение табл. 4-21

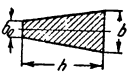
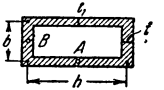
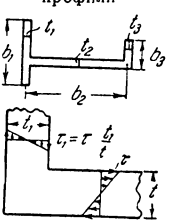
Форма сечения	$J_к$	$W_к$	Место $\tau_{расч}$
Прямоугольник (схема та же). Коэффициенты α, β и γ см. в табл. 4-22	βhb^3	αhb^2	A; для точки B $\tau_1 = \tau\gamma$
Равносторонний треугольник со стороной a	$0{,}0216\,a^4$	$0{,}05\,a^3$	В серединах сторон
Вытянутая трапеция  $c = b_0 : b$; $h \geq 4b$	$\frac{hb^3}{12}(1+c) \times$ $\times(1+c^2) -$ $-0{,}1b^4(1+c^4)$	$J_к : b$	На боковых сторонах ближе к b
Правильный шестиугольник со стороной b	$1{,}04\,b^4$	$0{,}97\,b^3$	В серединах сторон
Правильный восьмиугольник со стороной b	$3{,}67\,b^4$	$2{,}6\,b^3$	В серединах сторон
Коробка 	$\frac{2F_к^2}{\frac{h}{t_1}+\frac{b}{t}}$ $F_к = bh$	$2F_к t$ $2F_к t_1$	точка B точка A
Открытые тонкостенные профили 	$\frac{\alpha}{3}(b_1t_1^3 +$ $+ b_2t_2^3 + b_3t_1^3 +$ $+ \ldots)$ $\alpha_{\angle} = 1{,}0$ $\alpha_{двутавр.} = 1{,}12$ $\alpha_{швелл.} = 1{,}20$	$J_к : t$	для стороны с толщиной t

Таблица 4-22. **Коэффициенты α, β и γ для прямоугольника (см. табл. 4-21)**

$h:b$	1	1,5	2	3	4	6	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,267	0,282	0,299	0,313	1/3
β	0,141	0,196	0,229	0,263	0,281	0,299	0,313	1/3
γ	1	0,859	0,795	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742

Допускаемые напряжения $[\tau]$ обосновываются применением той или иной теории прочности и дополнительным учетом явлений усталости, концентрации напряжений (подробнее см. § 4-9). Исходя из теорий II, III и V (см. § 4-4), $[\tau]$ в зависимости от $[\sigma]$ должно быть соответственно

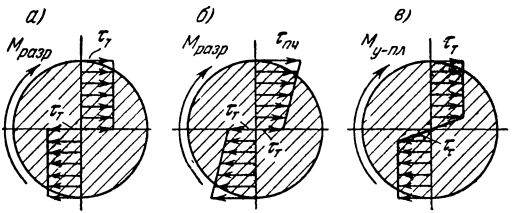


Рис. 4-33.

$[\sigma]:(1+\mu)$; $0{,}5\,[\sigma]$ и $0{,}58\,[\sigma]$. Эпюры напряжений для стержня круглого сечения *в состоянии разрушения* имеют вид, показанный на рис. 4-33: *а*) при идеальной пластичности, *б*) при наличии упрочнения. На рис. 4-33, *в* дана эпюра для упруго-пластичного состояния. Связь между $M_{разр}$ и τ: для *а*):

$$M_{разр}=\tau_т\frac{2\pi R^3}{3};$$

для *б*):

$$M_{разр}=\tau_т\frac{\pi R^3}{6}\left(1+3\frac{\tau_{пч}}{\tau_т}\right). \qquad (4\text{-}139)$$

§ 4-21. Чистое и стесненное кручение тонких открытых профилей

Сечения стержня при *чистом* кручении свободно депланируют от действия крутящих моментов, образующие остаются прямыми (рис. 4-34); депланация u произвольной точки B составляет:

$$u=-\gamma y=-\frac{d\varphi}{dx}yz=-\varphi'\omega, \qquad (4\text{-}140)$$

где $\omega=yz$ — так называемая секторная координата точки B (см. гл. 4-5). Напряжения τ и деформации φ чистого кручения определяются формулами (4-138) § 4-20 (см. последнюю строку табл. 4-21). Нормальных напряжений в поперечных сечениях нет.

Стесненное кручение (рис. 4-35) сопровождается изгибом образующих, происходящим либо вследствие невозможности свободной депланации для какого-либо сечения, либо при переменности нагрузки или сечений стержня; дифференциальное уравнение кручения:

$$M_к = GJ_к\varphi' - EJ_\omega\varphi''', \quad \text{или} \quad m = M_к' = GJ_к\varphi'' - EJ_\omega\varphi^{IV}; \qquad (4\text{-}141)$$

первыми членами правых частей учитывается явление свободного кручения, и напряжения $\bar{\tau}$ определяются формулой (4-138); вторичные

Рис. 4-34.

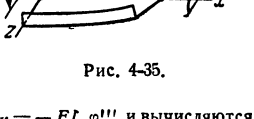


Рис. 4-35.

напряжения $\bar{\bar{\tau}}$ зависят от второго члена $\bar{M}_к = -EJ_\omega\varphi'''$ и вычисляются по формуле

$$\bar{\bar{\tau}} = \frac{\bar{M}_к}{tJ_\omega} S_\omega^{отс}, \qquad (4\text{-}142)$$

где $J_\omega = \int_F \omega^2 dF$ — секторный момент инерции и $S_\omega^{отс} = \int_{F_{отс}} \omega dF$ — секторный статический момент отсеченной площади сечения (см. гл. 4-5); $m = \dfrac{dM_к}{dx}$.

При стесненном кручении возникают дополнительные нормальные напряжения:

$$\bar{\bar{\sigma}} = \frac{B\omega}{J_\omega}; \quad B = EJ_\omega\varphi'', \qquad (4\text{-}143)$$

где по Власову *) B — бимомент. Интеграл уравнения (4-141) при $k = \sqrt{GJ_к : EJ_\omega}$ имеет вид:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{k}\operatorname{sh} kx + \frac{B_0}{EJ_\omega k^2}(\operatorname{ch} kx - 1) + \frac{M_{к,0}}{EJ_\omega k^3}(kx - \operatorname{sh} kx) +$$

$$+ \frac{m_0}{EJ_\omega k^4}\left(\frac{k^2x^2}{2!} - \operatorname{ch} kx + 1\right) + \ldots; \qquad (4\text{-}144)$$

φ_0, φ_0', B_0, $M_{к,0}$, m_0 — начальные (при $x = 0$) параметры. При k весьма малом (большая тонкостенность) уравнение (4-144) упрощается:

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0' x + \frac{1}{EJ_\omega}\left(\frac{B_0x^2}{2} - \frac{M_{к,0}x^3}{6} - \frac{m_0x^4}{24} + \ldots\right). \qquad (4\text{-}145)$$

*) Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, 1958.

§ 4-22. Расчет вала. Эпюры

По заданной мощности N *л. с.*, передаваемой валом, и числу оборотов n в минуту крутящий момент определяют по формуле

$$M_к = 2{,}25\,\frac{N}{\pi n}\,[T\cdot м]. \qquad (4\text{-}146)$$

Подбор сечений выполняют на прочность (по $[\tau]$) и на жесткость (по $[\varphi]$), пользуясь формулами § 4-20. Предварительно строятся эпюры $M_к$ для выявления расчетных моментов; ордината эпюры в любом сечении равна равнодействующей внешних крутящих моментов, действующих по одну сторону от этого сечения. На рис. 4-36 показана эпюра для двух случаев воздействия. В случае *а* момент M_0 ведущего шкива передает на вал $N_0 = 534$ *л. с.* при числе оборотов $n = 960$ и распределяется по ведомым шкивам в таких долях: $M_a : M_b : M_c = 0{,}2 : 0{,}3 : 0{,}5$. По формуле (4-146)

$$M_0 = 2{,}25\,\frac{534}{3{,}14\cdot 960} = 0{,}4\ T\cdot м;$$

соответственно $M_a = 0{,}08\ T\cdot м$; $M_b = 0{,}12\ T\cdot м$; $M_c = 0{,}20\ T\cdot м$.

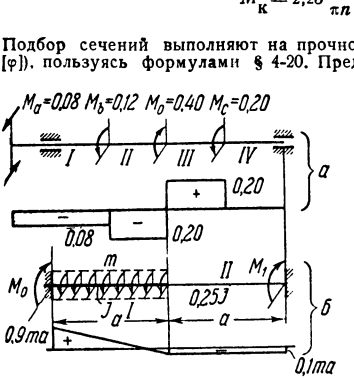


Рис. 4-36.

На эпюре знаком минус отмечены равнодействующие внешних моментов, вращающие относительно внешней (к поперечному сечению) нормали против хода часовой стрелки. $M_{расч} = M_{макс} = 0{,}2\ T\cdot м$. Радиус сечения круглого вала из расчета на прочность при $[\tau] = 475\ кГ/см^2$ равен $R = \sqrt[3]{2M : \pi[\tau]} = 3\ см$; из расчета на жесткость для $[\varphi] = 0{,}6°$ на $l = 1\ м$, или в радианах $0{,}0103\ 1/м$, и при $G = 8\cdot 10^5\ кГ/см^2$ получаем

$$R = \sqrt[4]{2Ml : [\varphi]G} = 3{,}5\ см.$$

Следует принять $d = 2R = 7\ см$.

В случае *б* на участке *I* $M_I = M_0 - mx$, где $0 \leqslant x \leqslant a$; на участке *II* $M_{II} = M_0 - ma$. Для определения реактивных моментов M_0 и M_1 составляется деформационное уравнение:

$$\int_0^a \frac{M_I\,dx}{GJ} + \frac{M_{II}\,a}{G\,0{,}25\,J} = 0,$$

откуда $M_0 = 0{,}9\ ma$; $M_1 = 0{,}1\ ma$.

Литература. 1. См. гл. 4-1, стр. 170. 2. Власов В. З., Тонкостенные упругие стержни, Физматгиз, 1958. 3. Тимошенко С. П., Устойчивость упругих систем, Гостехиздат, 1955.

Глава 4-5

ИЗГИБ

§ 4-23. Основные формулы

Нормальное напряжение при простом изгибе в поперечном сечении изогнутого прямого бруса в пределах упругости (рис. 4-37)

$$\left.\begin{aligned} \sigma(y) &= \frac{M}{J_z}\,y, \\ \sigma &= \frac{M}{W_z}, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}147)$$

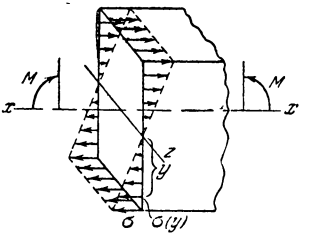


Рис. 4-37.

где M — изгибающий момент, равный моменту (относительно оси z) внешних сил, лежащих по одну сторону от данного сечения (табл. 4-28); J_z и W_z — соответственно момент инерции площади сечения бруса относительно нейтральной оси z (табл. 4-23 — 4-27) и момент сопротивления этой же площади; y — расстояние от оси z до точки с напряжением $\sigma(y)$.

Касательное напряжение по *формуле Журавского* (рис. 4-38) равно:

$$\tau = \frac{QS_z^{\text{отс}}}{J_z b}, \qquad (4\text{-}148)$$

где Q — поперечная сила, равная сумме проекций (на перпендикуляр к нейтральной оси) внешних сил, лежащих по одну сторону от данного сечения (табл. 4-28); b — ширина сечения в уровне действия τ;

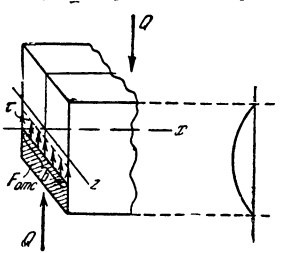


Рис. 4-38.

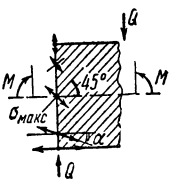


Рис. 4-39.

$S_z^{\text{отс}} = \int\limits_{F_{\text{отс}}} y\,dF$ — статический момент отсеченной площади $F_{\text{отс}}$ сечения относительно оси z. *Главные напряжения* [см. формулу (4-16)]:

$$\sigma_{\substack{\text{макс}\\ \text{мин}}} = \frac{\sigma(y)}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2(y) + 4\tau^2}, \qquad (4\text{-}149)$$

причем $\sigma_{\text{макс}}$ отклоняется от направления оси x (рис. 4-39) на угол α

(+ против хода часовой стрелки) согласно формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2\tau}{\sigma(y)} \quad \text{или} \quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{\tau}{\sigma_{\text{макс}}} = \frac{\tau}{\sigma_{\text{мин}}}; \qquad (4\text{-}150)$$

$\sigma_{\text{мин}}$ перпендикулярен к $\sigma_{\text{макс}}$. Взамен формул (4-149) и (4-150) пользуются *кругом Мора* (рис. 4-40), который строится в таком порядке: откладывают $OK = \sigma(y)$ и $KD = \tau$ (при отрицательных значениях — в обратных направлениях); из точки C ($OC = CK$) проводят круг радиусом $CD = \sqrt{\left(\frac{\sigma(y)}{2}\right)^2 + \tau^2}$; тогда $\sigma_{\text{макс}} = OA$; $\sigma_{\text{мин}} = OB$; $\alpha = \angle ABD$.

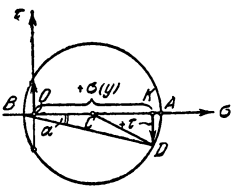


Рис. 4-40.

Закон Гука при изгибе, *кривизна* $1/\rho$ и *угол* $d\varphi$ взаимного *поворота* сечений (рис. 4-41):

$$\sigma(y) = E\varepsilon(y) = E\frac{y}{\rho}, \qquad (4\text{-}151)$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_z}, \qquad d\varphi = \frac{Mdx}{EJ_z}. \qquad (4\text{-}152)$$

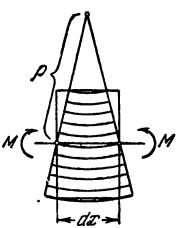


Рис. 4-41.

Потенциальная энергия деформаций изгиба для элемента (dV) и для балки (V) с непрерывным изменением M и J_z:

$$dV = \frac{M^2 dx}{2EJ_z}; \quad V = \int_0^l \frac{M^2 dx}{2EJ_z}; \qquad (4\text{-}153)$$

удельная упругая энергия:

$$A = \frac{dV}{Fdx} = \frac{\sigma^2_{\text{макс}}}{2E}\frac{k_я}{y_{\text{макс}}}, \qquad (4\text{-}154)$$

где $\sigma_{\text{макс}}$ — напряжение в наиболее удаленном (на $y_{\text{макс}}$) волокне и $k_я$ — ядровое расстояние (см. гл. 4-8).

§ 4-24. Геометрические характеристики сечений

Статические моменты S_z и S_y площади F поперечного сечения (рис. 4-42):

$$S_z = \int_F y\,dF = Fd; \qquad S_y = \int_F z\,dF = Fc, \qquad (4\text{-}155)$$

где c и d — координаты центра тяжести площади. Моменты инерции [$см^4$] осевые (экваториальные) J_z, J_y и центробежный J_{zy}:

$$\left.\begin{aligned} J_z &= \int_F y^2 dF = J_{z_0} + d^2F = i_z^2 F, \\ J_y &= \int_F z^2 dF = J_{y_0} + c^2F = i_y^2 F, \quad J_{zy} = \int_F zy\,dF = J_{z_0y_0} + c\,dF. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}156)$$

Радиусы инерции: i_z и i_y; Cz_0 и Cy_0 — центральные оси.

Полярный момент инерции J_p равен сумме экваториальных J_z и J_y при полюсе в начале координат. При повороте на угол α коорди-

натных осей zy моменты инерции становятся следующими:

$$\left.\begin{aligned} J_{z_1} &= J_z \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{zy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_z \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha + J_{zy} \sin 2\alpha, \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}157)$$

$$J_{z_1 y_1} = \frac{J_z - J_y}{2} \sin 2\alpha + J_{zy} \cos 2\alpha = -0{,}5 \frac{dJ_{z_1}}{d\alpha}. \quad (4\text{-}158)$$

Главные моменты инерции при начале координат в точке O:

$$J_{\substack{\text{макс} \\ \text{мин}}} = \frac{J_z + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_z - J_y}{2}\right)^2 + J_{zy}^2}, \quad (4\text{-}159)$$

причем ось для $J_{\text{макс}}$ отклоняется от оси z (рис. 4-42) на $\angle\alpha$ (+ против хода часовой стрелки) согласно формулам:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2J_{zy}}{J_z - J_y}; \qquad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{J_{zy}}{J_{\text{макс}} - J_y} = -\frac{J_{zy}}{J_z - J_{\text{мин}}}. \quad (4\text{-}160)$$

Моменты сопротивления [$см^3$] относительно главных центральных осей сечения:

$$W_z = J_z : y_{\text{макс}}; \qquad W_y = J_y : z_{\text{макс}}. \quad (4\text{-}161)$$

Для тонкостенных профилей (рис. 4-43) введены, кроме того, секторные характеристики: *секторная координата* ω [$см^2$], *статический*

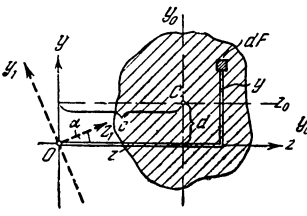


Рис. 4-42.

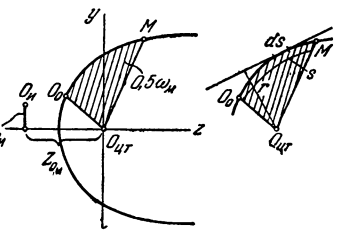


Рис. 4-43.

секторный момент площади S_ω [$см^4$], *секторно-линейные моменты* $S_{\omega z}$ и $S_{\omega y}$ [$см^5$] и *секторный момент инерции* J_ω [$см^6$] площади F:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \int_0^s r\,ds, \qquad S_\omega = \int_F \omega\,dF, \qquad S_{\omega z} = \int_F \omega y\,dF, \\ S_{\omega y} &= \int_F \omega z\,dF, \qquad J_\omega = \int_F \omega^2\,dF. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}162)$$

Простейшие расчетные формулы получаются при пользовании помимо центра тяжести (служащего полюсом для отсчета координат ω) главным центром отсчета O_0 (имеющим секторную координату ω_0) и центром изгиба O_u (иначе сдвига) (с координатами z_{0_u} и y_{0_u}):

$$\omega_0 = S_{\omega_1} : F; \qquad z_{0_u} = -\frac{S_{\omega z}}{J_z}; \qquad y_{0_u} = \frac{S_{\omega y}}{J_y}. \quad (4\text{-}163)$$

где y, z и ω, а также J_z и J_y — координаты и моменты инерции относительно главных центральных осей при полюсе в центре тяжести; S_{ω_1} — статический секторный момент при произвольном начале отсчета.

Свойства секторных характеристик при $\omega_1 = \omega + \omega_0$, где ω — координата точки M от главного центра отсчета и центра тяжести:

$$\left.\begin{aligned} S_{\omega_1} &= S_\omega + \omega_0 F, \qquad S_{z\omega_1} = S_{z\omega}, \qquad S_{y\omega_1} = S_{y\omega}, \\ J_\omega &= \int_F \omega^2 dF = \int_F \omega\omega_1 dF, \qquad J_{\omega_1} = J_\omega + \omega_0^2 F. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}164)$$

Если полюс координаты ω из центра тяжести переносится в точку с координатами $z = a_1$ и $y = a_2$ (рис. 4-43), то

$$\left.\begin{aligned} S_{z\omega_1} &= S_{z\omega} + a_1 J_z, \\ S_{y\omega_1} &= S_{y\omega} - a_2 J_y. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}165)$$

Для ломаных профилей при пользовании формулами (4-161) — (4-164) используют графоаналитический прием интегрирования. На рис. 4-44 даны эпюры изменения координат ω, y и z для швеллера постоянной

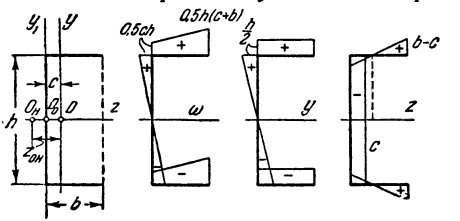


Рис. 4-44.

толщины t со сторонами b и h, имеющего площадь $F = t(2b + h)$ и координату центра тяжести (точка O): $c = S_{y_1} : F = b^2 t : F = b^2 : (2b + h)$; $S_\omega = 0$ (площадь эпюры ω); следовательно, главный центр отсчета лежит на

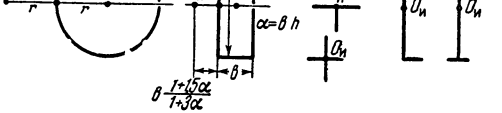


Рис. 4-45.

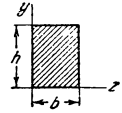
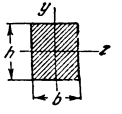
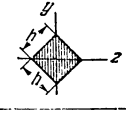
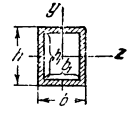
оси z; $S_{y\omega} = 0$, так как эпюры ω и z взаимно ортогональны; следовательно, $y_{O_и} = 0$; сопряжение эпюр ω и y по Верещагину (гл. 4-9) определяет $S_{z\omega} = \dfrac{b^2 h^2 t\,(h + 3b)}{3\,(2b + h)}$ и $J_z = \dfrac{th^2}{12}(h + 6b)$; поэтому

$$z_{O_и} = -4b^2 \frac{h + 3b}{(2b + h)(h + 6b)}.$$

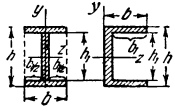
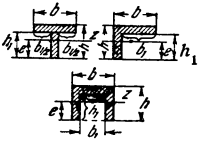
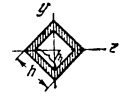
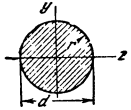
На рис. 4-45 показаны центры изгиба $O_и$ для некоторых профилей.

§ 4-25. Формулы и табличные значения моментов инерции и сопротивления

Таблица 4-23. Экваториальные (осевые) моменты инерции и сопротивления

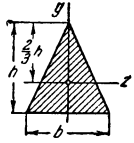
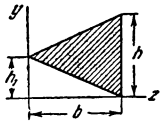
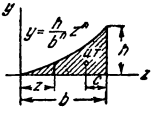
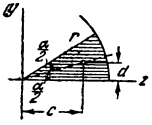
Форма сечения	J_z	J_y	J_{zy}	W_z
	$\frac{bh^3}{3}$	$\frac{hb^3}{3}$	$\frac{b^2h^2}{4}$	—
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	0	$\frac{bh^2}{6}$
	$\frac{h^4}{12}$	$\frac{h^4}{12}$	0	$\frac{h^3\sqrt{2}}{12}$
	$\frac{bh^3}{12}(1-\beta c^3)$ $\beta = b_1 : b$ $c = h_1 : h$	$\frac{hb^3}{12}(1-c\beta^3)$	0	$\frac{bh^2}{6}(1-\beta c^2)$

Продолжение табл. 4-23

Форма сечения	J_z	J_y	J_{zy}	W_z
	$\frac{bh^3}{12}(1-\beta c^3)$ $c = h_1 : h$ $\beta = b_1 \cdot b$	$\frac{hb^3}{12}[1 - c^3(3 - 3\beta + \beta^2)]$	0	$\frac{bh^2}{6}(1-\beta c^3)$
	$\frac{bh^3}{12}[(1-\beta c^2)^2 - 4\beta c(1-c)^2]$ $\beta = b_1 : b$ $c = h_1 : h$	Координата центра $e = \frac{h}{2}\frac{1-\beta c^2}{1-\beta c}$	—	$J_z : e$
	$\frac{h^4}{12}(1-c^4)$	$\frac{h^4}{12}(1-c^4)$	0	$\frac{h^3}{12}\sqrt{2}(1-c^4)$
	$\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4}$		0	$\frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4}$

	$\frac{\pi d^4}{64}(1-c^4) = \frac{\pi r^4}{4}(1-c^4)$ $c = d_1 : d$	0	$\frac{\pi d^3}{32}(1-c^4)$
	$\pi r^3 t$ $t \ll r$	$\pi r^2 t$	0	$\pi r^2 t$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	0	$\frac{5}{8} r^3$
	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^4$	0	$\frac{5\sqrt{3}}{16} r^3$
Правильный многоугольник, вписанный в круг радиуса R, F — площадь многоугольника	$\approx F\frac{R^2}{4}$	$\frac{FR^2}{4}$	0	$\frac{FR}{4}$

Продолжение табл. 4-23

Форма сечения	J_z	J_y	J_{zy}	W_z
	$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$	0	$\frac{bh^3}{24}$
	$\frac{bh^2}{12}(1+c_1+c_1^2)$ $c_1 = h_1 : h$	$\frac{hb^3}{4}$	$\frac{h^2b^2}{12}(1{,}5+c_1)$	—
	$\frac{bh^3}{3}(1+3n)$	$\frac{hb^3}{n+3}$	$\frac{h^2b^2}{4(n+1)}$	Площадь $F = \frac{bh}{n+1}$ Координата центра $c = \frac{b}{n+2}$
	$\frac{r^4}{8}(\alpha -$ $-0{,}5\sin 2\alpha)$	$\frac{r^4}{8}(\alpha +$ $+0{,}5\sin 2\alpha)$	$\frac{r^4}{8}\sin^2\alpha$	Координаты центра $c = \frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ $d = \frac{2r}{3}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha}$

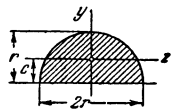
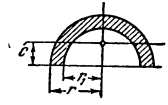
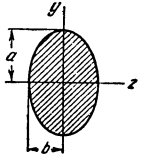
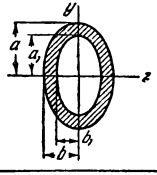
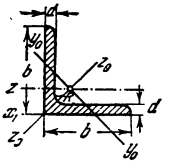
	$r^4\left(\frac{\pi}{8}-\frac{8}{9\pi}\right)=$ $=0{,}11r^4$	$\frac{\pi r^4}{8}$	0 Координата центра $c=0{,}425r$	$0{,}191r^3$
	$0{,}11r^4(1-e^4)$ $e=r_1:r$	$\frac{\pi r^4}{8}(1-e^4)$	0 Координата центра $c=0{,}425r\times$ $\times\frac{1+e+e^2}{1+e}$	$J_z:(r-c)$
	$\frac{\pi a^3 b}{4}$	$\frac{\pi a b^3}{4}$	0	$\frac{\pi a^2 b}{4}$
	$\frac{\pi a^3 b}{4}(1-\beta\alpha^3)$ $\alpha=a_1:a$ $\beta=b_1:b$	$\frac{\pi a b^3}{4}(1-\beta^3\alpha)$	0	$\frac{\pi a^2 b}{4}(1-\beta\alpha^3)$

Таблица 4-23а. Угольники равнобокие
(по ГОСТ 10014-39)

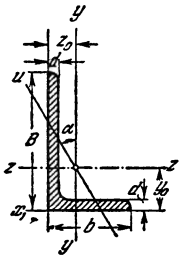


Размеры (мм)		Площадь профиля (см²)	Вес 1 пог. м (кг)	Справочные величины для осей								
				zz		z_0z_0		y_0y_0		z_1z_1	
b	d			J_z (см⁴)	i_z (см)	J_{z_0} макс (см⁴)	i_{z_0} макс (см)	J_{y_0} мин (см⁴)	i_{y_0} мин (см)	J_{x_1} (см⁴)	y_0 (см) ордината
20	3	1,13	0,89	0,40	0,60	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
	4	1,46	1,15	0,49	0,58	0,78	0,73	0,21	0,38	1,09	0,64
30	4	2,27	1,78	1,82	0,90	2,90	1,13	0,75	0,58	3,62	0,89
	5	2,78	2,18	2,20	0,89	3,47	1,12	0,93	0,58	4,58	0,93
40	4	3,08	2,42	4,60	1,22	7,26	1,53	1,93	0,79	8,53	1,13
	5	3,79	2,97	5,54	1,21	8,75	1,52	2,34	0,78	10,70	1,17
	6	4,48	3,52	6,41	1,20	10,10	1,50	2,70	0,78	13,00	1,21
50	5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,61	0,98	20,9	1,42
	6	5,69	4,47	13,1	1,52	20,7	1,91	5,39	0,97	25,2	1,46
60	5	5,82	4,57	19,9	1,85	31,4	2,32	8,29	1,19	35,9	1,66
	6	6,91	5,42	23,3	1,84	36,8	2,31	9,76	1,19	43,3	1,70
	8	9,03	7,09	29,6	1,81	46,8	2,28	12,4	1,17	58,2	1,78
65	6	7,55	5,93	29,8	1,98	47,2	2,50	12,3	1,28	54,8	1,82
	8	9,87	7,75	38,1	1,96	60,3	2,48	15,8	1,27	73,7	1,90
	10	12,1	9,51	45,4	1,94	72,0	2,44	18,8	1,25	92,9	1,98
75	6	8,78	6,89	46,7	2,31	73,3	2,89	20,1	1,51	83,9	2,06
	8	11,5	9,03	60,1	2,28	94,4	2,87	25,3	1,48	113	2,14
	10	14,1	11,1	72,2	2,26	114	2,84	30,3	1,47	142	2,22
	12	16,7	13,1	83,3	2,24	132	2,81	34,9	1,45	172	2,30
80	6	9,38	7,36	57,0	2,47	90	3,11	23,5	1,58	102	2,19
	8	12,3	9,66	73,3	2,44	116	3,07	30,3	1,57	137	2,27
	10	15,1	11,9	88,4	2,42	140	3,05	36,5	1,56	172	2,35

Продолжение табл. 4-23а

Размеры (мм)		Площадь профиля ($см^2$)	Вес 1 пог. м (кг)	Справочные величины для осей								
				zz		z_0z_0		y_0y_0		z_1z_1	
b	d			J_z ($см^4$)	i_z (см)	J_{z_0} макс ($см^4$)	i_{z_0} макс (см)	J_{y_0} мин ($см^4$)	i_{y_0} мин (см)	J_{x_1} ($см^4$)	y_0 (см) ордината
90	8	14,0	11,0	106	2,76	168	3,46	43,6	1,77	194	2,51
	10	17,2	13,5	128	2,74	204	3,44	53,1	1,76	244	2,59
	12	20,4	16,0	149	2,71	237	3,41	61,7	1,75	294	2,67
	14	23,4	18,4	169	2,69	267	3,38	71,9	1,75	345	2,74
100	8	15,6	12,3	146	3,07	233	3,87	61,0	1,98	265	2,75
	10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,85	74,9	1,97	333	2,83
	12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	87,6	1,96	402	2,91
	14	26,3	20,6	237	3,01	375	3,78	99,1	1,95	472	2,99
	16	29,7	23,3	265	2,99	416	3,75	113	1,95	542	3,06
120	10	23,3	18,3	316	3,68	503	4,64	130	2,36	575	3,33
	12	27,6	21,7	371	3,66	590	4,62	153	2,35	693	3,41
	14	31,9	25,1	423	3,64	671	4,59	174	2,34	811	3,49
	16	36,1	28,4	474	3,62	749	4,56	199	2,34	931	3,56
	18	40,3	31,6	520	3,60	822	4,54	219	2,33	1052	3,64
130	10	25,3	19,8	406	4,01	646	5,05	166	2,56	730	3,58
	12	30,7	23,6	477	3,99	759	5,03	196	2,55	880	3,66
	14	34,7	27,3	545	3,96	866	5,00	223	2,54	1030	3,74
	16	39,3	30,9	608	3,93	967	4,96	249	2,52	1182	3,82
150	12	34,9	27,4	745	4,62	1186	5,83	305	2,98	1347	4,15
	14	40,4	31,7	857	4,60	1358	5,80	356	2,97	1577	4,22
	16	45,8	36,0	961	4,58	1522	5,77	399	2,95	1808	4,30
	18	51,1	40,1	1060	4,56	1679	5,73	440	2,94	2041	4,38
	20	56,4	44,3	1154	4,52	1830	5,70	478	2,91	2275	4,46
180	14	48,8	38,3	1515	5,57	2405	7,03	625	3,58	2721	4,97
	16	55,4	43,5	1704	5,55	2705	7,00	703	3,56	3117	5,05
	18	61,9	48,6	1885	5,52	2994	6,94	775	3,54	3515	5,13
200	16	62,0	48,7	2355	6,17	3755	7,79	954	3,93	4264	5,55
	18	69,3	54,4	2619	6,15	4165	7,77	1074	3,93	4808	5,62
	20	76,5	60,1	2868	6,13	4560	7,74	1175	3,92	5355	5,70
	24	90,8	71,3	3349	6,07	5313	7,66	1384	3,90	6456	5,85
	30	111,5	88,3	3999	5,96	6373	7,49	1685	3,87	8093	6,03
220	16	68,4	53,7	3168	6,80	5046	8,59	1307	4,37	5661	6,04
	20	84,5	66,4	3859	6,75	6120	8,51	1592	4,34	7003	6,20
	24	100,4	78,8	4514	6,71	7148	8,44	1870	4,32	8560	6,35
	28	115,9	91,0	5135	6,66	8130	8,37	2141	4,30	10029	6,50
230	24	105,3	82,6	5207	7,03	8266	8,86	2144	4,51	9780	6,59

Таблица 4-23б. Угольники неравнобокие
(по ГОСТ 10015-39)

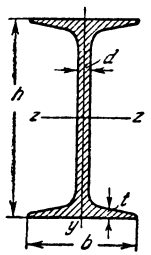


Размеры (мм)			Площадь профиля F ($см^2$)	Вес 1 пог. м (кг)	Справочные величины для осей								
					zz		yy				uu		
B	b	d			J_z ($см^4$)	i_z ($см$)	J_v ($см^4$)	i_y ($см$)	расстояние центра тяжести y_0 ($см$)	расстояние центра тяжести z_0 ($см$)	J_u мин ($см^4$)	$i_{мин}$ ($см$)	угол наклона оси tg α
30	20	3	1,43	1,12	1,27	0,94	0,45	0,56	1,00	0,51	0,26	0,43	0,430
		4	1,86	1,46	1,61	0,93	0,56	0,55	1,04	0,55	0,34	0,43	0,422
35	20	4	2,06	1,62	2,48	1,10	0,53	0,53	1,25	0,51	0,37	0,42	0,320
		5	2,52	1,98	2,98	1,09	0,70	0,53	1,29	0,55	0,45	0,42	0,310
45	30	4	2,88	2,26	5,81	1,42	2,06	0,84	1,48	0,72	1,21	0,65	0,432
		6	4,18	3,28	8,15	1,40	2,85	0,83	1,56	0,82	1,69	0,64	0,423
60	40	5	4,83	3,79	17,4	1,90	6,19	1,13	1,95	0,97	3,62	0,87	0,432
		6	5,72	4,49	20,3	1,88	7,20	1,12	2,0	1,01	4,20	0,86	0,430
		8	7,44	5,84	25,8	1,86	9,04	1,10	2,08	1,09	5,39	0,85	0,420
75	50	5	6,11	4,80	34,9	2,39	12,5	1,43	2,39	1,17	7,24	1,09	0,435
		6	7,25	5,69	41,0	2,37	14,6	1,42	2,44	1,21	8,48	1,08	0,434
		8	9,47	7,43	52,4	2,35	18,6	1,40	2,52	1,29	10,9	1,07	0,428
		10	11,6	9,11	63,0	2,33	22,1	1,38	2,60	1,36	13,2	1,07	0,423

Продолжение табл. 4-23б

Размеры (*мм*)			Площадь профиля F (*см*²)	Вес 1 *пог. м* (*кг*)	Справочные величины для осей								
					zz		*yy*				*uu*		
B	b	d			J_z (*см*⁴)	i_z (*см*)	J_y (*см*⁴)	i_y (*см*)	расстояние центра тяжести y_0 (*см*)	расстояние центра тяжести z_0 (*см*)	J_u мин (*см*⁴)	$i_{мин}$ (*см*)	угол наклона оси tg α
80	55	6	7,85	6,16	50,6	2,53	19,6	1,58	2,56	1,33	11,1	1,19	0,462
		8	10,3	8,06	64,9	2,51	24,9	1,56	2,64	1,41	14,3	1,19	0,458
		10	12,6	9,90	78,2	2,49	29,8	1,54	2,72	1,48	17,4	1,18	0,452
90	60	6	8,78	6,90	72,4	2,87	26,0	1,72	2,88	1,41	14,7	1,30	0,437
		8	11,5	9,08	93,2	2,85	33,2	1,70	2,96	1,49	19,3	1,29	0,433
		10	14,1	11,10	113,0	2,82	39,8	1,68	3,05	1,56	23,5	1,29	0,429
100	75	8	13,5	10,6	135	3,16	65,0	2,19	3,11	1,88	35,4	1,62	0,548
		10	16,7	13,1	163	3,13	78,5	2,17	3,20	1,96	42,6	1,60	0,545
		12	19,7	15,5	190	3,11	91,1	2,15	3,27	2,04	49,8	1,59	0,541
120	80	8	15,6	12,2	229	3,83	82,3	2,30	3,85	1,88	47,6	1,75	0,438
		10	19,2	15,1	279	3,81	99,6	2,27	3,93	1,96	57,7	1,73	0,436
		12	22,8	17,9	326	3,79	116	2,25	4,01	2,04	66,6	1,71	0,432
130	90	8	17,2	13,5	297	4,15	118	2,62	4,08	2,11	66,5	1,97	0,471
		10	21,3	16,7	362	4,12	143	2,59	4,16	2,19	81,4	1,95	0,469
		12	25,2	19,8	424	4,10	167	2,57	4,25	2,27	94,8	1,94	0,467
		14	29,1	22,8	484	4,08	189	2,55	4,33	2,35	109	1,93	0,464
150	100	10	24,3	19,1	557	4,78	201	2,87	4,81	2,35	115	2,18	0,439
		12	28,8	22,6	655	4,76	235	2,85	4,90	2,43	137	2,18	0,437
		14	33,3	26,2	749	4,73	267	2,83	4,98	2,51	156	2,16	0,434
		16	37,7	29,6	839	4,71	297	2,81	5,06	2,59	175	2,15	0,430
180	120	12	34,9	27,4	1156	5,75	417	3,46	5,79	2,82	240	2,62	0,440
		14	40,4	31,7	1326	5,73	476	3,44	5,87	2,90	279	2,62	0,438
		16	45,8	35,9	1490	5,71	532	3,41	5,95	2,98	309	2,60	0,436
200	120	12	37,3	29,2	1546	6,45	428	3,39	6,64	2,68	259	2,64	0,364
		14	43,2	33,9	1776	6,42	489	3,36	6,72	2,76	295	2,61	0,362
		16	49,0	38,4	1997	6,38	547	3,34	6,80	2,84	331	2,60	0,360
200	150	12	41,0	32,2	1666	6,37	810	4,44	6,08	3,62	436	3,26	0,552
		16	53,9	42,3	2155	6,32	1043	4,40	6,27	3,78	562	3,23	0,549
		18	60,3	47,3	2388	6,30	1153	4,38	6,33	3,85	623	3,21	0,548
		20	66,5	52,2	2614	6,27	1258	4,35	6,41	3,93	683	3,21	0,546

Таблица 4-23в. Балки двутавровые
(по ГОСТ 10016-39)

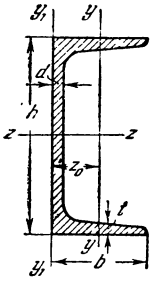


Номер профиля	Вес 1 пог. м (кг)	Размеры (мм)				Площадь сечения F (см²)	Для осей						
							zz				yy		
		h	b	d	t		J_z (см⁴)	W_z (см³)	i_z (см)	$J_z : S_z$	J_y (см⁴)	W_y (см³)	i_y (см)
10	11,2	100	68	4,5	7,6	14,3	245	49	4,14	8,59	33,0	9,72	1,52
12	14,0	120	74	5,0	8,4	17,8	436	72,7	4,95	10,3	46,9	12,7	1,62
14	16,9	140	80	5,5	9,1	21,5	712	102	5,76	12,0	64,4	16,1	1,73
16	20,5	160	88	6,0	9,9	26,1	1130	141	6,58	13,8	93,1	21,2	1,89
18	24,1	180	94	6,5	10,7	30,6	1660	185	7,36	15,4	122	26,0	2,00
20 *a*	27,9	200	100	7,0	11,4	35,5	2370	237	8,15	17,2	158	31,5	2,12
20 *b*	31,1	200	102	9,0	11,4	39,5	2500	250	7,96	16,9	169	33,1	2,06
22 *a*	33,0	220	110	7,5	12,3	42,0	3400	309	8,99	18,9	225	40,9	2,31
22 *b*	36,4	220	112	9,5	12,3	46,4	3570	325	8,78	18,7	239	42,7	2,27
24 *a*	37,4	240	116	8,0	13,0	47,7	4570	381	9,77	20,7	280	48,4	2,42
24 *b*	41,2	240	118	10,0	13,0	52,6	4800	400	9,57	20,4	297	50,4	2,38

Продолжение табл. 4-23а

Номер профиля	Вес 1 пог. м (кг)	Размеры (мм)				Площадь сечения F (см²)	Для осей						
							zz				yy		
		h	b	d	t		J_z (см⁴)	W_z (см³)	i_z (см)	$J_z : S_z$	J_y (см⁴)	W_y (см³)	i_y (см)
27 *a*	42,8	270	122	8,5	13,7	54,6	6550	485	10,9	23,8	345	56,6	2,51
b	47,1	270	124	10,5	13,7	60,0	6870	509	10,7	22,9	366	58,9	2,47
a	48,0	300	126	9,0	14,4	61,2	8950	597	12,1	25,7	400	63,5	2,55
30 *b*	52,7	300	128	11,0	14,4	67,2	9400	627	11,8	25,4	422	65,9	2,50
c	57,4	300	130	13,0	14,4	73,4	9850	657	11,6	25,0	445	68,5	2,46
a	53,4	330	130	9,5	15,0	68,1	11900	721	13,2	28,3	460	70,7	2,60
33 *b*	58,6	330	132	11,5	15,0	74,7	12500	757	12,9	27,9	484	73,4	2,55
c	63,8	330	134	13,5	15,0	81,3	13100	794	12,7	27,5	510	76,1	2,51
a	59,9	360	136	10,0	15,8	76,3	15760	875	14,4	30,7	552	81,2	2,69
36 *b*	65,6	360	138	12,0	15,8	83,5	16530	919	14,1	30,3	582	84,3	2,64
c	71,2	360	140	14,0	15,8	90,7	17310	962	13,8	29,9	612	87,4	2,60
a	67,6	400	142	10,5	16,5	86,1	21720	1090	15,9	34,1	660	93,2	2,77
40 *b*	73,8	400	144	12,5	16,5	94,1	22780	1140	15,6	33,6	692	96,2	2,71
c	80,1	400	146	14,5	16,5	102	23850	1190	15,2	33,2	727	99,6	2,65
a	80,4	450	150	11,5	18	102	32240	1430	17,7	38,6	855	114	2,89
45 *b*	87,4	450	152	13,5	18	111	33760	1500	17,4	38,0	894	118	2,84
c	94,5	450	154	15,5	18	120	35280	1570	17,1	37,6	938	122	2,79
a	93,6	500	158	12	20	119	46470	1860	19,7	42,8	1120	142	3,07
50 *b*	101	500	160	14	20	129	48560	1940	19,4	42,4	1170	146	3,01
c	109	500	162	16	20	139	50640	2030	19,0	41,8	1220	151	2,96
a	105	550	166	12,5	21	134	62870	2290	21,6	46,9	1370	164	3,19
55 *b*	114	550	168	14,5	21	145	65640	2390	21,2	46,4	1420	170	3,14
c	123	550	170	16,5	21	156	68410	2490	20,9	45,8	1480	175	3,08
a	118	600	176	13	22	151	83860	2800	23,5	51,8	1700	193	3,36
60 *b*	128	600	178	15	22	163	87460	2920	23,2	50,7	1770	199	3,30
c	137	600	180	17	22	175	91060	3040	22,8	50,2	1840	205	3,24

Таблица 4-23г. Корытное сечение (швеллер)
(по ГОСТ 10017-39)



Номер профиля	Вес 1 пог. м (кг)	Размеры (мм)				Площадь сечения F ($см^2$)	Для осей							z_0 ($см$)
							zz			y_1y_1	yy			
		h	b	d	t		W_z ($см^3$)	J_z ($см^4$)	i_z ($см$)	J_{y_1} ($см^4$)	W_y ($см^3$)	J_y ($см^4$)	i_y ($см$)	
5	5,44	50	37	4,5	7,0	6,93	10,4	26,0	1,94	20,9	3,55	8,3	1,10	1,35
6,5	6,70	65	40	4,8	7,5	8,54	17,0	55,2	2,54	28,3	4,59	12,0	1,19	1,38
8	8,04	80	43	5,0	8,0	10,24	25,3	101,3	3,15	37,4	5,79	16,6	1,27	1,43
10	10,00	100	48	5,3	8,5	12,74	39,7	198,3	3,95	54,9	7,80	25,6	1,41	1,52
12	12,06	120	53	5,5	9,0	15,36	57,7	346,3	4,75	77,7	10,17	37,4	1,56	1,62

14*a*	14,53	140	58	6,0	9,5	18,51	80,5	563,7	5,52	107,1	13,01	58,2	1,70	1,71
b	16,73	140	60	8,0	9,5	21,31	87,1	609,4	5,35	120,6	14,12	61,1	1,69	1,67
16*a*	17,23	160	63	6,5	10,0	21,95	108,3	866,2	6,28	144,1	16,30	73,3	1,83	1,80
b	19,74	160	65	8,5	10,0	25,15	116,8	934,5	6,10	160,8	17,55	83,4	1,82	1,75
18*a*	20,17	180	68	7,0	10,5	25,69	141,4	1272,7	7,04	189,7	20,03	98,6	1,96	1,88
b	22,99	180	70	9,0	10,5	29,29	152,2	1369,9	6,84	210,1	21,52	101,0	1,95	1,84
20*a*	22,63	200	73	7,0	11,0	28,83	178,0	1780,4	7,86	244,0	24,20	128,0	2,11	2,01
b	25,77	200	75	9,0	11,0	32,83	191,4	1913,7	7,64	268,4	25,88	143,6	2,09	1,95
22*a*	24,99	220	77	7,0	11,5	31,84	217,6	2393,9	8,67	298,2	28,17	157,8	2,22	2,10
b	28,45	220	79	9,0	11,5	36,24	233,8	2571,4	8,42	326,7	30,05	176,4	2,21	2,03
24*a*	26,55	240	78	7,0	12,0	34,21	254,3	3052,2	9,45	324,4	30,47	173,8	2,25	2,10
b	30,62	240	80	9,0	12,0	39,00	273,5	3282,6	9,17	354,8	32,51	194,1	2,23	2,03
c	34,39	240	82	11,0	12,0	43,81	292,7	3513,0	8,96	388,1	34,42	213,4	2,21	2,00
27*a*	30,83	270	82	7,5	12,5	39,27	323,1	4362,0	10,54	393,1	35,50	215,6	2,34	2,13
b	35,07	270	84	9,5	12,5	44,67	347,4	4690,1	10,25	428,2	37,72	239,2	2,31	2,06
c	39,30	270	86	11,5	12,5	50,07	371,7	5018,1	10,10	466,8	39,79	261,4	2,28	2,03
30*a*	34,45	300	85	7,5	13,5	43,89	403,2	6047,9	11,72	466,5	41,10	259,5	2,43	2,17
b	39,16	300	87	9,5	13,5	49,59	433,2	6497,9	11,41	515,2	44,03	289,2	2,41	2,13
c	43,81	300	89	11,5	13,5	55,89	463,2	6947,9	11,15	559,7	46,38	315,8	2,38	2,09
33*a*	38,70	330	88	8,0	14,0	49,50	489,5	8076,8	12,80	547,6	46,65	307,5	2,50	2,21
b	43,88	330	90	10,0	14,0	55,90	525,8	8675,7	12,46	593,2	49,32	338,4	2,46	2,14
c	49,06	330	92	12,0	14,0	62,50	562,1	9274,7	12,18	643,2	51,81	367,9	2,43	2,10
36*a*	47,80	360	96	9,0	16,0	60,89	659,7	11874,2	13,97	818,4	63,54	455,0	2,73	2,44
b	53,45	360	98	11,0	16,0	68,09	702,9	12651,8	13,63	880,4	66,85	496,7	2,70	2,37
c	59,10	360	100	13,0	16,0	75,29	746,1	13429,4	13,36	947,9	70,02	536,4	2,67	2,34
40*a*	58,91	400	100	10,5	18,0	75,05	878,9	17577,9	15,30	1007,7	78,83	592,0	2,81	2,49
b	65,19	400	102	12,5	18,0	83,05	932,2	18644,5	14,98	1135,6	83,52	640,0	2,78	2,44
c	71,47	400	104	14,5	18,0	91,05	985,6	19711,2	14,71	1220,7	86,19	687,8	2,75	2,42

§ 4-26. Общие уравнения для балок с прямой осью. Эпюры

Интенсивность поперечной нагрузки q [$T/м$], поперечная сила Q [T] и изгибающий момент M [$T \cdot м$] связаны соотношениями (рис. 4-46):

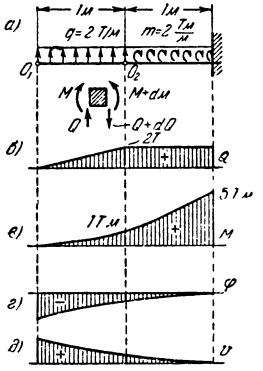


Рис. 4-46.

$$\left.\begin{aligned} q = \frac{dQ}{dx}, \quad Q = \frac{dM}{dx}, \\ Q + m = \frac{dM}{dx}; \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}166)$$

$$\left.\begin{aligned} M = \int_0^x (Q + m)\, dx + C_1, \\ Q = \int_0^x q\, dx + C_2, \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}167)$$

где m — интенсивность распределенной моментной нагрузки; C_1 и C_2 — начальные данные и скачки на участке Ox. Положительные q, m, Q и M — на рис. 4-46. Общие уравнения Q и M:

$$\left.\begin{aligned} Q = Q_0 + q_0 x + q_0' \frac{x^2}{2!} + q_0'' \frac{x^3}{3!} + \ldots, \\ M = M_0 + (Q_0 + m_0)\, x + (q_0 + m_0') \frac{x^2}{2!} + (q_0' + m_0'') \frac{x^3}{3!} + \ldots; \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}168)$$

индексом 0 отмечены начальные параметры функции и ее производных. Для первого участка консоли на рис. 4-46 при начале координат в точке O_1: $M_0 = Q_0 = 0$; $q_0 = 2T/м$:

$$Q_{\text{I}} = 2x; \qquad M_{\text{I}} = 2\frac{x^2}{2} = x^2;$$

для второго участка при начале координат в точке O_2:

$$Q_{\text{II}} = 2; \qquad M_{\text{II}} = 1 + 2x + 2x.$$

Графики этих функций (эпюры Q и M) даны на рис. 4-46, *б* и *в*.

Дифференциальное уравнение упругой кривой (при малых прогибах v):

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ} = \frac{d^2v}{dx^2}; \quad (4\text{-}169)$$

кривизна $1/\rho$, угол поворота касательной φ и прогиб v связаны соотношениями:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx}; \qquad \varphi = \frac{dv}{dx}; \qquad v = \int_0^x \varphi\, dx + D_1; \quad \varphi = \int_0^x \frac{1}{\rho}\, dx + D_2. \quad (4\text{-}170)$$

Общие уравнения φ и v при $EJ = \text{const}$:

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= \varphi_0 + \frac{1}{EJ}\left[M_0 x + (Q_0 + m_0)\frac{x^2}{2!} + (q_0 + m_0')\frac{x^3}{3!} + \right.\\ &\qquad \left. + (q_0' + m_0'')\frac{x^4}{4!} + \ldots\right];\\ v &= v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{x^2}{2!} + (Q_0 + m_0)\frac{x^3}{3!} + \right.\\ &\qquad \left. + (q_0 + m_0')\frac{x^4}{4!} + (q_0' + m_0'')\frac{x^5}{5!} + \ldots\right].\end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}171)$$

При наличии разрывов в нагрузках применяется принцип наложения или делается перенос начала координат (н. к.) к месту разрыва. По рис. 4-46, сохраняя для второго участка начало координат в точке O_1:

$$\varphi_{II} = \varphi_0 + \frac{1}{EJ}\left[2\frac{x^3}{6} - 2\frac{(x-1)^3}{6} + 2\frac{(x-1)^2}{2}\right];$$

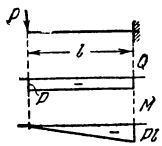
$$v_{II} = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EJ}\left[2\frac{x^4}{24} - 2\frac{(x-1)^4}{24} + 2\frac{(x-1)^3}{6}\right].$$

Используя условие: при $x = 2$ угол $\varphi = 0$ и прогиб $v = 0$, получаем $\varphi_0 = -\frac{10}{3EJ}$; $v_0 = \frac{61}{12EJ}$.

Эпюры φ и v приведены на рис. 4-46, *г* и *д*.

Таблица 4-24. Эпюры Q и M. Максимальные углы φ и прогибы v

1. Консоль с сосредоточенной силой на конце:

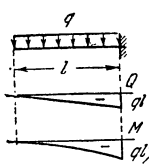


Реакции в опоре: $R = P$; $M_R = Pl$;

$Q(x) = -P$; $M(x) = -Px$; $M_{\text{макс}} = -Pl$;

$$\varphi = \frac{Pl^2}{2EJ}; \quad v = \frac{Pl^3}{3EJ}.$$

2. То же с равномерной нагрузкой:

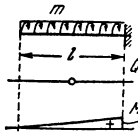


Реакции в опоре: $R = ql$; $M_R = \frac{ql^2}{2}$;

$Q(x) = -qx$; $M(x) = -\frac{qx^2}{2}$; $M_{\text{макс}} = -\frac{ql^2}{2}$;

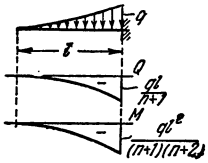
$$\varphi = \frac{ql^3}{6EJ}; \quad v = \frac{ql^4}{8EJ}.$$

3. То же с моментной нагрузкой:



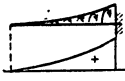
$$R = 0; \qquad M_R = -ml;$$
$$Q = 0; \qquad M = mx;$$
$$\varphi = \frac{ml^2}{2EJ}; \qquad v = \frac{ml^3}{3EJ}.$$

4. То же с параболической нагрузкой $q(x) = -\frac{q}{l^n}x^n$; $n \geqslant 0$:



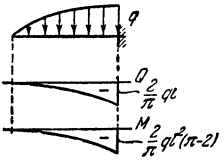
$$R = \frac{ql}{n+1}; \qquad M_R = \frac{ql^2}{(n+1)(n+2)};$$
$$Q(x) = -\frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$
$$M(x) = -\frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$
$$\varphi = \frac{ql^3}{(n+1)(n+2)(n+3)EJ};$$
$$v = \frac{ql^4}{(n+1)(n+2)(n+4)EJ}.$$

5. То же с моментной нарузкой $m(x) = m\frac{x^n}{l^n}$:



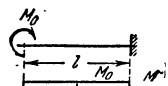
$$R = 0; \quad M_R = -\frac{ml}{n+1}; \quad Q = 0; \quad M(x) = \frac{mx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$
$$\varphi = \frac{ml^2}{(n+1)(n+2)EJ}; \qquad v = \frac{ml^3}{(n+1)(n+3)EJ}.$$

6. То же с синусоидальной нагрузкой $q(x) = -q\sin\frac{\pi x}{2l}$:



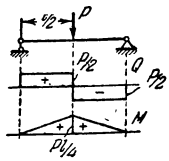
$$R = \frac{2}{\pi}ql; \qquad M_R = \frac{2ql^2}{\pi}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right);$$
$$Q(x) = -\frac{2ql}{\pi}\left(1 - \cos\frac{\pi x}{l}\right);$$
$$M(x) = -\frac{2ql}{\pi}\left(x - \frac{2l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{2l}\right);$$
$$\varphi = \frac{ql^3}{\pi EJ}; \qquad v = \frac{ql^4}{\pi EJ}\left(\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^3}\right).$$

7. То же с сосредоточенным моментом:



$$R = 0; \qquad M_R = -M_0;$$
$$Q = 0; \qquad M(x) = M_0;$$
$$\varphi = \frac{M_0 l}{EJ}; \qquad v = \frac{M_0 l^2}{2EJ}.$$

8. Простая балка с грузом в середине:

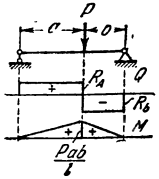


$$R_A = R_B = \frac{P}{2};$$

$$Q_I(x) = \frac{P}{2}; \quad M_I(x) = \frac{P}{2}x; \quad M_{\text{макс}} = \frac{Pl}{4};$$

$$\varphi = \frac{Pl^2}{16EJ}; \quad v = \frac{Pl^3}{48EJ}.$$

9. То же с грузом в произвольной точке:



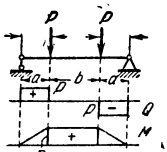
Реакция слева: $R_A = \frac{Pb}{l}$; справа: $R_B = \frac{Pa}{l}$;

$$Q_I = R_A; \quad Q_{II} = -R_B;$$

$$M_I = R_A x; \quad M_{\text{макс}} = \frac{Pab}{l};$$

$$\varphi_A = \frac{Pab(b+l)}{6EJl}; \quad v\Big|_{x=a} = \frac{Pa^2b^2}{3EJl}.$$

10. То же с двумя грузами, симметрично стоящими:



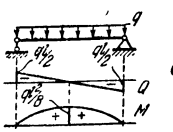
$$R_A = R_B = P;$$

$$Q_I = P; \quad Q_{II} = 0;$$

$$M_I = Px; \quad M_{II} = Pa = M_{\text{макс}};$$

$$\varphi_A = \frac{Pa(a+b)}{2EJ}; \quad v_{\text{макс}} = \frac{Pa}{24EJ}(8a^2 + 12ab + 3b^2).$$

11. То же с равномерной нагрузкой:

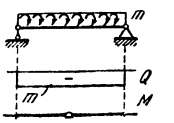


$$R_A = R_B = \frac{ql}{2};$$

$$Q(x) = R_A - qx; \quad M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2}; \quad M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{8};$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{24EJ}; \quad v = \frac{5ql^4}{384EJ}.$$

12. То же с равномерной моментной нагрузкой:

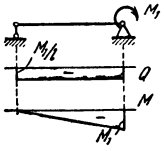


$$R_A = -R_B = -m;$$

$$Q(x) = -m; \quad M(x) = 0;$$

$$\varphi = v = 0 = \text{const}.$$

13. То же с сосредоточенным моментом на конце:

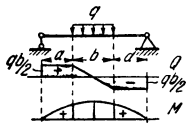


$$R_A = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$

$$Q(x) = -\frac{M_1}{l}; \quad M(x) = -\frac{M_1}{l}x;$$

$$\varphi_A = \frac{M_1 l}{6EJ}; \quad \varphi_B = \frac{M_1 l}{3EJ}; \quad v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{M_1 l^2}{16EJ}.$$

14. То же с симметрично стоящей полоской нагрузки:



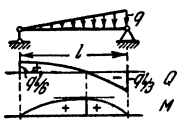
$$R_A = R_B = \frac{qb}{2}; \quad Q_1 = R_A; \quad M_1 = R_A x;$$

$$M_{\text{макс}} = \frac{qb}{8}(4a + b);$$

$$\varphi = \frac{qb^3}{24EJ}\left(1 + 6\frac{a}{b} + 6\frac{a^2}{b^2}\right);$$

$$v = \frac{5qb^4}{384EJ}\left(1 + 8\frac{a}{b} + 19{,}2\frac{a^2}{b^2} + 12{,}8\frac{a^3}{b^3}\right).$$

15. То же с треугольной нагрузкой $q = -\frac{q}{l}x$:

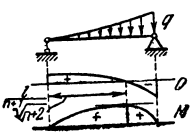


$$R_A = \frac{ql}{6}; \quad R_B = 2R_A;$$

$$Q(x) = \frac{ql}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2}\right); \quad M(x) = \frac{qlx}{6}\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}}; \quad v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{2{,}5ql^4}{384EJ}.$$

16. То же с параболической нагрузкой $q(x) = -q\frac{x^n}{l^n}$:



$$R_A = \frac{ql}{(n+1)(n+2)}; \quad R_B = R_A(n+1);$$

$$Q(x) = R_A - \frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$

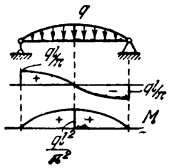
$$M(x) = R_A x - \frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{(n+2)^2}\sqrt[n+1]{n+2};$$

$$\varphi_A = \frac{ql^3(n+6)}{6(n+2)(n+3)(n+4)EJ};$$

$$\varphi_B = \frac{ql^3}{3(n+2)(n+4)EJ}.$$

17. То же с синусоидальной нагрузкой $q(x) = -q \sin \frac{\pi x}{l}$:



$$R_A = R_B = \frac{ql}{\pi};$$

$$Q(x) = \frac{ql}{\pi} \cos \frac{\pi x}{l}; \quad M(x) = \frac{ql^2}{\pi^2} \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{\pi^2}; \quad \varphi = \frac{ql^3}{\pi^3 EJ}; \quad v = \frac{ql^4}{\pi^4 EJ}.$$

18. То же с параболической симметричной нагрузкой $q(x) = -q + q\frac{x^n}{l^n}$:

$$R_A = R_B = ql\frac{n}{n+1}.$$

Вид эпюр Q и M тот же, что и в случае 17. При начале координат в середине:

$$Q(x) = -qx + \frac{qx^{n+1}}{l^n(n+1)};$$

$$M(x) = M_0 - \frac{qx^2}{2} + \frac{qx^{n+2}}{l^n(n+1)(n+2)};$$

$$M_0 = M_{\text{макс}} = \frac{ql^2 n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}.$$

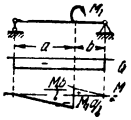
19. То же с треугольной симметричной нагрузкой.
Вид эпюр Q и M тот же, что и в случае 17.

$$R_A = R_B = \frac{ql}{4}; \quad Q_I(x) = \frac{ql}{4}\left(1 - 4\frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$M_I(x) = \frac{qlx}{4}\left(1 - \frac{4}{3}\frac{x^2}{l^2}\right); \quad M_{\text{макс}} = \frac{ql^2}{12};$$

$$\varphi_A = \varphi_B = \frac{5ql^3}{192EJ}; \quad v = \frac{ql^4}{120EJ}.$$

20. То же с сосредоточенным моментом в пролете:



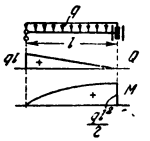
$$R_A = -R_B = -\frac{M_1}{l};$$

$$Q(x) = -\frac{M_1}{l}; \quad M_I(x) = -\frac{M_1}{l}x;$$

$$\varphi_A = \frac{M_1}{6EJl}(a^2 + 2ab - 2b^2);$$

$$v\Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{M_1}{16EJ}(a^2 + 2ab - 3b^2).$$

21. Балка с подвижной опорой и ползуном:



Реакция слева: $R_A = ql$; справа: $M_R = -\frac{ql^2}{2}$;

$$Q(x) = R_A - qx; \qquad M(x) = qlx - \frac{qx^2}{2};$$

$$\varphi = \frac{ql^3}{3EJ}; \qquad v = \frac{5ql^4}{24EJ}.$$

§ 4-27. Балки переменного сечения

Общие уравнения углов φ и прогибов v для балки ступенчато-переменного сечения (рис. 4-47):

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{EJ}\left\{M_0 x + Q_0\frac{x^2}{2!} + q_0\frac{x^3}{3!} + \ldots \right.$$
$$\ldots + \left(\frac{k}{k_1} - 1\right)\left[M_A(x-a) + Q_A\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots\right] +$$
$$\left. + \left(\frac{k}{k_2} - \frac{k}{k_1}\right)\left[M_B(x-b) + Q_B\frac{(x-b)^2}{2!} + \ldots\right] + \ldots\right\}, \quad (4\text{-}172)$$

где $k = EJ$; $k_1 = EJ_1$; $k_2 = EJ_2 \ldots$;

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EJ}\left\{\frac{M_0 x^2}{2!} + \frac{Q_0 x^3}{3!} + \frac{q_0 x^4}{4!} + \ldots \right.$$
$$\ldots + \left(\frac{k}{k_1} - 1\right)\left[\frac{M_A(x-a)^2}{2!} + \frac{Q_A(x-a)^3}{3!} + \frac{q_A(x-a)^4}{4!} + \ldots\right] +$$
$$+ \left(\frac{k}{k_2} - \frac{k}{k_1}\right)\left[\frac{M_B(x-b)^2}{2!} + \frac{Q_B(x-b)^3}{3!} + \ldots\right] +$$
$$\left. + \frac{k}{k_1}\left[\frac{M_1 x_1^2}{2!} + \frac{P_1 x_1^3}{3!} + \frac{q_1 x_1^4}{4!} + \ldots\right] + \ldots\right\}; \quad (4\text{-}173)$$

здесь M_0, Q_0, q_0, ... — начальные параметры; M_A, Q_A, q_A, ... — значения на стыке 1 и 2-го участков; M_B, Q_B, ... — то же

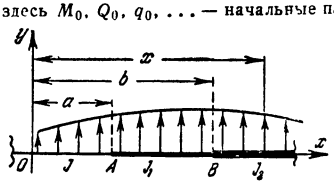


Рис. 4-47.

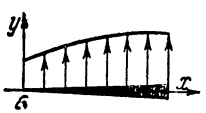


Рис. 4-48.

на стыке 2 и 3-го участков; если на 2-м участке есть дополнительная нагрузка, она учитывается, как указано в последней строке.

Если балка имеет плавно-переменное сечение и двукратное интегрирование уравнения кривизны затруднительно, переходят к приближенному решению задачи; если изменение момента инерции представить формулами (рис. 4-48):

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{J}{J_x} = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2, \qquad \beta_0 = F_0, \\ \beta_1 &= \frac{4F_c - 3F_a - F_b}{b}, \qquad \beta_2 = 2\frac{F_a + F_b - 2F_c}{b^2} \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}174)$$

(где b — длина участка; F_a, F_b и F_c — значения $F(x)$ в начале, конце и середине участка), то общим уравнением прогибов будет *):

$$v = v_0 + \varphi_0 x + \frac{1}{EJ}\Big\{\beta_0\Big[M_0\frac{x^2}{2!} + Q_0\frac{x^3}{3!} + q_0\frac{x^4}{4!} + \ldots\Big] + \beta_1\Big[M_0\frac{x^3}{3!} + 2Q_0\frac{x^4}{4!} + 3q_0\frac{x^5}{5!} + \ldots\Big] + \beta_2\Big[2M_0\frac{x^4}{4!} + 6Q_0\frac{x^5}{5!} + 12q_0\frac{x^6}{6!} + 20q_0'\frac{x^7}{7!} + \ldots\Big] + \ldots\Big\}. \quad (4\text{-}175)$$

При пользовании графоаналитическим методом Мора: а) строится эпюра кривизны балки $\left(\frac{1}{\rho} = \frac{M(x)}{EJ(x)}\right)$, называемая *эпюрой фиктивной нагрузки* $\left(q_\Phi = \frac{1}{\rho}\right)$; б) угол φ подсчитывается как поперечная сила (Q_Φ); в) прогиб v подсчитывается как фиктивный момент (M_Φ). Приведение (из условия выравнивания моментов) распределенной нагрузки q_Φ к сосредоточенной P_Φ выполняется по формуле (рис. 4-49)

$$P_{\Phi,\,n} = c_1 l_n'(c_2 M_{n-1} + M_n) + c_1 l_{n+1}'(M_n + c_2 M_{n+1}), \quad (4\text{-}176)$$

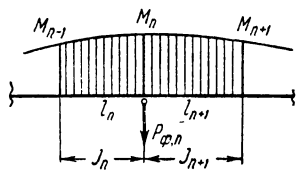


Рис. 4-49.

где $l' = l : EJ$ — приведенная длина; коэффициенты c берутся в зависимости от формы эпюры кривизны:

при ломаной линии	$c_1 = 0{,}333$,	$c_2 = 0{,}5$;
» квадратной параболе	$= 0{,}417$,	$= 0{,}2$;
» синусоиде с 6 участками	$= 0{,}340$,	$= 0{,}506$;
» » » 4 участками	$= 0{,}348$,	$= 0{,}515$.

(4-177)

Для определения Q_Φ и M_Φ фиктивная нагрузка прикладывается к фиктивной балке, опорные закрепления которой совпадают с закреплениями действительной, если последняя имеет концевые шарниры; свободный конец и заделка действительной балки меняются для получения фиктивной соответственно на заделку и свободный конец.

Пусть требуется найти прогиб балки (рис. 4-50) в месте приложения сосредоточенной силы. При начале координат на левой опоре из условия $v = 0$ при $x = 5a$ по уравнению (4-172) находим угол поворота φ_0, учтя, что $k = EJ$; $k_1 = 2EJ$; $k_2 = 4EJ$:

$$\varphi_0 \cdot 5a + \frac{1}{k}\Big\{\frac{2}{5}P\frac{(5a)^3}{6} - \frac{1}{2}\frac{2}{5}P\frac{(4a)^3}{6} - \frac{1}{4}\frac{2}{5}P\frac{(3a)^3}{6} - \frac{1}{4}P\frac{(2a)^3}{6} - \frac{1}{4}\frac{3P}{5}\frac{a^3}{6} - \frac{1}{2}\frac{2}{5}Pa\frac{(4a)^2}{5} - \frac{1}{4}\frac{2}{5}P2a\frac{(3a)^2}{2} + \frac{1}{4}\frac{3}{5}Pa\frac{a^2}{2}\Big\} = 0,$$

*) См. Н. К. Снитко, ВИТ, № 1, 1938.

откуда $\varphi_0 = -\frac{89}{150k} Pa^2$. При $x = 3a$ подобным же образом находим прогиб $v = -\frac{229}{300k} Pa^3$. Если решать задачу графоаналитически, то по формуле (4-176) фиктивные грузы в точках деления балки

$$P_{\text{ф}1} = \frac{Pa^2 8}{30k};$$

$$P_{\text{ф}2} = \frac{Pa^2}{30k} 8{,}5;\ P_{\text{ф}3} = \frac{Pa^2}{30k} 7{,}75$$

и $$P_{\text{ф}4} = \frac{Pa^2}{30k} 6.$$

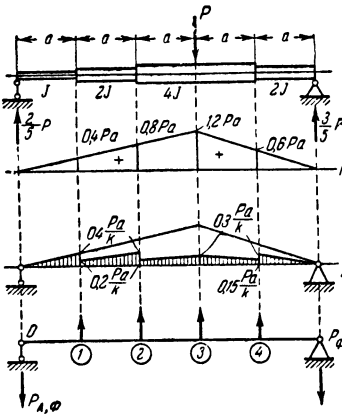


Рис. 4-50.

Фиктивная реакция левой опоры $R_{A\text{ф}} = -\frac{79}{150k} Pa^2$; при добавлении $P_{\text{ф}0} = -\frac{Pa^2}{15k}$ получим прежний ответ; прогиб при $x = 3a$ совпадает с полученным аналитически:

$$v = -R_{A\text{ф}}\, 3a + P_{\text{ф}1}\, 2a + P_{\text{ф}2}\, a.$$

Если при той же нагрузке допустить изменение момента инерции согласно (4-174), полагая, например, что на длине $b = 3a$ (левее силы P) $F_a = J : 0{,}8J = 1{,}25$; $F_c = J : 2J = 0{,}5$ и $F_b = J : 4J = 0{,}25$, то $\beta_0 = 1{,}25$; $\beta_1 = -2 : 3a$; $\beta_2 = 1 : 9a^2$. Тогда по условию $v = 0$ при $x = 5a$ из уравнения (4-175) находим $\varphi_0 = -\frac{15{,}1}{30k} Pa^2$, а давая x значение $3a$, получаем:

$$v = -\frac{15{,}1}{30k} Pa^2 3a + \frac{1}{k}\left[1{,}25 \cdot 0{,}4P\frac{(3a)^3}{6} - \frac{2}{3a} 2 \cdot 0{,}4P\frac{(3a)^4}{24} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{9a^2} 6 \cdot 0{,}4P\frac{(3a)^5}{120}\right] = -\frac{156}{300k} Pa^3,$$

т. е. эта балка жестче ступенчатой на рис. 4-50.

Таблица 4-25. Балки равного сопротивления изгибу

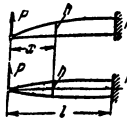
Размеры сечения подбираются по условию $\sigma = M(x) : W(x) = \text{const}$ во всех сечениях; в том месте, где $M(x) = 0$, сечение должно обеспечить восприятие напряжений τ.

1. Консоль постоянной высоты h, переменной ширины $b = b_0 \frac{x}{l}$:

$$M(x) = Px; \qquad W(x) = b_0 \frac{h^2}{6} \cdot \frac{x}{l}; \qquad J = \frac{b_0 h^3}{12};$$

$$\varphi_0 = -\frac{Pl^2}{EJ}; \qquad v_0 = \frac{Pl^3}{2EJ}.$$

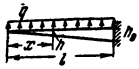
2. То же постоянной ширины b, переменной высоты $h = h_0\sqrt{\frac{x}{l}}$:



$$M(x) = Px; \quad W(x) = \frac{bh_0^2}{6}\frac{x}{l}; \quad J = \frac{bh_0^3}{12};$$

$$\varphi_0 = -\frac{2Pl^2}{EJ}; \quad v_0 = \frac{2}{3}\frac{Pl^3}{EJ}.$$

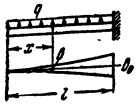
3. То же постоянной ширины b, переменной высоты $h = h_0\frac{x}{l}$:



$$M(x) = \frac{qx^2}{2}; \quad W(x) = \frac{bh_0^2}{6}\frac{x^2}{l^2}; \quad J = \frac{bh_0^3}{12};$$

$$v_0 = \frac{ql^4}{2EJ}.$$

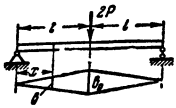
4. То же постоянной высоты h, переменной ширины $b = b_0\frac{x^2}{l^2}$:



$$M(x) = \frac{qx^2}{2}; \quad W(x) = \frac{b_0h^2}{6}\frac{x^2}{l^2}; \quad J = \frac{b_0h^3}{12};$$

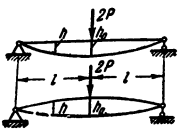
$$\varphi_0 = -\frac{ql^3}{2EJ}; \quad v_0 = \frac{ql^4}{4EJ}.$$

5. Простая балка постоянной высоты h, переменной ширины $b = b_0\frac{x}{l}$.



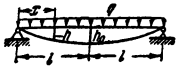
Сохраняются формулы случая 1.

6. То же постоянной ширины b, переменной высоты $h = h_0\sqrt{\frac{x}{l}}$



Сохраняются формулы случая 2.

7. То же постоянной ширины b, переменной высоты $h = \frac{h_0}{l}\sqrt{2lx - x^2}$:

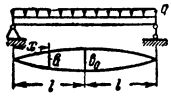


$$M(x) = \frac{q}{2}(2lx - x^2); \quad W(x) = \frac{bh_0^2}{6l^2}(2lx - x^2);$$

$$J = \frac{bh_0^3}{12}; \quad v_l = -\frac{ql^4}{2EJ}.$$

8. То же постоянной высоты h, переменной ширины

$$b = b_0 \frac{2lx - x^2}{l^2};$$



$$M(x) = \frac{q}{2}(2lx - x^2); \qquad W(x) = \frac{b_0 h^2}{6l^2}(2lx - x^2);$$

$$J = \frac{b_0 h^3}{12}; \qquad \varphi_0 = -\frac{ql^3}{2EJ}; \qquad v_l = -\frac{ql^4}{4EJ}.$$

§ 4-28. Статически неопределимые балки

Степень статической неопределимости равна числу лишних опорных связей, т. е. общему их числу без трех. *Метод начальных параметров* удобен при невысокой степени статической неопределимости (обычно не выше трех); при этом используют общие уравнения (§ 4-26) углов φ и прогибов v, удовлетворяя условиям закрепления. Для примера рассмотрим балку по рис. 4-51 при $EJ = \text{const}$, т. е. задачу с однократной степенью статической неопределимости. Принимая за лишнее неизвестное реакцию X_1 правой опоры, имеем начальные параметры (для левой опоры): $v_0 = \varphi_0 = 0$; $M_0 = X_1 \cdot 3a - 6{,}75qa^2$; $Q_0 = -X_1 + 2{,}25qa$; $q_0 = 0$; $q'_0 = -q$:4,5 a.

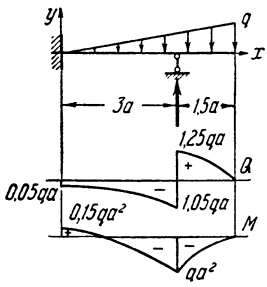


Рис. 4-51.

Используем условие $v = 0$ при $x = 3a$:

$$\frac{1}{EJ}\left[M_0 \frac{9a^2}{2} + Q_0 \frac{27a^3}{6} + q'_0 \frac{243a^5}{120}\right] = 0,$$

откуда $X_1 = 2{,}3qa$; $M_0 = 0{,}15qa^2$; $Q_0 = -0{,}05qa$.

Метод сил применяется для многопролетных балок в форме уравнения трех моментов (рис. 4-52):

$$M_0 l'_1 + 2M_1 (l'_1 + l'_2) + M_2 l'_2 = -\frac{6\Omega_1 a_1}{l_1 EJ_1} - \frac{6\Omega_2 b_2}{l_2 EJ_2}, \quad (4\text{-}178)$$

где l_1 и l_2 — длины двух смежных пролетов: $l'_1 = l_1 : EJ_1$; $l'_2 = l_2 : EJ_2$;

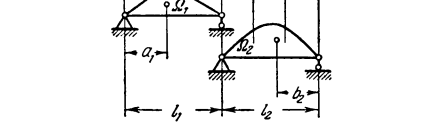


Рис. 4-52.

M_0, M_1 и M_2 — опорные моменты на опорах 0, 1 и 2; Ω_1 и Ω_2 — площади эпюр моментов от местной нагрузки (M^0) этих пролетов как

простых балок; a_1 и b_2 — координаты центров тяжести эпюр. Для балки на рис. 4-53 — дважды статически неопределимой — необходимо составить два уравнения: левее заделки добавляется пролет длиной $l_0 = 0$; первое уравнение охватывает пролеты l_0 и l_1; второе — l_1 и l_2. Допустим $EJ =$ = const и положим его равным 1. Для подсчета Ω построены эпюры M^0 (рис. 4-53, *а*) в простых балках:

$$\Omega_1 = \frac{2}{3} l_1 \cdot 13{,}5 = 54;$$

$$a_1 = b_1 = 3м;$$

$\Omega_2 = 16$; $a_2 = b_2 = 2$ *м*.

1-е уравнение (при $M_1 = 0$):

$$2M_0\,6 + M_1\,6 = -6 \cdot \frac{54}{6} \cdot 3;$$

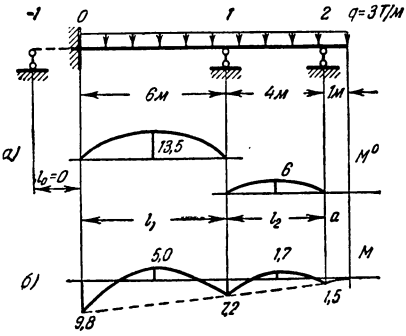


Рис. 4-53.

2-е уравнение (при $M_2 = -1{,}5$):

$$M_0\,6 + 2M_1\,10 + M_2\,4 = -6 \cdot \frac{54}{6} \cdot 3 - 6 \cdot \frac{16}{4} \cdot 2.$$

Решение уравнений дает $M_0 = -9{,}81$ *Т·м*; $M_1 = -7{,}25$ *Т·м*. Эпюра M приведена на рис. 4-53,*б*.

Метод деформаций иногда дает преимущества перед методом сил; каноническое уравнение для пролетов $l_1 - l_2$ имеет вид уравнения трех углов (рис. 4-52):

$$Z_0 i_1 + 2Z_1 (i_1 + i_2) + Z_2 i_2 = -0{,}5\,(M^0_{10} + M^0_{12}), \qquad (4\text{-}179)$$

где погонная жесткость i равна $EJ : l$ для промежуточных пролетов и $0{,}75EJ : l$ для крайнего, если крайняя опора — шарнир; Z_0, Z_1 и Z_2 — углы поворотов на опорах *0*, *1* и *2*; M^0 — начальные опорные моменты от заданной нагрузки в однопролетных балках (выделяемых из многопролетной), защемленных на промежуточных опорах (см. табл. 4-26); момент берут со знаком +, если нагрузка вращает узел *1* по ходу часовой стрелки. После определения Z находят моменты в заданной балке по формуле

$$M_{12} = M^0_{12} + 2i_2\,(2Z_1 + Z_2). \qquad (4\text{-}180)$$

Для балки на рис. 4-53 $Z_0 = 0$; единственным неизвестным является угол Z_1. Погонные жесткости (при $EJ = 1$): $i_1 = \frac{1}{6}$ и $i_2 = \frac{3}{16}$. Из табл. 4-26 $M^0_{10} = -\frac{ql_1^2}{12} = -9$; $M^0_{12} = \frac{ql_2^2}{8} - \frac{qa^2}{4} = 5{,}25$. Уравнением для опоры *1* будет:

$$2Z_1 \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = -0{,}5\,(-9 + 5{,}25),$$

откуда $Z_1 = 2{,}63$.

Определяя по (4-180) моменты, получаем эпюру на рис. 4-53, *б*. *Способ расчета без решения канонических уравнений* состоит в использовании общей формулы опорного момента, которая для произвольной опоры *1* пролета *1—2* имеет вид:

$$M_{12} = M^0_{12} - M_1\mu_{12} - M_2 \cdot 0{,}5\mu_{21}, \qquad (4\text{-}181)$$

где M^0 — начальные моменты, как и в методе деформаций (из табл. 4-26); μ — коэффициенты распределения неуравновешенных моментов:

$$\mu_{12} = i_{12} : \Sigma_1 i; \qquad \mu_{21} = i_{12} : \Sigma_2 i; \qquad (4\text{-}182)$$

M_1 и M_2 — расчетные узловые моменты для опор *1* и *2*, достаточно точные выражения для которых, а также для входящих в них коэффициентов α и μ' имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} M_1 &= (1+\alpha_1)\left(1-\frac{\mu'_{21}}{4}\right)\left[M^0_1 - M^0_0\frac{\mu'_{01}}{2} + M^0_{-1}\frac{\mu'_{-10}\mu'_{01}}{4} - \ldots\right]; \\ M_2 &= (1+\alpha_2)\,(1-\mu'_{12})\left[M^0_2 - M^0_3\frac{\mu'_{32}}{2} + M^0_4\frac{\mu'_{43}\mu'_{32}}{4} - \ldots\right]; \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}183)$$

$$\alpha_{\text{стерж}} = \alpha_{12} = \frac{\mu_{12}\mu_{21}}{4-\mu_{12}\mu_{21}};$$

$$\alpha_{\text{узл}} = \alpha_1 = \alpha_{10} + \alpha_{12} = \sum_1 \alpha_{\text{стерж}}; \quad \alpha_{1-12} = \alpha_{10}; \qquad (4\text{-}184)$$

$$\mu'_{12} = \mu_{12}\,(1+\alpha_{1-12}); \quad \mu'_{21} = \mu_{21}\,(1+\alpha_{2-12}); \qquad (4\text{-}185)$$

при этом M^0 — начальные узловые моменты ($M^0_1 = M^0_{12} + M^0_{10}$); коэффициенты α подсчитываются только для промежуточных пролетов балки,

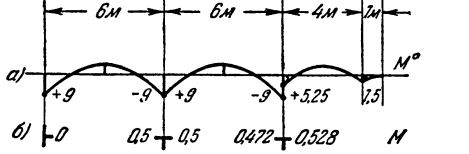


Рис. 4-54.

а μ — для промежуточных узлов. В балке на рис. 4-53 $\alpha = 0$, и расчет по формуле (4-181) элементарен; поскольку имеется лишь один промежуточный узел (*1*), по формуле (4-182) имеем:

$$\mu_{10} = \frac{1}{6} : \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = 0{,}472; \quad \mu_{12} = \frac{3}{16} : \left(\frac{1}{6} + \frac{3}{16}\right) = 0{,}528.$$

Начальный узловой момент $M^0_1 = M^0_{10} + M^0_{12} = -9 + 5{,}25 = -3{,}75$ по (4-183) равен расчетному M_1, и поэтому по (4-181):

$$M_{12} = 5{,}25 - (-3{,}75) \cdot 0{,}528 = 7{,}25\ Т{\cdot}м.$$

В трехпролетной балке (рис. 4-54) вычислим момент M_{23} при $EJ = \text{const}$. На рис. 4-54, *а* дана эпюра начальных моментов M^0, на

рис. 4-54, *б* — величины μ, определенные по (4-182). Пользуясь (4-184) и (4-185), находим:

$$\alpha_{12} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}472}{4 - 0{,}5 \cdot 0{,}472} = 0{,}063; \quad M_2 = 1{,}063\,(1 - 0)\,(-3{,}75) = -4; \quad M_3 = 0.$$

По (4-181) получаем: $M_{23} = M_{23}^0 - M_2 \cdot \mu_{23} = 5{,}25 - (-4) \cdot 0{,}528 = 7{,}36\ T \cdot м$. При подсчете M_{21} надо пересчитать M_2 по первой формуле (4-183):

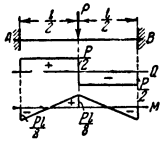
$$M_2 = 1{,}063\left(1 - \frac{0{,}5}{4}\right)(-3{,}75) = -3{,}5\ T \cdot м; \quad M_1 = 0$$

и

$$M_{21} = -9 + 3{,}5 \cdot 0{,}472 = -7{,}36\ T \cdot м.$$

Таблица 4-26. Эпюры *Q* и *M*, прогибы *v* балок

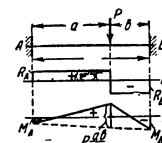
1. Защемленная концами балка с грузом посредине:



$$R_A = R_B = \frac{P}{2}; \quad Q_I = R_A; \quad M_I = R_A x - \frac{Pl}{8};$$

$$v_{\text{макс}} = \frac{Pl^3}{192EJ}.$$

2. То же с грузом в произвольной точке:



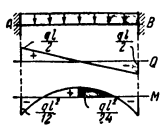
$$R_A = \frac{Pb^2(l + 2a)}{l^3}; \quad R_B = \frac{Pa^2(l + 2b)}{l^3};$$

$$Q_I = R_A; \quad M_I = R_A x - M_A;$$

$$M_A = -\frac{Pab^2}{l^2}; \quad M_B = -\frac{Pa^2 b}{l^2};$$

$$v\Big|_{x=a} = \frac{2Pa^3b^2}{3EJ\,(l + 2a)^2}.$$

3. То же с равномерно распределенной нагрузкой:

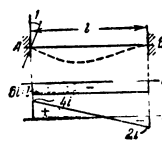


$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}; \quad Q(x) = \frac{ql}{2} - qx;$$

$$M(x) = -\frac{ql^2}{12} + \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2};$$

$$M_A = M_B = -\frac{ql^2}{12}; \quad M_{l/2} = \frac{ql^2}{24}; \quad v = \frac{ql^4}{384EJ}.$$

4. То же при повороте левого защемления на $\varphi = 1$:

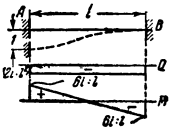


$$R_A = -R_B = -\frac{6i}{l}; \quad i = EJ : l;$$

$$Q(x) = -6i : l; \quad M(x) = M_A - 6\frac{i}{l}x;$$

$$M_A = 4i; \quad M_B = -2i.$$

5. То же при смещении левого защемления на $v = 1$:

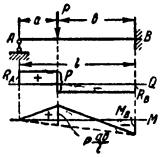


$$R_A = -R_B = -\frac{12i}{l^2};$$

$$Q(x) = -\frac{12i}{l^2};\quad M(x) = M_A - \frac{12i}{l^2}x;$$

$$M_A = 6i : l;\quad M_B = -6i : l.$$

6. Балка защемлена одним концом и свободно лежит на другом; на грузка силой P:

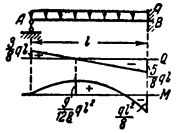


$$R_A = \frac{Pb^2(2l+a)}{2l^3};\quad Q_1 = R_A;$$

$$M_1 = R_A x;\quad M_{\text{макс}} = \frac{Pab^2(2l+a)}{2l^3};$$

$$M_B = -\frac{Pab(l+a)}{2l^2}.$$

7. То же с равномерно распределенной нагрузкой:



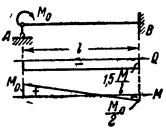
$$R_A = \frac{3}{8}ql;\quad R_B = \frac{5}{8}ql;$$

$$Q(x) = R_A - qx;\quad M(x) = R_A x - \frac{qx^2}{2};$$

$$M_{\text{макс}} = \frac{9}{128}ql^2;\quad M_B = -\frac{ql^2}{8};$$

$$v_{\text{макс}} = \frac{0{,}0054ql^4}{EJ}.$$

8. То же с сосредоточенным моментом на левом конце:

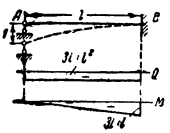


$$R_A = -R_B = -1{,}5\frac{M_0}{l};$$

$$Q(x) = -1{,}5\frac{M_0}{l};\quad M(x) = M_0 - \frac{1{,}5M_0}{l}x;$$

$$M_A = M_0;\quad M_B = -\frac{M_0}{2}.$$

9. То же при смещении одного конца на $v = 1$:

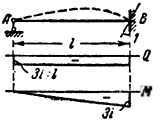


$$R_A = -R_B = -\frac{3i}{l^2};\quad i = EJ : l;$$

$$Q(x) = -\frac{3i}{l^2};\quad M(x) = -\frac{3i}{l^2}x;$$

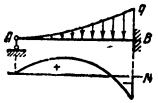
$$M_B = -3\frac{i}{l}.$$

10. То же при повороте защемления на $\varphi = 1$:



$$R_A = -R_B = -\frac{3i}{l}; \quad Q(x) = -\frac{3i}{l};$$
$$M(x) = -\frac{3i}{l}x; \quad M_B = -3i.$$

11. То же, нагруженная параболической нагрузкой $q(x) = -\frac{q}{l^n}x^n$; $n \geq 0$:

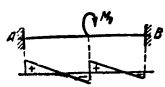


$$R_A = \frac{3ql}{(n+1)(n+2)(n+4)}; \quad R_B = R_A\frac{2n+5}{3};$$
$$M_B = -\frac{ql^2}{(n+2)(n+4)}.$$

12. Защемленная двумя концами балка, нагруженная параболической нагрузкой, как в схеме 11:

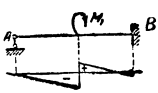
$$M_B = -\frac{ql^2}{(n+3)(n+4)};$$
$$M_A = -\frac{2ql^2}{(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

13. То же, загруженная в пролете сосредоточенным моментом с расстоянием a до левой опоры, b — до правой, пролет l:



$$M_A = -\frac{M_1 b}{l^2}(2a - b);$$
$$M_B = -\frac{M_1 a}{l^2}(2b - a).$$

14. Балка при нагрузке по схеме 13, защемленная одним концом, свободно лежащая на другом:



$$M_B = -\frac{M_1}{2l^2}(b^2 + 2ab - 2a^2).$$

Таблица 4-27. **Коэффициенты для вычисления Q и M в равнопролетных неразрезных балках при действии постоянной $g(k_g)$ и временной $p(k_p)$ равномерных нагрузок**

x/l	Поперечные силы			Моменты		
	влияние g	влияние p		влияние g	влияние p	
	Q	$Q_{макс}$	$Q_{мин}$	M	$M_{макс}$	$M_{мин}$
			Два пролета			
0	+ 0,375	0,438	— 0,063	0	0	0
0,4	— 0,025	0,136	— 0,161	+ 0,070	0,095	— 0,025
0,8	— 0,425	0,012	— 0,437	— 0,02	0,03	— 0,05
1,0	— 0,625	0	— 0,625	— 0,125	0	— 0,125
			Три пролета			
0	0,4	0,45	— 0,05	0	0	0
0,4	0	0,15	— 0,15	0,08	0,10	— 0,02
0,8	— 0,4	0,028	— 0,428	0	0,04	— 0,04
1,0 л.	— 0,6	0,017	— 0,617	— 0,1	0,017	— 0,117
1,0 пр.	+ 0,5	0,583	— 0,083	— 0,1	0,017	— 0,117
1,5	0	0,198	— 0,198	+ 0,025	0,075	— 0,05
			Четыре пролета			
0	0,393	0,446	— 0,054	0	0	0
0,4	— 0,007	0,146	— 0,153	0,077	0,099	— 0,021
0,8	— 0,407	0,025	— 0,432	— 0,006	0,037	— 0,043
1,0 л.	— 0,607	0,013	— 0,621	— 0,107	0,013	— 0,121
1,0 пр.	0,536	0,603	— 0,067	— 0,107	0,013	— 0,121
1,3	0,236	0,341	— 0,115	+ 0,009	0,057	— 0,048
1,8	— 0,264	0,122	— 0,387	0,001	0,042	— 0,040
2,0	— 0,464	0,107	— 0,571	— 0,071	0,036	— 0,107

$$Q = k_g \cdot gl + k_p \cdot pl; \quad M = k_g \cdot gl^2 + k_p \cdot pl^2.$$

§ 4-29. Балки на упругом основании

Дифференциальное уравнение, построенное на гипотезе линейной связи прогиба балки v и реакции q основания: $q = -kv$, где k ($кГ/см^2$) — коэффициент постели, имеет вид

$$\frac{d^4v}{dx^4} = -4\beta^4 v + p. \qquad (4\text{-}186)$$

Решение его при внешней нагрузке $p = 0$:

$$v = e^{\beta x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x) + e^{-\beta x}(A_1\cos\beta x + B_1\sin\beta x), \qquad (4\text{-}187)$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4D}}; \quad D = EJ.$$

Постоянные A, B, A_1 и B_1 выражаются через начальные: прогиб v_0,

угол φ_0, момент M_0 и поперечную силу Q_0:

$$A = \frac{v_0}{2} + \frac{\varphi_0}{4\beta} - \frac{Q_0}{8D\beta^3}, \quad B = \frac{\varphi_0}{4\beta} + \frac{M_0}{4D\beta^2} + \frac{Q_0}{8D\beta^3}; \tag{4-188}$$

$$A_1 = \frac{v_0}{2} - \frac{\varphi_0}{4\beta} + \frac{Q_0}{8D\beta^3}, \quad B_1 = \frac{\varphi_0}{4\beta} - \frac{M_0}{4D\beta^2} + \frac{Q_0}{8D\beta^3}. \tag{4-189}$$

Для длинных балок ($\beta x > 5$) полагают, что $A = B = 0$, и задача расчета решается просто. Например (рис. 4-55), для полубесконечной балки, у которой на конце приложены M_0 и Q_0, из (4-188) находим:

$$v_0 = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3};$$

$$\varphi_0 = -\frac{M_0}{D\beta} - \frac{Q_0}{2D\beta^2}.$$

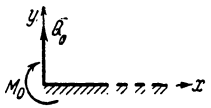


Рис. 4-55.

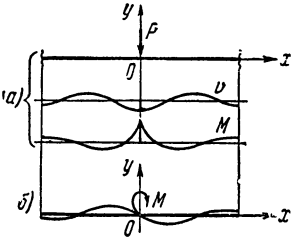


Рис. 4-56.

Тогда из (4-189) получаем $B_1 = -\frac{M_0}{2D\beta^2}$; $A_1 = \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3}$. Эпюры строятся с помощью (4-187), в котором оставляют лишь второй член. В табл. 4-28 приведены значения входящих в формулу (4-187) и в производные от нее функций влияния:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_1 = e^{-\beta x}\cos\beta x = -0{,}5\frac{d\eta_2}{\beta dx}; \quad \eta_2 = e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x) = \\ &= \frac{d\eta_3}{\beta dx}; \quad \eta_3 = e^{-\beta x}\sin\beta x = -0{,}5\frac{d\eta_4}{\beta dx}; \\ &\eta_4 = e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x) = -\frac{d\eta_1}{\beta dx}. \end{aligned}\right\} \tag{4-190}$$

Таким образом, для рис. 4-55 уравнениями v и M будут:

$$v = \frac{M_0}{2D\beta^2}\eta_2 + \frac{Q_0}{2D\beta^3}\eta_1; \quad M = M_0\eta_4 + \frac{Q_0}{\beta}\eta_3.$$

Для бесконечной балки, несущей сосредоточенную силу P (рис. 4-56, *а*) при $A = B = 0$, и так как $\varphi_0 = 0$, $Q_0 = -\frac{P}{2}$, получаем $v_0 = -\frac{P}{8D\beta^3}$ и $M_0 = \frac{P}{4\beta}$. Тогда $A_1 = B_1 = -\frac{P}{8D\beta^3}$ и $v = v_0\eta_4$; $M = M_0\eta_2$.

Для нее же при действии сосредоточенного момента M (рис. 4-56, *б*)

$$v_0 = 0; \quad M_0 = \frac{M}{2}; \quad \varphi_0 = -\frac{M}{4D\beta}.$$

Таблица 4-28. Значения функций η_1, η_2, η_3 и η_4

$$\eta_4 = e^{-\beta x}(\cos\beta x + \sin\beta x);\quad \eta_3 = e^{-\beta x}\sin\beta x;$$
$$\eta_2 = e^{-\beta x}(\cos\beta x - \sin\beta x);\quad \eta_1 = e^{-\beta x}\cos\beta x$$

βx	η_4	η_3	η_2	η_1	βx
0,0	*1,0000*	*0,0000*	*1,0000*	*+ 1,0000*	0,0
0,1	0,9907	+ 0,0903	0,8100	+ 0,9003	0,1
0,2	0,9651	+ 0,1627	0,6398	+ 0,8024	0,2
0,3	0,9267	+ 0,2189	0,4888	+ 0,7077	0,3
0,4	0,8784	+ 0,2610	0,3564	+ 0,6174	0,4
0,5	0,8231	+ 0,2908	0,2415	+ 0,5323	0,5
0,6	0,7628	+ 0,3099	0,1431	+ 0,4530	0,6
0,7	0,6997	+ 0,3199	0,0599	+ 0,3708	0,7
$^1/_4\pi$	*0,6448*	*+ 0,3224*	*0,0000*	*+ 0,3224*	*0,785*
0,8	0,6354	+ 0,3223	— 0,0093	+ 0,3131	0,8
0,9	0,5712	+ 0,3185	— 0,0657	+ 0,2527	0,9
1,0	0,5083	+ 0,3096	— 0,1108	+ 0,1988	1,0
1,1	0,4476	+ 0,2967	— 0,1457	+ 0,1510	1,1
1,2	0,3899	+ 0,2807	— 0,1716	+ 0,1091	1,2
1,3	0,3355	+ 0,2626	— 0,1897	+ 0,0729	1,3
1,4	0,2849	+ 0,2430	— 0,2011	+ 0,0419	1,4
1,5	0,2384	+ 0,2226	— 0,2068	+ 0,0158	1,5
$^1/_2\pi$	*0,2079*	*+ 0,2079*	*— 0,2079*	*0,0000*	*1,571*
1,6	0,1959	+ 0,2018	— 0,2077	— 0,0059	1,6
1,7	0,1576	+ 0,1812	— 0,2047	— 0,0235	1,7
1,8	0,1234	+ 0,1610	— 0,1985	— 0,0376	1,8
1,9	0,0932	+ 0,1415	— 0,1899	— 0,0484	1,9
2,0	0,0667	+ 0,1231	— 0,1794	— 0,0563	2,0
2,1	0,0439	+ 0,1057	— 0,1675	— 0,0618	2,1
2,2	0,0244	+ 0,0896	— 0,1548	— 0,0652	2,2
2,3	0,0080	+ 0,0748	— 0,1416	— 0,0668	2,3
$^3/_4\pi$	*0,0000*	*+ 0,0670*	*— 0,1340*	*— 0,0670*	*2,356*
2,4	— 0,0056	+ 0,0613	— 0,1282	— 0,0669	2,4
2,5	— 0,0166	+ 0,0491	— 0,1149	— 0,0658	2,5
2,6	— 0,0254	+ 0,0383	— 0,1019	— 0,0636	2,6
2,7	— 0,0320	+ 0,0287	— 0,0895	— 0,0608	2,7
2,8	— 0,0369	+ 0,0204	— 0,0777	— 0,0573	2,8
2,9	— 0,0403	+ 0,0132	— 0,0666	— 0,0534	2,9
3,0	— 0,04226	+ 0,00703	— 0,05632	— 0,04929	3,0
3,1	— 0,04314	+ 0,00187	— 0,04688	— 0,04501	3,1
π	*— 0,04321*	*+ 0,00000*	*— 0,04321*	*— 0,04321*	*3,142*
3,2	— 0,04307	— 0,00238	— 0,03831	— 0,04069	3,2
3,3	— 0,04224	— 0,00582	— 0,03060	— 0,03642	3,3
3,4	— 0,04079	— 0,00853	— 0,02374	— 0,03227	3,4
3,5	— 0,03887	— 0,01059	— 0,01769	— 0,02828	3,5
3,6	— 0,03659	— 0,01209	— 0,01241	— 0,02450	3,6
3,7	— 0,03407	— 0,01310	— 0,00787	— 0,02097	3,7

Продолжение табл. 4-28

βx	η_4	η_3	η_2	η_1	βx
3,8	— 0,03138	— 0,01369	— 0,00401	— 0,01770	3,8
3,9	— 0,02862	— 0,01392	— 0,00077	— 0,01469	3,9
$5/4\pi$	*— 0,02786*	*— 0,01393*	*0,00000*	*— 0,01393*	*3,927*
4,0	— 0,02583	— 0,01386	0,00189	— 0,01197	4,0
4,1	— 0,02309	— 0,01356	0,00403	— 0,00953	4,1
4,2	— 0,02042	— 0,01307	0,00572	— 0,00735	4,2
4,3	— 0,01787	— 0,01243	0,00699	— 0,00544	4,3
4,4	— 0,01546	— 0,01168	0,00791	— 0,00377	4,4
4,5	— 0,01320	— 0,01086	0,00852	— 0,00234	4,5
4,6	— 0,01112	— 0,00999	0,00786	— 0,00113	4,6
4,7	— 0,00921	— 0,00909	0,00898	— 0,00011	4,7
$6/4\pi$	*— 0,00898*	*— 0,00898*	*0,00898*	*0,00000*	*4,712*
4,8	— 0,00748	— 0,00820	0,00892	+ 0,00072	4,8
4,9	— 0,00593	— 0,00732	0,00870	+ 0,00139	4,9
5,0	— 0,00455	— 0,00646	0,00837	+ 0,00191	5,0
5,1	— 0,00334	— 0,00564	0,00795	+ 0,00230	5,1
5,2	— 0,00229	— 0,00487	0,00746	+ 0,00259	5,2
5,3	— 0,00139	— 0,00415	0,00692	+ 0,00277	5,3
5,4	— 0,00063	— 0,00349	0,00636	+ 0,00287	5,4
$7/4\pi$	*0,00000*	*— 0,00290*	*0,00579*	*+ 0,00290*	*5,498*
5,5	+ 0,00001	— 0,00288	0,00578	+ 0,00290	5,5
5,6	0,00053	— 0,00233	0,00520	+ 0,00287	5,6
5,7	0,00095	— 0,00184	0,00464	+ 0,00279	5,7
5,8	0,00127	— 0,00141	0,00409	+ 0,00268	5,8
5,9	0,00152	— 0,00102	0,00356	+ 0,00254	5,9
6,0	0,00169	— 0,00069	0,00307	+ 0,00238	6,0
6,1	0,00180	— 0,00049	0,00261	+ 0,00221	6,1
6,2	0,00185	— 0,00017	0,00219	+ 0,00202	6,2
2π	*0,00187*	*— 0,00000*	*0,00187*	*+ 0,00187*	*6,283*
6,3	0,00187	+ 0,00003	0,00181	+ 0,00184	6,3
6,4	0,00184	+ 0,00019	0,00146	+ 0,00165	6,4
6,5	0,00179	+ 0,00032	0,00115	+ 0,00147	6,5
6,6	0,00172	+ 0,00042	0,00087	+ 0,00129	6,6
6,7	0,00162	+ 0,00050	0,00063	+ 0,00113	6,7
6,8	0,00152	+ 0,00055	0,00042	+ 0,00097	6,8
6,9	0,00141	+ 0,00058	0,00024	+ 0,00082	6,9
7,0	0,00129	+ 0,00060	0,00009	+ 0,00069	7,0
$8/4\pi$	*0,00120*	*+ 0,00060*	*0,00000*	*+ 0,00060*	*7,069*

Общее уравнение прогибов для длинных балок имеет вид:

$$v = v_0 \frac{\eta_1}{2} - \varphi_0 \frac{\eta_2}{4\beta} - \frac{M_0}{D} \frac{\eta_3}{4\beta^2} + \frac{Q_0}{D} \frac{\eta_4}{8\beta^3}. \qquad (4\text{-}191)$$

В общем случае и для балок при $\beta x < 5$ подстановкой (4-188) и (4-189) в (4-187) получают общее *уравнение прогибов*:

$$v = v_0 A_x + \varphi_0 \frac{B_x}{\beta} + \frac{M_0}{D} \frac{C_x}{\beta^2} + \frac{Q_0}{D} \frac{D_x}{\beta^3}. \qquad (4\text{-}192)$$

Таблица 4-29. Гиперболо-круговые функции

$$A_x = \operatorname{ch}\beta\cos\beta x;\quad B_x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}\beta x\sin\beta x + \operatorname{sh}\beta x\cos\beta x);$$

$$C_x = \frac{1}{2}\operatorname{sh}\beta x\sin\beta x;\quad D_x = \frac{1}{4}(\operatorname{ch}\beta x\sin\beta x - \operatorname{sh}\beta x\cos\beta x)$$

βx	A_x	B_x	C_x	D_x
0,00	1,0000	0,0000	0,0000	0,00000
0,02	1,0000	0,0200	0,0002	0,00000
0,04	1,0000	0,0400	0,0008	0,00001
0,05	1,0000	0,0500	0,0012	0,00003
0,06	1,0000	0,0600	0,0018	0,00005
0,08	1,0000	0,0800	0,0032	0,0001
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,00017
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,00135
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3996	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4989	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1797	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2443	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3185	0,0851
0,90	0,8931	0,8803	0,4020	0,1211
1,0	0,8337	0,9667	0,4945	0,1659
1,1	0,7568	1,0464	0,5951	0,2203
1,2	0,6561	1,1173	0,7034	0,2851
1,3	0,5272	1,1767	0,8182	0,3612
1,4	0,3656	1,2216	0,9383	0,4490
1,5	0,1664	1,2485	1,0619	0,5490
$\frac{1}{2}\pi$	0,0000	1,2546	1,1506	0,6273
1,6	−0,0753	1,2535	1,1872	0,6614
1,7	−0,3644	1,2319	1,3118	0,7864
1,8	−0,7060	1,1788	1,4326	0,9237
1,9	−1,1049	1,0888	1,5463	1,0727
2,0	−1,5656	0,9557	1,6489	1,2325
2,1	−2,0923	0,7735	1,7358	1,4019
2,2	−2,6882	0,5351	1,8018	1,5790
2,3	−3,3562	0,2334	1,8407	1,7614
2,4	−4,0976	−0,1386	1,8461	1,9460
2,5	−4,9128	−0,5885	1,8104	2,1292
2,6	−5,8003	−1,1236	1,7255	2,3065
2,7	−6,7565	−1,7509	1,5826	2,4724
2,8	−7,7759	−2,4770	1,3721	2,6208
2,9	−8,8471	−3,3079	1,0837	2,7443
3,0	−9,9669	−4,2484	0,7068	2,8346
3,1	−11,1119	−5,3022	0,2303	2,8823
π	−11,5919	−5,7743	0,0000	2,8872
3,2	−12,2656	−6,4710	−0,3574	2,8769
3,3	−13,4048	−7,7549	−1,0678	2,8067
3,4	−14,5008	− 9,1506	−1,9121	2,6589
3,5	−15,5198	−10,6524	−2,9014	2,4195
3,6	−16,4218	−12,2507	−4,0458	2,0735

Продолжение табл. 4-29

βx	A_x	B_x	C_x	D_x
3,7	−17,1622	−13,9315	−5,3543	1,6048
3,8	−17,6875	−15,6760	−6,8343	0,9969
3,9	−17,9387	−17,4598	−8,4909	0,2321
4,0	−17,8498	−19,2523	−10,3265	−0,7073
4,1	−17,3472	−21,0160	−12,3404	−1,8392
4,2	−16,3505	−22,7054	−14,5273	−3,1812
4,3	−14,7722	−24,2668	−16,8773	−4,7501
4,4	−12,5180	−25,6372	−19,3742	−6,5615
4,5	−9,4890	−26,7446	−21,9959	−8,6290
4,6	−5,5791	−27,5056	−24,7116	−10,9638
4,7	−0,6812	−27,8274	−27,4823	−13,5731
$\frac{3}{2}\pi$	0,0000	−27,8317	−27,8272	−13,9158
4,8	5,3164	−27,6051	−30,2589	−16,4604
4,9	12,5239	−26,7238	−32,9814	−19,6232
5,0	21,0504	−25,0564	−35,5774	−23,0525
5,1	30,9997	−22,4660	−37,9618	−26,7317
5,2	42,4661	−18,8057	−40,0350	−30,6346
5,3	55,5317	−13,9201	−41,6825	−34,7245
5,4	70,2637	−7,6440	−42,7726	−38,9524
5,5	86,7044	0,1900	−43,1592	−43,2557
5,6	104,8687	9,7543	−42,6774	−47,5558
5,7	124,7352	21,2199	−41,1453	−51,7562
5,8	146,2448	34,7564	−38,3639	−55,7428
5,9	169,2837	50,5203	−34,1198	−59,3804
6,0	193,6813	68,6577	−28,2116	−62,5106
6,1	219,2004	89,2946	−20,3042	−64,9518
6,2	245,5231	112,5249	−10,2356	−66,4981
2π	267,7468	133,8724	0,0000	−66,9362
6,3	272,2487	138,4120	2,2885	−66,9174

Здесь функции влияния:

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \operatorname{ch}\beta x \cdot \cos\beta x = \frac{1}{\beta}\frac{dB_x}{dx};\\ B_x &= 0{,}5\,(\operatorname{ch}\beta x \cdot \sin\beta x + \cos\beta x \cdot \operatorname{sh}\beta x) = \frac{1}{\beta}\frac{dC_x}{dx};\\ C_x &= 0{,}5\operatorname{sh}\beta x \cdot \sin\beta x = \frac{1}{\beta}\frac{dD_x}{dx};\\ D_x &= 0{,}25\,(\operatorname{ch}\beta x \cdot \sin\beta x - \cos\beta x \cdot \operatorname{sh}\beta x) = -\frac{1}{4\beta}\frac{dA_x}{dx}; \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}193)$$

численные значения их приведены в табл. 4-29.

Дифференцируя (4-191), последовательно получают уравнения для φ, M и Q.

§ 4-30. Простые плоские рамы

Степень статической неопределимости определяется числом лишних опорных связей и утроенным числом замкнутых контуров; при наличии шарниров степень понижается на число одиночных шарниров. Рама на рис. 4-57, имеющая две лишние опорные связи, один замкнутый контур и один шарнир, четырежды статически неопределима.

В методе сил k-е каноническое уравнение для лишних сил $X_1, X_2, \ldots, X_n$ в случае n раз статически неопределимой системы имеет вид:

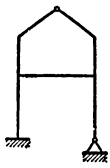


Рис. 4-57.

$$X_1\delta_{k_1}+X_2\delta_{k_2}+X_3\delta_{k_3}+\ldots+X_k\delta_{k_k}+\ldots$$
$$\ldots+X_n\delta_{k_n}+\Delta_{k_p}=0 \quad (k=1, 2, \ldots, n). \qquad (4\text{-}194)$$

Коэффициенты δ и Δ (перемещения) берут для основной системы из таблиц, вычисляют по данным §§ 4-26—4-29 или по формуле Мора:

$$\Delta_{km}=\sum\int\frac{M_k M_m ds}{EJ}; \qquad (4\text{-}195)$$

влиянием N и Q на перемещения обычно пренебрегают. Интеграл Мора для прямых стержней постоянной жесткости определяют по Верещагину:

$$\frac{1}{EJ}\int M_k M_m ds=\frac{1}{EJ}\Omega\cdot y_0, \qquad (4\text{-}196)$$

где Ω — площадь одной из эпюр моментов (любого очертания), y_0 — ордината другой (только прямолинейной), лежащая под центром тяжести первой. На рис. 4-58 представлены три эпюры, сочетая которые по Верещагину, получаем:

$$1\times 11 \ldots \frac{l}{6EJ}(2aa_1+2bb_1+ab_1+a_1b);$$

$$1\times 111 \ldots \frac{l\cdot c}{12EJ}(3b_1+a_1).$$

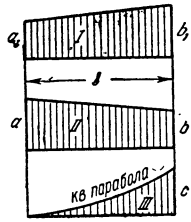


Рис. 4-58.

Эти формулы пригодны и для треугольных, и прямоугольных эпюр, так как трапецеидальные эпюры обращаются в треугольные, если положить некоторые ординаты равными нулю. При равенстве ординат a и b они прямоугольны. Рассмотрим раму на рис. 4-59—один раз статически неопределимую. Эпюры M от $X_1=1$ и от внешней нагрузки $q=2\,т/м$ даны на рис. 4-59. Каноническое уравнение:

$$X_1\delta_{11}+\Delta_{1p}=0.$$

Перемещение на криволинейном участке следует определить интегрированием; для сечения под $\angle\alpha$ имеем $M_1=-1\cdot\sin\alpha-1\cdot(1-\cos\alpha)$; $M_p=-1\cdot\sin\alpha$.

По Мору

$$\delta_{11}^{\text{I уч}}=\int_0^{\pi}M_1^2\frac{ds}{EJ}=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi}(\cos\alpha-1-\sin\alpha)^2\cdot 1\cdot d\alpha=\frac{4+2\pi}{EJ};$$

$$\Delta_{1p}^{\text{I уч}}=\frac{1}{EJ}\int_0^{\pi}M_1 M_p\,ds=\frac{4+\frac{\pi}{2}}{EJ}.$$

На прямолинейном участке вычисляем по Верещагину:

$$\delta_{11}^{\text{II уч}} = \frac{\Omega \cdot y_0}{E \cdot \frac{1}{3} J} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{EJ} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{EJ};$$

$$\Delta_{1p}^{\text{II уч}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 1}{EJ} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{EJ}$$

(знак минус ввиду разных знаков эпюр M_1 и M_p). Принимая $EJ=1$, имеем $\delta_{11} = 12 + 2\pi$; $\Delta_{1p} = \frac{\pi}{2}$. Тогда $X_1 = -\frac{\Delta_{1p}}{\delta_{11}} = -0{,}085T$. Окончательные

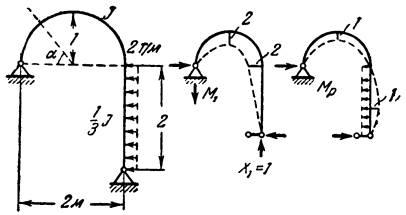


Рис. 4-59.

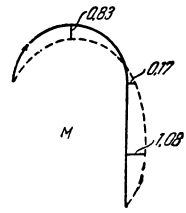


Рис. 4-59а.

эпюры строятся сложением эпюр от лишней неизвестной X_1 и от P. Например, $M = M_p + M_1 \cdot X_1$ (рис. 4-59а).

В методе деформаций k-е каноническое уравнение при n неизвестных (см. § 4-28) имеет вид:

$$Z_1 r_{k1} + Z_2 r_{k2} + \ldots + Z_k r_{kk} + \ldots + Z_n r_{kn} + R_{kp} = 0$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n). \qquad (4\text{-}197)$$

Коэффициенты r и R (реакции в основной системе) берут из таблиц §§ 4-26—4-28.

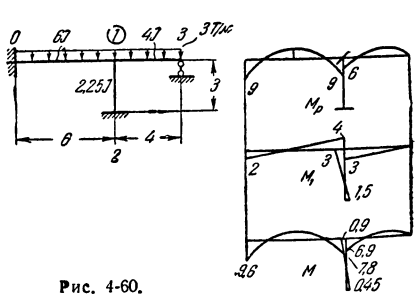


Рис. 4-60.

Рассчитаем раму по рис. 4-60, имеющую одну неизвестную деформацию — угол поворота Z_1 промежуточного узла ①. Для решения

канонического уравнения $Z_1 r_{11} + R_{1p} = 0$ строятся эпюры в основной системе, получаемой постановкой защемления в узле ①; используются данные табл. 4-26 для однопролетных балок с защемлениями на двух (для пролетов *0—1* и *1—2*) концах и на одном (пролет *1—3*) конце: M_p — эпюра от внешней нагрузки; M_1 — эпюра от приложенного в узле *1* угла поворота $Z_1 = 1$; момент в этом узле от $Z_1 = 1$, т. е. r_{11}, равен сумме моментов по стержням, сходящимся в узле *1*, т. е. $r_{11} = 4 + 3 + 3 = 10$; моментом же от нагрузки будет $R_{1p} = -9 + 6 = -3$. Таким образом, $Z_1 = \frac{3}{10}$; окончательная эпюра M строится сложением эпюры M_p и увеличенной в 0,3 раза эпюры M_1.

Способ общего уравнения, описанный в § 4-28, остается в силе и для рам, если они не имеют линейных смещений узлов. Рассмотрим

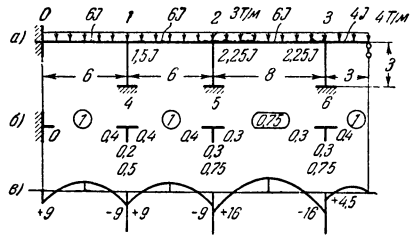


Рис. 4-61.

расчет рамы по рис. 4-61, *а*. Погонные жесткости стержней ($i = EJ : l$) выписаны в кружках на рис. 4-61, *б*, и там же около узлов даны коэффициенты распределения μ [например, $\mu_{23} = 0{,}75 : (0{,}75 \cdot 2 + 1) = 0{,}3$]. Коэффициенты α вычисляем для стержней *1—2* и *2—3*: $\alpha_{12} = \frac{0{,}4^2}{4 - 0{,}4^2} = 0{,}042$; $\alpha_{23} = \frac{0{,}3^2}{4 - 0{,}3^2} = 0{,}023$.

На рис. 4-61, *в* приведена начальная эпюра M^0, из которой имеем $M_1^0 = 0$; $M_2^0 = +16 - 9 = 7$; $M_3^0 = -16 + 4{,}5 = -11{,}5$. Для определения M_{23} вычислим M_2 и M_3 по формуле (4-183):

$$M_2 = (1 + \alpha_2)(1 - \mu'_{32}) M_2^0 = 6{,}9T \cdot м;$$

при этом

$$\alpha_2 = 0{,}042 + 0{,}023; \quad \mu'_{32} = \mu_{32}.$$

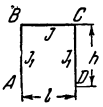
Аналогично

$$M_3 = (1 + \alpha_3)(1 - \mu'_{23}) M_3^0 = -8{,}12T \cdot м;$$

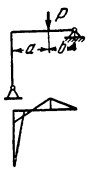
при этом $\alpha_3 = 0{,}023$; $\mu'_{23} = \mu_{23}(1 + \alpha_{2-23}) = 0{,}313$. Тогда по формуле (4-181):

$$M_{23} = M_{23}^0 - \mu_{23} \cdot M_2 - 0{,}5\mu_{32} \cdot M_3 =$$
$$= 16 - 0{,}3 \cdot 6{,}9 - 0{,}15(-8{,}12) = 15{,}13T \cdot м.$$

Таблица 4-30. Результаты расчета простейших рам $\alpha = \frac{Jh}{J_1 l}$



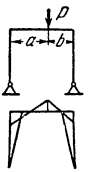
1.



$\gamma = b : l,$

$M_B = P \frac{a\gamma(1+\gamma)}{2(1+\alpha)}$

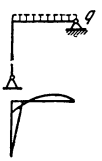
5.



$M_B = M_C =$

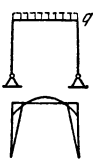
$= P \frac{ab}{l} \frac{3}{2(3+2\alpha)}$

2.



$M_B = q \frac{l^2}{8(1+\alpha)}$

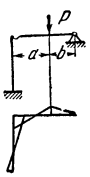
6.



$M_B = M_C =$

$= q \frac{l^2}{4(3+2\alpha)}$

3.

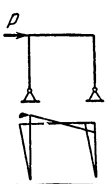


$\gamma = b : l,$

$M_B = P \frac{2a\gamma(1+\gamma)}{4+3\alpha},$

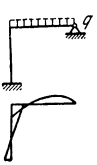
$M_A = 0{,}5 M_B$

7.



$M_B = M_C = P \frac{h}{2}$

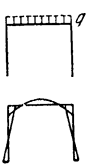
4.



$M_B = q \frac{l^2}{2(4+3\alpha)},$

$M_A = 0{,}5 M_B$

8.



$M_B = M_C =$

$= q \frac{l^2}{6(2+\alpha)},$

$M_A = M_D = 0{,}5 M_B$

Фокусные отношения (моментные k_x и угловые $k_x^{\angle}$) в балках и рамах любой сложности удобно определять по формулам:

$$k_x = 2 + \frac{6ix}{\sum\limits_{-x} i(4-\mu)}; \quad k_x^{\angle} = 2 + \frac{\sum\limits_{-x} i(4-\mu)}{2i_x}. \tag{4-198}$$

Например, для пролета *1—2* рамы по рис. 4-61 левое фокусное отношение равно:

$$k_{12} = 2 + \frac{6i_{12}}{i_{23}(4-\mu_{23}) + i_{25}(4-\mu_{25})} = 3{,}08.$$

§ 4-31. Криволинейные стержни

При круговом очертании оси стержня и нагрузке в его плоскости, показанной на рис. 4-62, общие уравнения для радиального v и тангенциального u прогибов, углов поворота φ, изгибающего момента M, поперечной Q и нормальной сил N имеют вид (в начальных параметрах):

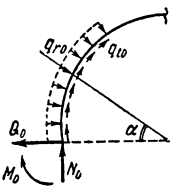


Рис. 4-62.

$$EJv = EJv_0\cos\alpha + EJ\sin\alpha\,(u_0 + \varphi_0 R) + M_0R^2(1-\cos\alpha) + Q_0\frac{R^3}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha) + \frac{R^3}{2}(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}\frac{R^4}{2}(\alpha\cos\alpha + 2\alpha - 3\sin\alpha) = -\frac{du}{d\alpha}EJ; \tag{4-199}$$

$$EJu = EJu_0\cos\alpha - EJv_0\sin\alpha - EJ\varphi_0 R(1-\cos\alpha) + M_0R^2(-\alpha + \sin\alpha) + \frac{Q_0R^3}{2}(2\cos\alpha - 2 + \alpha\sin\alpha) + \frac{R^3}{2}(-2\alpha + 3\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}\frac{R^4}{2}(4 - 4\cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \alpha^2); \tag{4-200}$$

$$EJ\varphi = EJ\varphi_0 + M_0R\alpha + Q_0R^2(1-\cos\alpha) + R^2(\alpha - \sin\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}R^3\left(\frac{\alpha^2}{2} + \cos\alpha - 1\right) = \frac{1}{R}\left(-u + \frac{dv}{d\alpha}\right)EJ; \tag{4-201}$$

$$M = M_0 + Q_0R\sin\alpha + R(1-\cos\alpha)(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}R^2(\alpha - \sin\alpha); \tag{4-202}$$

$$Q = \frac{dM}{Rd\alpha} = Q_0\cos\alpha + \sin\alpha\,(N_0 - q_{r0}R) + q_{t0}R(1-\cos\alpha); \tag{4-203}$$

$$N = N_0\cos\alpha - Q_0\sin\alpha + q_{r0}R(1-\cos\alpha) + q_{t0}R\sin\alpha = \frac{dQ}{d\alpha} + q_{r0}R. \tag{4-204}$$

Пусть требуется найти деформации в кольце по рис. 4-63; назначая начало координат в точке O, имеем:

$$u_0 = \varphi_0 = N_0 = 0;$$
$$Q_0 = \frac{P}{2}; \quad M_0 = ?$$

Используем условие: $\varphi = u = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2}$; из (4-201) находим $M_0 R \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{P}{2} R^2 = 0$, откуда $M_0 = -\frac{PR}{\pi}$, а затем из (4-200): $EJv_0 = -\frac{PR^3}{4\pi}\left(4 - \frac{\pi^2}{2}\right)$.

При нагрузке, перпендикулярной к плоскости оси стержня (рис. 4-64), общие уравнения прогибов w, углов поворота ψ и кручения θ, момен-

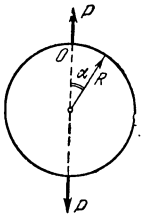


Рис. 4-63.

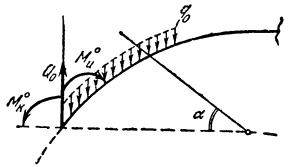


Рис. 4-64.

тов $M_и$ изгибающего и крутящего $M_к$ и поперечной силы Q имеют вид (в начальных параметрах) при $k = EJ : GJ_к$:

$$EJw = w_0 EJ + EJ\psi_0 R \sin\alpha + EJ\theta_0 R(1 - \cos\alpha) +$$
$$+ \frac{M_и^0 R^2}{2}[\alpha \sin\alpha (1 + k) - 2k(1 - \cos\alpha)] -$$
$$- \frac{M_к^0 R^2}{2}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)(1 + k) + \frac{Q_0 R^3}{2} \times$$
$$\times [(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)(1 + k) + 2k(\sin\alpha - \alpha)] -$$
$$- \frac{q_0 R^4}{2}[(2 - 2\cos\alpha - \alpha\sin\alpha) + k(4 - 4\cos\alpha - \alpha\sin\alpha - \alpha^2)]; \quad (4\text{-}205)$$

$$EJ\psi = EJ\psi_0 \cos\alpha + EJ\theta^0 \sin\alpha + \frac{M_и^0 R}{2}[2\sin\alpha +$$
$$+ (1 + k)(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha)] - \frac{M_к^0 R}{2}(1 + k)\alpha\sin\alpha +$$
$$+ \frac{Q_0 R^2}{2}[(1 + k)\alpha\sin\alpha + 2k(\cos\alpha - 1)] + \frac{q_0 R^3}{2} \times$$
$$\times [-\sin\alpha + \alpha\cos\alpha + k(\alpha\cos\alpha + 2\alpha - 3\sin\alpha)] = \frac{dw}{Rd\alpha} EJ; \quad (4\text{-}206)$$

$$EJ\theta = -EJ\psi_0 \sin\alpha + EJ\theta^0 \cos\alpha - \frac{M^0_и R}{2} \times$$

$$\times (1+k)\,\alpha \sin\alpha - \frac{M^0_к R}{2} [\alpha \cos\alpha + \sin\alpha +$$

$$+ k\,(\alpha\cos\alpha + \sin\alpha)] + \frac{Q_0 R^2}{2} [(\alpha\cos\alpha - \sin\alpha) \times$$

$$\times (1+k)] - \frac{q_0 R^3}{2} [(\alpha \sin\alpha - 2 + 2\cos\alpha)(1+k)] =$$

$$= \frac{d^2 w}{d\alpha^2} \frac{1}{R} EJ - M_и R; \quad (4\text{-}207)$$

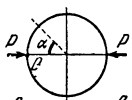
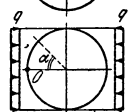
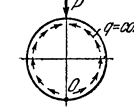
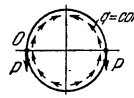
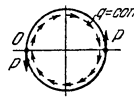
$$M_и = M^0_и \cos\alpha - M^0_к \sin\alpha + Q_0 R \sin\alpha - q_0 R^2 (1 - \cos\alpha) = \frac{dM_к}{d\alpha}; \quad (4\text{-}208)$$

$$M_к = M^0_и \sin\alpha + M^0_к \cos\alpha + Q_0 R (1 - \cos\alpha) - q_0 R^2 (\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= -\frac{dM_и}{d\alpha} + Q_0 R - q_0 R^2 \alpha; \quad (4\text{-}209)$$

$$Q = Q_0 - q_0 R\alpha. \quad (4\text{-}210)$$

Таблица 4-31. **Результаты расчета колец**

1.		$M_0 = P\frac{R}{\pi}$, $M_\alpha = PR\left(\frac{1}{\pi} - 0{,}5\sin\alpha\right)$, $v_0 = \frac{PR^3}{8\pi EJ}(8 - \pi^2)$.
2.		$M_0 = \frac{qR^2}{4}$, $M_\alpha = \frac{qR^2}{4}(1 - 2\sin^2\alpha)$.
3.		$q = \frac{P}{4R}$, $N_0 = \frac{4qR}{\pi}$, $M_0 = \frac{qR^2}{\pi}\left(6 - \frac{\pi^2}{2}\right)$.
4.		$N_0 = 0{,}5P$, $M_0 = 0$, $q = \frac{P}{2R}$, $Q_0 = \frac{P}{2}\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$.
5.		$q = \frac{P}{\pi R}$, $N_0 = 0{,}5P$, $M_0 = 0$, $Q_0 = \frac{P}{\pi}$.

§ 4-32. Расчеты балок

А. Расчет по *упругому состоянию* выполняется с помощью формул прочности и жесткости (см. § 4-23):

$$\sigma = \frac{M_{\text{макс}}}{W} \leqslant [\sigma],\quad \sigma_{\text{макс}} = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\frac{\sigma^2}{4} + \tau^2} \leqslant [\sigma]; \tag{4-211}$$

$$v_{\text{макс}} = \frac{M_{\text{макс}} l^2}{EJ} k = \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{y_{\text{макс}}} k \leqslant [v], \tag{4-212}$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение (гл. 4-2); $y_{\text{макс}}$ — расстояние от нейтрального до крайнего волокна поперечного сечения; k — коэффициент, определяемый из выражений прогибов (§§ 4-26—4-30); $[v]$ — допускаемый прогиб, лежащий в соответствии с нормами проектирования в пределах $\frac{l}{200} \div \frac{l}{1500}$.

Б. Расчет на прочность по *состоянию разрушения* производят по формуле (см. гл. 4-2):

$$M_{\text{разр}} = M_{\text{макс}}\, n = \sigma_{\text{разр}}\, W_{\text{пл}}, \tag{4-213}$$

где n — запас прочности; $\sigma_{\text{разр}}$ равен либо $\sigma_т$ — для идеального жесткопластического тела, либо $\sigma_{\text{пч}}$ — для тела с упрочнением (рис. 4-67).

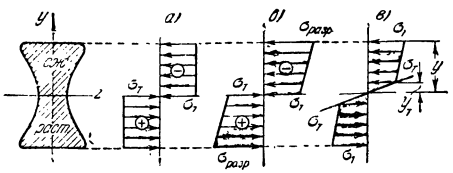


Рис. 4-65.

Пластический момент сопротивления $W_{\text{пл}}$ для жестко-пластического тела связан с упругим моментом сопротивления W формулой (рис. 4-65)

$$W_{\text{пл}} = W\eta = S_{z\,\text{сж}} + S_{z\,\text{р}}, \tag{4-214}$$

где S_z — статические моменты относительно нейтральной оси площадей сечения сжатой и растянутой зон; значения $W_{\text{пл}}$ и η приводятся в табл. 4-32.

Величина $M_{\text{макс}}$ для формулы (4-213) определяется в статически определимых балках обычным расчетом (§§ 4-26—4-30); в статически неопределимых балках $M_{\text{макс}}$ находятся способом выравнивания разрушающих моментов; в пределах каждого расчетного промежуточного пролета неразрезной балки должно быть три места их образования — три «пластических» шарнира (в крайнем пролете с шарнирной опорой — два «пластических» шарнира): на опорах и в пролете.

Таблица 4-32. Значения $W_{пл}$ и коэффициента η к формуле (4-214)

Форма сечения	$W_{пл}$	η
Круг	$1{,}33\ r^3$	1,7
Кольцо при $c = r_1 : r$	$1{,}33\ r^3 (1 - c^3)$	$1{,}7 \dfrac{1 + c + c^2}{(1 + c)(1 + c^2)}$
Прямоугольник	$bh^2/4$	1,5
Двутавр, швеллер, коробка при $\beta = b_1 : b$; $c = h_1 : h$ . .	$\dfrac{bh^2}{4}(1 - \beta c^2)$	$1{,}5 \dfrac{1 - \beta c^2}{1 - \beta c^3}$
Двутавр проката	$(1{,}15 - 1{,}17)\ W$	1,15 — 1,17

На рис. 4-66 приведено два случая выравнивания моментов; в случае *а*, соблюдая условия уравновешивания внешней разрушающей нагрузкой qn внутренних моментов в пластических шарнирах *1* и *2*,

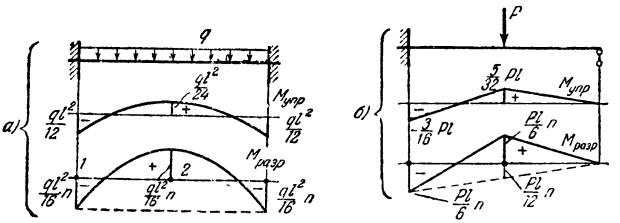


Рис. 4-66.

получают $\dfrac{ql^2}{8} n = 2M_{разр}$, откуда $M_{разр} = \dfrac{ql^2}{16} n$. Аналогично для случая *б*:

$$\frac{Pl}{4} n = 1{,}5\ M_{разр}.$$

Для жестко-пластического тела с упрочнением (эпюра σ на рис. 4-65,*б*) формула (4-213) имеет вид:

$$M_{разр} = M_{макс}\ \ n = \sigma_{пч}\ W \eta_1; \qquad \eta_1 = 1 + \frac{\sigma_т}{\sigma_{пч}} (\eta - 1), \quad (4\text{-}215)$$

где η берется из табл. 4-32. В случае прямоугольного сечения и $\sigma_т : \sigma_{пч} = 0{,}5$ имеем $\eta_1 = 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 1{,}25$. Связь напряжений $\sigma > \sigma_т$ с моментом $M > M_{пл} = \sigma_т W \eta$ и кривизна $\dfrac{1}{\rho}$ определяются формулами:

$$\sigma - \sigma_т = \frac{M - M_{пл}}{J} y; \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M - M_{пл}}{E_1 J}; \quad (4\text{-}216)$$

модуль упрочнения $E_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ (рис. 4-67), где α_1 — угол наклона AB к оси ε.

В. Если диаграмма $\sigma - \varepsilon$ принята по рис. 4-67, то в области *упруго-пластических* деформаций:

$$\sigma = E\varepsilon\,(1-\omega) = E'\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}\,k_1; \tag{4-217}$$

$$\omega = \left(1-\frac{E_1}{E}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon}\right) = \left(1-\frac{E_1}{E}\right)\left(1-\frac{y_T}{y}\right) = 1-k_1, \tag{4-218}$$

где $\frac{1}{\rho}$ — кривизна балки; $E = \operatorname{tg}\alpha$; $E_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$; $1-\frac{E_1}{E} = \lambda$ — коэффициент разупрочнения, меняющийся от 0 до 1; y и y_T — см. на рис. 4-65, *в*; $\omega = \Delta\sigma : (\sigma + \Delta\sigma)$ (рис. 4-67); k_1 и ω лежат в пределах от 0 до 1. Кривизна балки в той же области

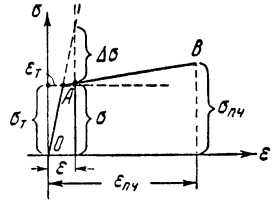


Рис. 4-67.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJk_2} = \frac{\sigma_T}{Ey_T};$$

$$k_2 = 1-\lambda\,\frac{J_{пл} - y_T S_{пл}}{J}, \tag{4-219}$$

где k_2 лежит в пределах от 0 до 1, $J_{пл}$ и $S_{пл}$ — момент инерции и статический момент части площади сечения, охваченной пластической деформацией. Из (4-218), обозначая $J : W \cdot y_T = y_{макс} : y_T = k$, а $\sigma_T = M_T : W$, получают:

$$M = M_T k_0; \quad k_0 = kk_2; \tag{4-220}$$

из (4-216) — (4-219) находят

$$\sigma = \sigma_T \frac{y}{y_T} k_1; \quad \sigma_{макс} = \sigma_T k_1 k. \tag{4-221}$$

Для бруса прямоугольного сечения

$$\left.\begin{aligned} k_0 = M : M_T &= \frac{E_1}{E}\,k + \lambda\left(1{,}5 - \frac{0{,}5}{k^2}\right)^{*}; \\ S_{пл} = \frac{bh^2}{4}\left(1-\frac{1}{k^2}\right);\ J_{пл} &= \frac{bh^3}{12}\left(1-\frac{1}{k^3}\right). \end{aligned}\right\} \tag{4-222}$$

Пусть брусок сечением $b = h = 1$ *см* при $E_1 : E = 0{,}05$ и $\sigma_T = 3{,}3$ $T/см^2$ испытывает действие момента $M = 2M_T$; определим y_T и $\sigma_{макс}$.

Из (4-222), поскольку $k_0 = 2$, находим:

$$2 = 0{,}05k + 0{,}95\left(1{,}5 - \frac{0{,}5}{k^2}\right),$$

---

*) Для бруса круглого сечения скобка второго слагаемого правой части заменяется на $\left(2-\frac{1}{k^2}\right)\cdot\frac{8}{3\pi}$.

откуда $k = 11{,}6$; следовательно, $y_т = y_{макс} : 11{,}6 = 0{,}043h$. При $y = \frac{h}{2}$ из (4-217) находим $k_1 = 0{,}132$ и по (4-220) $\sigma_{макс} = 3{,}3 \cdot 11{,}6 \cdot 0{,}132 = 5{,}05\ т/см^2$.

Если $\sigma_{макс}$ определять, как для жестко-пластического тела, по формулам (4-216) при $M_{пл} = 1{,}5\ M_т$ получаем $\sigma_{макс} = 1{,}5\,\sigma_т = 4{,}95\ т/см^2$ (разница 2% от предыдущего).

Г. Для расчета балок по 1-му *предельному расчетному состоянию* (§ 4-9) по аналогии с формулами (4-85) — (4-88) используют формулы:

$$M_{расч} = M^н_п n_п + M^н_в n_в \leqslant M_{пред}; \tag{4-223}$$

$$M_{пред} = m\, W_{нет}\, R^н_и\, k_н. \tag{4-224}$$

Коэффициенты n, m, k берутся по данным § 4-9; моменты $M^н_п$ и $M^н_в$ учитывают влияние постоянной и временной нагрузок; $R^н_и$ — нормативное напряжение. Деля обе части (4-223) на $n_в$ и на момент сопротивления $W_{нет}$, получают формулу расчетного нормального напряжения:

$$\sigma = \frac{M^н_п \dfrac{n_п}{n_в} + M^н}{W_{нет}} \leqslant R^н_и \frac{m}{n_в}\, k_н; \tag{4-224а}$$

в правой части — напряжение, сопоставимое с допускаемым.

Литература. См. главу 4-1, стр. 161.

Глава 4-6

ПЛАСТИНКИ

§ 4-33. Прямоугольные пластинки

Основные дифференциальные соотношения (рис. 4-68) (см. гл. 4-1, § 4-5):

$$\left.\begin{aligned} q &= \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}, \\ Q_x &= \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y};\quad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}; \end{aligned}\right\} \tag{4-225}$$

$$\left.\begin{aligned} M_x &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad D = \frac{EJ}{1-\mu^2}, \\ M_y &= D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \quad J = \frac{1 \cdot h^3}{12}, \\ M_{xy} &= D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{4-226}$$

где D — цилиндрическая жестокость; μ — коэффициент Пуассона; h — толщина пластинки; w — прогиб. Единицы измерения: q — $кГ/см^2$;

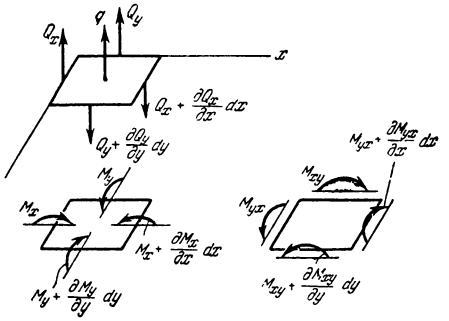


Рис. 4-68.

Q — $кГ/см$; M — $кГ$. Уравнение Навье — Софи Жермен:

$$q = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right). \tag{4-227}$$

Напряжения (рис. 4-69) определяются по формулам:

$$\left.\begin{gathered} \sigma_x = \frac{M_x}{J} z, \quad \sigma_y = \frac{M_y}{J} z, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{M_{xy}}{J} z, \\ \tau_{zx} = \frac{Q_x S}{J}, \quad \tau_{zy} = \frac{Q_y S}{J}, \end{gathered}\right\} \tag{4-228}$$

где S — статический момент отсеченной части [см. формулу (4-148) Журавского] площади сечения. Частные случаи:

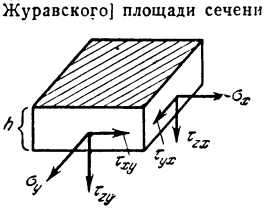


Рис. 4-69.

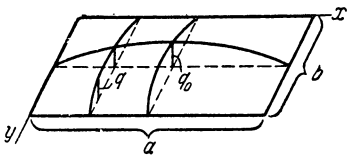


Рис. 4-70.

а) Синусоидальная нагрузка (рис. 4-70) на свободно опертой пластинке:

$$q = q_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

прогиб

$$w = -\frac{q_0 a^4 b^4}{D\pi^4 (a^2+b^2)^2} \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}.$$

б) Равномерно распределенная нагрузка, свободно опертые края:

$$\left.\begin{aligned} w &\approx c \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b}, \\ c &= -\frac{q_0 a^4}{2\pi^3 D\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)^2} \quad \text{для } b:a \leqslant 2{,}5, \\ c &= -\frac{q_0 a^4}{76{,}8D\left[1+2\left(\frac{a}{b}\right)^3\right]} \quad \text{для } b:a > 2{,}5, \end{aligned}\right\} \tag{4-229}$$

где $c = w_{\text{макс}}$; вычисленные по (4-226) моменты здесь завышены в среднем на 10%; более точно:

$$M_{\text{макс}} = M_x = \frac{0{,}125 q a^2}{1+1{,}6\frac{a^2}{b^2}}; \quad M_y = M_x \frac{\mu+\frac{a^2}{b^2}}{1+\mu\frac{a^2}{b^2}}. \tag{4-230}$$

в) То же при защемленных краях:

$$\left.\begin{aligned} w_{\text{макс}} &\approx -\frac{qa^4}{384D\left(1+\frac{a^5}{b^5}\right)}, \\ M_{\text{мин}} &\approx -\frac{qa^2}{12\left(1+0{,}62\frac{a^4}{b^4}\right)}, \quad M_{\text{макс}} \approx \frac{qa^2}{24\left(1+0{,}8\frac{a^4}{b^4}\right)}. \end{aligned}\right\} \tag{4-231}$$

г) То же при защемлении вдоль сторон b; момент защемления.

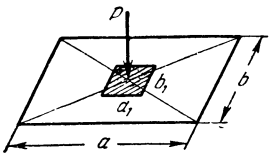


Рис. 4-71.

$$M_{\text{мин}} = -\frac{qa^2}{12\left(1+0{,}2\frac{a^4}{b^4}\right)}. \tag{4-232}$$

д) То же для квадратной плиты, опертой по углам:

$$\left.\begin{aligned} w_{\text{макс}} &= -\frac{qa^4}{38D}; \\ M_{\text{макс}} &= 0{,}111\, qa^2. \end{aligned}\right\} \tag{4-233}$$

е) Сосредоточенная сила P в середине, свободно опертые края (рис. 4-71) ($a \leqslant b$):

$$\left.\begin{aligned} w_{\text{макс}} &= -\frac{Pa^2}{D59\left(1+0{,}46\frac{a^4}{b^4}\right)}, \\ M_{\text{макс}} &= c\frac{P}{6} \quad (\text{при } a=b), \end{aligned}\right\} \tag{4-234}$$

где c берется из табл. 4-33.

Таблица 4-33. Коэффициент c к формуле (4-234)

$a_1 : a$ \ $b_1 : b$	0	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0
0	∞	1,93	1,51	1,08	0,67	0,55
0,1	2,27	1,70	1,39	1,02	0,65	0,53
0,2	1,85	1,52	1,28	1,97	0,62	0,50
0,4	1,39	1,22	1,07	0,85	0,55	0,46
0,8	0,93	0,84	0,76	0,62	0,42	0,34
1,0	0,76	0,69	0,63	0,52	0,35	0,29

ж) То же, защемленные края ($a \leqslant b$):

$$w = -\frac{Pa^2}{D136\left(1+0{,}31\frac{a^4}{b^4}\right)}; \qquad M_{\text{мин}} = -\frac{P}{5{,}4\left(1+0{,}46\frac{a^2}{b^2}\right)}. \tag{4-235}$$

з) Напряжение при свободном опирании $\sigma_{\text{св}}$ и при защемлении $\sigma_{\text{защ}}$ вследствие разности температур t на гранях, параллельных срединной плоскости:

$$\sigma_{\text{св}} = E\frac{\alpha t}{2}, \quad \sigma_{\text{защ}} = E\frac{\alpha t}{2(1-\mu)}, \tag{4-236}$$

где α — коэффициент линейного расширения.

§ 4-34. Круглые и эллиптические пластинки

При полярно-симметричной нагрузке соотношения между радиальным M_r, тангенциальным M_t моментами и поперечной силой Q (рис. 4-72), а также прогибом w и углом поворота φ имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} Qr &= M_t - M_r - r\frac{dM_r}{dr}, \\ M_r &= D\left(\frac{d\varphi}{dr}+\mu\frac{\varphi}{r}\right), \\ M_t &= D\left(\frac{\varphi}{r}+\mu\frac{d\varphi}{dr}\right); \end{aligned}\right\} \tag{4-237}$$

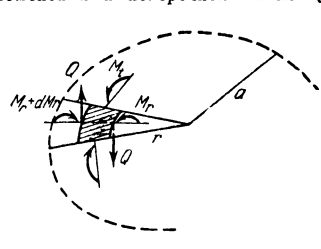


Рис. 4-72.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{dw}{dr}; \\ \frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2} &= -\frac{Q}{D}. \end{aligned}\right\} \tag{4-238}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения (4-238):

$$\varphi = Ar + \frac{B}{r} + \varphi_0. \tag{4-239}$$

где A и B — постоянные; φ_0 — частное решение; общие уравнения в начальных параметрах можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} w &= w_0 + \frac{M_{r0}}{2!D\,(1+\mu)}r^2 - \frac{2Q_0}{3\cdot 3!\,D}r^3 - \left(\frac{dQ}{dr}\right)_0 \frac{3}{4\cdot 4!\,D}r^4 - \\ &\quad - \left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right)_0 \frac{4}{5\cdot 5!}r^5 - \ldots, \\ \varphi &= \frac{M_{r0}}{D\,(1+\mu)}r - \frac{2Q_0}{3\cdot 2!\,D}r^2 - \left(\frac{dQ}{dr}\right)_0 \frac{3}{4\cdot 3!\,D}r^3 - \\ &\quad - \left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right)_0 \frac{4}{5\cdot 4!D}r^4 - \ldots; \\ \frac{d\varphi}{dr} &= -\frac{2Q_0}{3D}r - \left(\frac{dQ}{dr}\right)_0 \frac{3}{4\cdot 2!\,D}r^2 - \left(\frac{d^2Q}{dr^2}\right)_0 \frac{4}{5\cdot 3!\,D}r^3 - \ldots \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}240)$$

Частные случаи:

а) Эллиптическая пластинка, защемленная по краю с равномерной нагрузкой (a и b — полуоси):

$$w = -\frac{qa^4b^4}{24D\left(a^4 + \frac{2}{3}a^2b^2 + b^4\right)}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)^2 \quad (4\text{-}241)$$

(начало координат в центре пластинки).

б) Круглая пластинка радиусом a, свободно опертая:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{q}{64D}\left[(a^2 - r^2)^2 + \frac{4a^2(a^2 - r^2)}{1+\mu}\right], \quad \varphi = \frac{qa^3}{12D(1-\mu^2)} \text{ (у края)}, \\ \text{макс } M_r &= \text{макс } M_t = \frac{qa^2}{16}(3+\mu) \text{ (в центре)}; \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}242)$$

при защемлении края второй член в скобках w отпадает, моменты же будут:

$$\left.\begin{aligned} &\text{макс } M_r = \text{макс } M_t = \frac{qa^2}{16}(1+\mu) \text{ (в центре)}, \\ &\text{мин } M_r = -\frac{qa^2}{8}, \quad \text{мин } M_t = -\mu\frac{qa^2}{8}. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}243)$$

в) То же под действием распределенного по контуру момента M:

$$\left.\begin{aligned} w &= -\frac{M}{2D\,(1+\mu)}(a^2 - r^2), \\ \varphi &= \frac{Ma}{D\,(1+\mu)} \text{ (у края)}. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}244)$$

г) То же под действием сосредоточенной силы P (в центре):

$$\left.\begin{aligned} w &= \frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\mu}{1+\mu}\left(\frac{a^2 - r^2}{2}\right) + r^2 \ln\frac{r}{a}\right], \\ \varphi &= \frac{P\cdot a}{4\pi D\,(1+\mu)} \text{ (у края)}, \\ M_r &= \frac{(1+\mu)P}{4\pi}\ln\frac{a}{r}; \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}245)$$

при защемлении края для w отпадает множитель $(3+\mu):(1+\mu)$; момент равен:

$$M_r=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{r}-1\right];\quad M_t=\frac{P}{4\pi}\left[(1+\mu)\ln\frac{a}{r}-\mu\right]. \quad (4\text{-}246)$$

д) Тонкая круглая пластинка, защемленная по контуру; большие прогибы w_0 находят из уравнения

$$w_0\left(1+0{,}58\frac{w_0^2}{h^2}\right)=\frac{qa^4}{64D}; \quad (4\text{-}247)$$

в случае мембраны отбрасывается 1 в скобках, а максимальные напряжения в центре σ_0 и у края σ_a равны:

$$\sigma_0=0{,}42\sqrt[3]{E\left(\frac{qa}{h}\right)^2},\quad \sigma_a=0{,}78\sigma_0; \quad (4\text{-}248)$$

для квадратной мембраны со сторонами $2a$:

$$w_0=0{,}8a\sqrt[3]{\frac{qa}{Eh}};\quad \sigma_0=0{,}4\sqrt[3]{E\left(\frac{qa}{h}\right)^2}. \quad (4\text{-}249)$$

е) Плита (модуль E, толщина h, радиус a) на упругом основании (модуль E_0, коэффициент постели k), имеющая параметр $\frac{E_0a^3}{Eh^3}>3$, при действии сосредоточенной силы P:

$$\left.\begin{aligned} w_p&=\frac{P}{8\sqrt{Dk}},\quad D=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)},\\ k&\approx\frac{0{,}65E_0}{h}\sqrt[3]{\frac{E_0}{E}}. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}250)$$

ж) То же при сплошной нагрузке q, распределенной по небольшой площадке радиуса r:

$$w_q=\frac{16(1-\mu_0^2)qr}{3\pi E_0}. \quad (4\text{-}251)$$

Литература. 1. Бубнов И. Г., Труды по теории пластин, Гостехиздат, 1953. 2. Попкович П. Ф., Строительная механика корабля, ч. 2, Судпромгиз, 1941. 3. Тимошенко С. П., Пластинки и оболочки, Гостехиздат, 1948. 4. Справочник машиностроения, т. 3, гл. V, Машгиз, 1955.

Глава 4-7

УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 4-35. Общие уравнения для прямых стержней

Дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба для сжатого силой N стержня A_0B_0 (рис. 4-73):

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M}{EJ}-\alpha^2(v-v_0), \quad (4\text{-}252)$$

где

$$M = M_0 + Q_0 x + q_0 \frac{x^2}{2} + \ldots; \quad \alpha^2 = N : EJ. \tag{4-253}$$

Общие уравнения продольно-поперечного изгиба при $EJ = \text{const}$:

$$v = v_0 + \frac{\varphi_0}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{M_0}{EJ\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) + \frac{Q_0}{EJ\alpha^3}(\alpha x - \sin \alpha x) + \\ + \frac{q_0}{EJ\alpha^4}\left(\frac{\alpha^2 x^2}{2!} - 1 + \cos \alpha x\right) + \ldots; \tag{4-254}$$

$$\varphi = \varphi_0 \cos \alpha x + \frac{M_0}{EJ\alpha} \sin \alpha x + \frac{Q_0}{EJ\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) + \\ + \frac{q_0}{EJ\alpha^3}(\alpha x - \sin \alpha x) + \ldots; \tag{4-255}$$

$$M = M_0 \cos \alpha x + \frac{Q_0}{\alpha} \sin \alpha x + \frac{q_0}{\alpha^2}(1 - \cos \alpha x) - \varphi_0 EJ\alpha \sin \alpha x + \ldots \tag{4-256}$$

При $N = N_{кр}$ и отсутствии нагрузки в пролете (4-252) — (4-256) используются для записи условий потери устойчивости; различают при этом

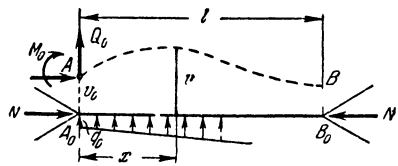


Рис. 4-73.

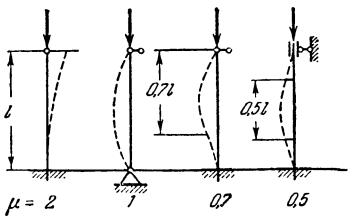


Рис. 4-74.

пять областей и четыре пограничных значения критической силы $N_{кр}$ (рис. 4-74), общая формула которой

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2}; \quad \mu = l_{пр} : l = \pi : \alpha l = \pi : \nu. \tag{4-257}$$

Значения коэффициента длины μ даны на рис. 4-74. В нормах проектирования указываются расчетные значения μ, причем за основное принимается $\mu = 1$.

Критические напряжения до предела упругости (по Эйлеру):

$$\sigma_{кр}=\frac{N_{кр}}{F}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}\leqslant\sigma_{упр};\quad \lambda=\frac{\mu l}{i},\tag{4-258}$$

где λ — гибкость; $i=\sqrt{J:F}$ — наименьший радиус инерции сечения; $\sigma_{упр}$ — предел упругости. Формула (4-258) справедлива для

$$\lambda\geqslant\lambda_{пр}=\pi\sqrt{E:\sigma_{упр}}.\tag{4-259}$$

При $\lambda<\lambda_{пр}$ критические напряжения лежат за пределами упругости:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{кр}&=\frac{\pi^2 T}{\lambda^2};\\ T&=\frac{4EE_1}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_1})^2},\end{aligned}\right\}\tag{4-260}$$

где $E=\operatorname{tg}\alpha$ и $E_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ (рис. 4-75); значение T (по Энгессеру — Ясинскому) справедливо для прямоугольного сечения и достаточно точно для остальных форм сечений. Иногда (по Шёнли) принимают $T=E_1$.

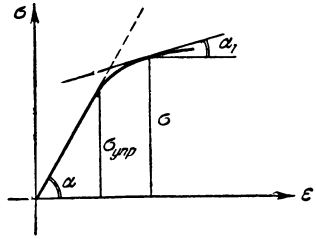


Рис. 4-75.

Значения E_1 и T для двух материалов даны в таблице 4-34.

Таблица 4-34. Модули E_1 и T ($T/см^2$)

σ ($кГ/мм^2$)	Ст. СХЛ-1			Дюралюминий		
	ε	E_1	T	ε	E_1	T
14	6,3	2200	2200	20 [1]	700	700
28	12,5	2200	2200	70 [2]	105	218
29	13,0 [1]	2200	2200	79	88	187
30	13,5	1650	1900	81	70	155
31,6	15	684	1125	120	42	105
32,5	17,5	147	369	145	36	95
33	35 [2]	19	88	180	33	88
42	52	19	88	1000 [3]	10	35
66	1800 [3]	19	88	—	—	—

Примечание: ε увеличено в 10^4 раз. [1] ε_y. [2] $\varepsilon_т$. [3] $\varepsilon_{пч}$.

При отсутствии сведений о величинах T и E_1 пользуются формулой Тетмайера—Ясинского:

$$\sigma_{кр}=a-b\lambda;\ a\approx(1{,}0\div 1{,}4)\,\sigma_т;\quad b=\frac{a-\sigma_y}{\lambda_{пр}},\tag{4-261}$$

где $\lambda_{пр}$ — по формуле (4-259); $\sigma_т$ и σ_y — пределы текучести и упругости. Величины a и b для некоторых материалов ($кГ/мм^2$):

	Сталь 3	Сталь 50	СХЛ-1	Сосна
a	34	60	37	2,93
b	0,15	0,30	0,1	0,02

Для чугуна иногда используют формулу $\sigma_{кр}$ ($кГ/см^2$):

$$\sigma_{кр} = 7800 - 120\lambda + 0{,}5\lambda^3. \qquad (4\text{-}262)$$

Подбор сечений сжатых стержней выполняют по формуле

$$\sigma = \frac{N}{F} \leqslant [\sigma]\,\varphi, \qquad (4\text{-}263)$$

где $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на сжатие при $\lambda = 0$; φ берут из табл. 4-32. Запас прочности определяется по формуле

$$n = \frac{\sigma_{кр}}{\sigma} = \frac{\sigma_{кр}}{[\sigma]\varphi}. \qquad (4\text{-}264)$$

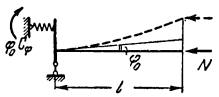
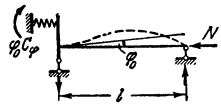
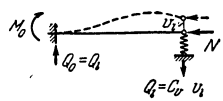
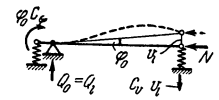
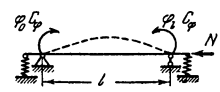
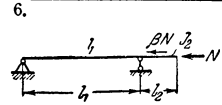
Пусть требуется подобрать квадратное сечение соснового бруса длиной $l = 4$ *м*, шарнирно опертого концами при $[\sigma] = 125$ $кГ/см^2$ и $P = 25$ *Т*. Из (4-263) находим $F = 200 : \varphi$. Назначая произвольно $\varphi = 0{,}55$, находим $F = 364$ $см^2$, и сторона квадрата $a = 19$ *см*; при этом $i = \sqrt{J : F} = \frac{a}{\sqrt{12}} = 5{,}5$ *см*; следовательно, гибкость $\lambda = l : i = 73$ и из табл. 4-35 по интерполяции $\varphi_k = 0{,}57$. Отклонение φ_k от φ, меньшее 5%, допустимо, поэтому принимаем сечение $a^2 = 19^2 = 361$ $см^2$; $[\sigma]\varphi = 125 \cdot 0{,}57 = 71$ $кГ/см^2$; $\sigma = P : F = 69$ $кГ/см^2$; для сосны по (4-259) $\lambda_{пр} = 100$, поэтому критическое напряжение по (4-261) $\sigma_{кр} = 293 - 2 \cdot 73 = 147$ $кГ/см^2$; запас прочности $n = 147 : 69 = 2{,}13$.

Условия потери устойчивости для нескольких случаев закрепления концов и нагрузки см. в табл. 4-36.

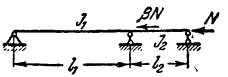
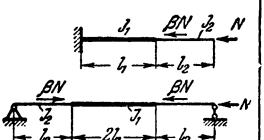
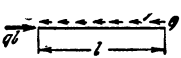
Таблица 4-35. Значения коэффициента φ по нормам

λ	Сталь 2-4	Сталь ПК	Чугун	Сосна
0	1,0	1,0	1,0	1,0
20	0,96	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,79	0,34	0,71
70	0,81	0,72	0,84	0,61
80	0,75	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,43	0,16	0,30
110	0,52	0,35	—	0,25
120	0,45	0,30		0,22
130	0,40	0,26		0,18
140	0,36	0,23		0,16
150	0,32	0,21		0,14
160	0,29	0,19		—
170	0,26	0,17		
180	0,23	0,15		
190	0,21	0,14		
200	0,19	0,13		

Таблица 4-36. Условия потери устойчивости

Форма потери устойчивости	Условие
1. 	$\operatorname{tg}\nu = \frac{C_\varphi l}{EJ\nu}$, $\nu = \alpha l$, C_φ — жесткость защемления (кГ/см)
2. 	$\operatorname{tg}\nu = \frac{\nu}{1+\frac{EJ\nu^2}{C_\varphi l}}$
3. 	$\operatorname{tg}\nu = \nu\left(1-\frac{\alpha^2 EJ}{C_v l}\right)$, C_v — жесткость опоры (кГ/см)
4. 	$\frac{EJ}{C_v l^3} = \left(\bar{a}_0+\frac{\psi}{3}\right) : \left(\bar{a}_0\nu^2 - \frac{\nu}{\operatorname{tg}\nu}\right)$, $\bar{a}_0 = \frac{EJ}{C_\varphi l}$, ψ — см. случай 7 на стр. 250
5. 	$\frac{\psi}{3}\frac{EJ}{l}\left(\frac{1}{C_{\varphi_0}}+\frac{1}{C_{\varphi_l}}\right)+\left(\frac{EJ}{l}\right)^2\frac{1}{C_{\varphi_0}C_{\varphi_l}}+\frac{\chi}{12}=0$, $\chi = \frac{12\left(2\operatorname{tg}\frac{\nu}{2}-\nu\right)}{\nu^3}$
6. 	$\operatorname{tg}\nu = \frac{C_1 l_2}{E_2 J_2 \nu_2}$, $C_1 = 3E_1J_1 : l_1\psi_1$

Продолжение табл. 4-36

Форма потери устойчивости	Условие
7. 	$\frac{\psi_1 l_1}{E_1 J_1} = -\frac{\psi_2 l_2}{E_2 J_2}$, $\psi_1 = \frac{3(\operatorname{tg}\nu_1 - \nu_1)}{\nu_1^2 \operatorname{tg}\nu_1}$
8. 	$\operatorname{tg}\nu_1 \operatorname{tg}\nu_2 = \frac{E_1 J_1 \alpha_1}{E_2 J_2 \alpha_2}$, $\nu_1 = \alpha_1 l_1 = \sqrt{\frac{N(1+\beta)}{E_1 J_1}}\, l_1$, $\nu_2 = \alpha_2 l_2 = \sqrt{\frac{N}{E_2 J_2}}\, l_2$
9. 	$(ql)_{кр} = k\frac{EJ}{l^2}$; для закреплений по рис. 4-74: 1-й случай $k = 7{,}87$; 2-й » $k = 18{,}5$; 3-й » $k = 52{,}5$; 4-й » $k = 73{,}6$

Допустим (1-й случай) $C_\varphi = \frac{3EJ}{l}$; тогда $\operatorname{tg}\nu = \frac{3}{\nu}$; по тригонометрическим таблицам находим $\nu = 1{,}192$ и по формуле (4-257) $\mu = \pi : \nu = 2{,}63$, а из (4-257) $N_{кр} = 1{,}42\frac{EJ}{l^2}$. В 8-м случае допустим $l_1 = 2l_2 = l$, $J_1 = 2J_2 = J$, $\beta = 1$; тогда $\nu_1 = l\sqrt{\frac{2N}{EJ}}$, $\nu_2 = 0{,}5\nu_1$, $\alpha_1 = \alpha_2$,

$$\operatorname{tg}\nu_1 \operatorname{tg} 0{,}5\nu_1 = 2;$$

из тригонометрических таблиц $\nu_1 = 1{,}23$; следовательно,

$$N_{кр} = 0{,}75\frac{EJ}{l^2}.$$

§ 4-36. Стержни переменной жесткости

Для некоторых стержней со ступенчато-переменной жесткостью см. табл. 4-36. В общем случае удобно пользоваться графоаналитическим способом (§ 4-27). Допустим, что требуется найти $N_{кр}$ (рис. 4-76) для стержня плавно-переменного момента инерции

$$J_x = J_0\left(1 + 0{,}2\frac{x}{l} + 0{,}2\frac{x^2}{l^2}\right),$$

Форма потери устойчивости показана на рис. 4-76, *а*, а на рис. 4-76, *б* дана расчетная эпюра фиктивной нагрузки и прогибов, согласно которым критическая сила

$$N_{кр} = \frac{EJ_1}{\bar{v}_1}, \qquad (4\text{-}265)$$

где J_1 и $\bar{v}_1$ — момент инерции и прогиб в характерной точке, имеющей

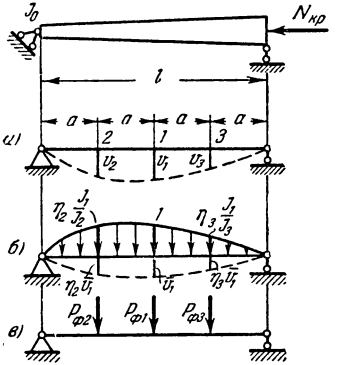


Рис. 4-76.

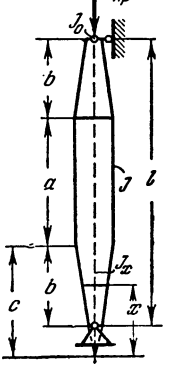


Рис. 4-77.

номер 1. Переход к сосредоточенным фиктивным грузам (рис. 4-76, *в*) по формуле (4-176) дает: $P_{ф2} = 0{,}087l\,(2{,}166\eta_2 + 0{,}515)$; $P_{ф1} = 0{,}087l\,(2 + 0{,}558\eta_2 + 0{,}470\eta_3)$; $P_{ф3} = 0{,}087l\,(0{,}515 + 1{,}822\eta_3)$.

Прогибы, вычисленные как фиктивные моменты, составляют:

$$\bar{v}_2 = \eta_2 \bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(1{,}515 + 1{,}902\eta_2 + 0{,}691\eta_3),$$

$$\bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(2{,}515 + 1{,}638\eta_2 + 1{,}382\eta_3),$$

$$\bar{v}_3 = \eta_3 \bar{v}_1 = 0{,}087\,\frac{l^2}{4}\,(1{,}515 + 0{,}820\eta_2 + 1{,}601\eta_3).$$

Отсюда $\eta_2 = 0{,}723$, $\eta_3 = 0{,}691$. Таким образом,

$$N_{кр} = \frac{11{,}36EJ_0}{l^2} \quad \text{и} \quad \bar{v}_1 = 0{,}1012l^2.$$

Для стойки по рис. 4-77 критическая сила составляет:

$$N_{кр} = k\,\frac{EJ}{l^2}, \quad J_x = J\left(\frac{x}{c}\right)^m, \qquad (4\text{-}266)$$

где k — коэффициент, зависящий от изменения J_x, приведен в табл. 4-37 по А. Н. Диннику для $m = 1$ и $m = 4$.

Таблица 4-37. Коэффициенты k для (4-266)

$J_0 : J$ \ $a : l$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	m
0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
	4,81	6,11	7,68	9,08	9,77	4
0,2	7,01	7,99	8,91	9,63	9,81	1
	6,02	7,90	8,42	9,38		4
0,4	7,87	8,59	9,19	9,70	9,84	1
	7,48	8,33	9,10	9,62		4
0,6	8,61	9,12	9,55	9,75	9,85	1
	8,47	9,01	9,45			4
0,8	9,27	9,54	9,69	9,82	9,86	1
	9,23	9,49				4

§ 4-37. Стержни составные и на упругих опорах

Критическая сила стержня, состоящего из ветвей, связанных решеткой (рис. 4-78), определяется формулой:

$$N_{кр} = \psi N_0; \quad 1 : \psi = 1 + \frac{\pi^2 J_y}{l^2}\left[\frac{1}{F_1 \sin\alpha \cos^2\alpha} + \frac{1}{F_2 \operatorname{tg}\alpha}\right], \qquad (4\text{-}267)$$

где N_0 — критическая сила без учета связей; F_1 и F_2 — площади сечения диагонали и распорки; J_y — момент инерции сечения ветвей. Расчетная гибкость определяется по формуле

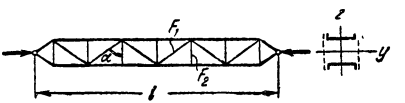


Рис. 4-78.

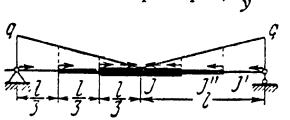


Рис. 4-79.

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \sqrt{\lambda_0^2 + \lambda_1^2}; \\ \lambda_0 &= l : i_y; \quad \lambda_1 = a : i_1, \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}268)$$

где i_y и i_1 — радиусы инерции сплошного стержня и одной ветви. Критическая сила стержня (рис. 4-79), подверженного действию линейно убывающей к середине пролета нагрузки, при ступенчато-переменном моменте инерции (*задача Ясинского*) определяется по формуле

$$N_{кр} = \frac{ql}{2} = k\frac{EJ}{l^2}, \qquad (4\text{-}269)$$

где k берут из второго столбца табл. 4-38, причем $\alpha = J' : J$ и $1 + \alpha = 2J'' : J$.

Таблица 4-38. **Коэффициенты k для формулы (4-269)**

α	k	Сжатый пояс фермы при		
		6 панелях	12 панелях	16 панелях
1	5,12	3,58	4,22	4,41
0,8	4,94	3,42	—	—
0,6	4,78	3,24	—	—
0,4	4,53	3,00	—	—
0,2	4,12	2,59	—	—

Если сжатый пояс фермы открытого моста имеет ограниченное число панелей, то величину k надо брать из последующих столбцов табл. 4-38. Влияние упругого отпора стоек и раскосов сказывается положительно,

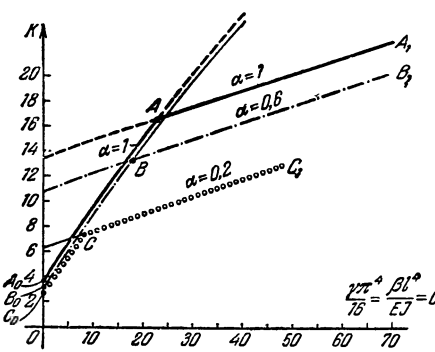


Рис. 4-80.

критическая сила растет, и величину k следует брать из графика на рис. 4-80, где β — коэффициент упругого основания ($кГ/см^2$), равный упругому отпору стоек и раскосов в узле, деленному на длину панели. Уравнения отрезков на рис. 4-80, апроксимируемых прямыми:

$$\left.\begin{aligned} A_0A:&\quad k = 3{,}58 + 0{,}52c,\\ AA_1:&\quad k = 13{,}32 + 0{,}135c,\\ C_0C:&\quad k = 2{,}59 + 0{,}63c,\\ CC_1:&\quad k = 6{,}15 + 0{,}14c. \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}270)$$

Точки A, B и C определяют переход от выпучивания по одной полуволне к более опасному иногда выпучиванию по двум полуволнам.

Для жестко опертой на концах балки постоянного сечения длиной l, лежащей на упругом основании (с коэффициентом постели β) и сжимаемой постоянной силой, $N_{кр}$ определяется по формуле (4-269), причем

$$k = \pi^2\left(n^2 + \frac{c}{\pi^4 n^2}\right) \approx \pi^2 + 1{,}93\sqrt{c}, \quad c = \frac{\beta l^4}{EJ}; \tag{4-271}$$

если же балка не имеет концевых опор, то при $P_{кр} > P_э$ и $P_{кр} < P_э$ соответственно:

$$k \approx 1{,}07\sqrt{c} \text{ и } k \approx \sqrt{8 \cdot 10^{-6}c^2 + c}, \tag{4-272}$$

где $P_э = \pi^2 EJ : l^2$.

В том случае, когда балка лежит не на сплошном основании, а на отстоящих на $a = \text{const}$ упругих опорах, можно пользоваться формулами (4-271) и (4-272), заменяя коэффициент упругой опоры c на βa.

§ 4-38. Кольца и арки

Для круговых колец и арок постоянного сечения дифференциальное уравнение продольно-поперечного изгиба и его интеграл имеют вид (рис. 4-62):

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2v}{d\alpha^2} + n^2 v = \frac{MR^2}{EJ}, \quad n^2 = 1 + \frac{NR^2}{EJ}, \\ &M = M_0 + Q_0 R\sin\alpha + N_0 R(1 - \cos\alpha) + q_{r0}R^2(\cos\alpha - 1); \end{aligned}\right\} \tag{4-273}$$

$$v = v_0\cos n\alpha + \frac{\varphi_0 R + u_0}{n}\sin n\alpha + \frac{a}{n^2}(1 - \cos n\alpha) + \\ + \frac{b\left(\sin\alpha - \frac{1}{n}\sin n\alpha\right)}{n^2 - 1} + \frac{c(\cos\alpha - \cos n\alpha)}{n^2 - 1}; \tag{4-274}$$

$$a = \frac{R^2}{EJ}(M_0 + N_0 R - q_{r0}R^2), \quad b = \frac{R^3}{EJ}Q_0, \quad c = \frac{R^3}{EJ}(-N_0 + q_{r0}R). \tag{4-275}$$

Для двухшарнирной арки (рис. 4-81), беря начало координат в точке O, имеем $v_0 = u_0 = M_0 = 0$; из условия $v = 0$ при $\alpha = \beta$ по (4-274) находим:

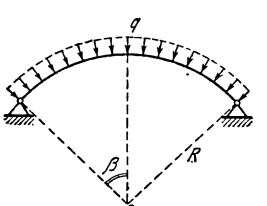


Рис. 4-81.

$$\frac{\varphi_0 R}{n}\sin n\beta = 0,$$

откуда $n\beta = \pi$, и из (4-273) получаем формулу критической силы

$$N_{кр} = \left(\frac{\pi^2}{\beta^2} - 1\right)\frac{EJ}{R^2}; \tag{4-276}$$

при $\beta = \pi$ получаем $N_{кр}$ для кольца:

$$N_{кр} = \frac{3EJ}{R^2} = qR. \tag{4-277}$$

Для бесшарнирной круговой арки

$$N_{кр} = qR = k\frac{EJ}{R^2}, \qquad k = \frac{6{,}38}{\alpha\sin 0{,}25\alpha\left(1{,}066 + 0{,}283\dfrac{\sin 0{,}75\alpha}{\sin\alpha}\right)}. \tag{4-278}$$

Для двухшарнирной параболической арки интенсивность равномерно распределенного по пролету l давления равна $q_{кр} = EJk : l^3$, где при стреле подъема f и $a = 0{,}5l$:

$$k \approx \frac{32\pi^2 (f : a)}{\left(1+\frac{7}{3}\frac{f^2}{a^2}\right)^{3/2}+\left(1+1{,}118\frac{f^2}{a^2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\frac{f^2}{a^2}\right)^{1/2}}. \qquad (4\text{-}279)$$

Для бесшарнирной параболической арки (при тех же обозначениях, что и для двухшарнирной арки)

$$k \approx \frac{183\sqrt{l}\,(6+7{,}03l)}{(1+2{,}29l)\left[\left(1+\frac{7}{3}l\right)^{1/2}\left(1{,}35+1{,}1l\right)+\left(1+\frac{1}{3}l\right)^{1/2}\left(2+0{,}58l\right)\right]},$$

где $l = \frac{f^2}{a^2}$. (4-280)

§ 4-39. Пластинки и оболочки

Критическая сила для свободно опертой по всем краям прямоугольной *пластинки*, сжатой вдоль оси x (рис. 4-82):

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{b^2}k = \frac{\pi^2 D}{a^2}k_1. \qquad (4\text{-}281)$$

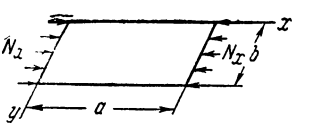


Рис. 4-82.

Значения коэффициента k даны в табл. 4-39; D — цилиндрическая жесткость, т. е. $D = Eh^3 : 12\,(1-\mu^2)$, где h — толщина пластинки.

Таблица 4-39. **Коэффициенты k для формулы (4-271)**

a/b	0,4	0,6	0,8	1,0	1,41	2
k	8,41	5,14	4,2	4,0	4,47	4,0

При сжатии вдоль обеих осей x и y и $N_{кр} = N_x m^2 + N_y a^2$

$$N_{кр} = \pi^2 D a^2 \left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2; \qquad (4\text{-}282)$$

при $a = b$ и $N_x = N_y = N_{кр}$

$$N_{кр} = 2\frac{\pi^2 D}{a^2}. \qquad (4\text{-}283)$$

Осевое сжатие тонкой цилиндрической *оболочки* может вызвать упругую потерю устойчивости; критическая сила:

а) при выпучивании оболочки в целом

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 EJ}{(\mu l)^2} = \frac{\pi^3 Eha^3}{(\mu l)^2}; \qquad (4\text{-}284)$$

б) при местном выпучивании стенки

$$N_{кр} = \alpha \frac{Eh^2}{a\sqrt{3(1-\mu^2)}}, \qquad (4\text{-}285)$$

где определяемые в опыте значения коэффициента α лежат в пределах: 0,3—0,6; h — толщина стенки; a — радиус цилиндра.

Глава 4-8

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

§ 4.40. Косой изгиб и внецентренное сжатие

Формула нормального напряжения в поперечном сечении при изгибе в двух плоскостях (рис. 4-83) (косой изгиб):

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z; \qquad \left.\begin{array}{l} M_z = M\cos\alpha; \\ M_y = M\sin\alpha; \end{array}\right\} \qquad (4\text{-}286)$$

при этом J_z и J_y — главные центральные моменты инерции площади поперечного сечения. Направления осей z и y выбираются так, чтобы

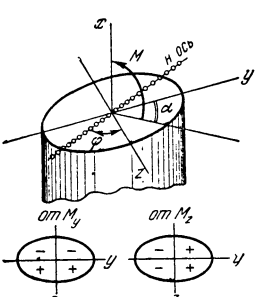


Рис. 4-83.

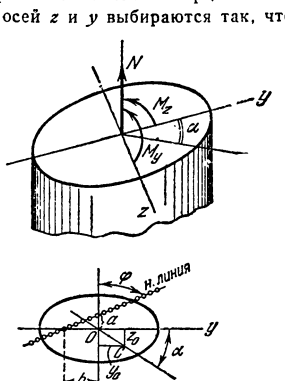


Рис. 4-84.

в 1-й четверти моменты M_z и M_y вызывали деформацию растяжения, оцениваемую знаком плюс. Положение нейтральной оси:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha \frac{J_z}{J_y}. \qquad (4\text{-}287)$$

При подборе сечений, оконтуриваемых прямоугольником, расчет по наибольшему напряжению можно свести к применению формулы (рис. 4-83):

$$W_z = \frac{M}{[\sigma]}(\cos\alpha + c\sin\alpha), \qquad (4\text{-}288)$$

где W_z — наибольший момент сопротивления, $c = W_z : W_y$; для прямоугольника $c = h:b$ (сторона b параллельна оси z); для двутавра ($W_z > W_y$) $c \approx 6 \div 15$; для швеллера $c \approx 4 \div 11$. Сечения правильной формы (круг, кольцо, правильные многоугольники) не испытывают косого изгиба, так как $J_z = J_y$. При внецентренном растяжении (сжатии) (рис. 4-84) нормальное напряжение в поперечном сечении, если оно не тонкостенно и не гибко:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z}y + \frac{M_y}{J_y}z; \qquad (4\text{-}289)$$

правило знаков для составляющих напряжения от моментов то же, что и по рис. 4-83; первый член берется с плюсом, если N — растягивающая сила. Моменты M_z и M_y получаются в результате приведения силы N к центру тяжести сечения (точке O); эксцентриситеты силы N (рис. 4-84) — координаты силовой точки — равны:

$$z_0 = \frac{M_y}{N}, \qquad y_0 = \frac{M_z}{N}. \qquad (4\text{-}290)$$

Положение нулевой линии определяется отрезками на осях координат a и b по уравнениям:

$$az_0 = -i_y^2, \quad by_0 = -i_z^2, \qquad (4\text{-}291)$$

где i_y и i_z — радиусы инерции поперечного сечения; при этом остается в силе формула (4-287) для $\operatorname{tg}\varphi$.

Ядром поперечного сечения называется область сечения, обладающая тем свойством, что сила N, приложенная в ядре, вызывает во всем сечении напряжение одного закона; если силовые точки (z_0, y_0) перемещать по контуру ядра, то соответствующие нулевые линии будут касаться поперечного сечения; если силовая точка лежит вне ядра, нулевая линия пересекает поперечное сечение.

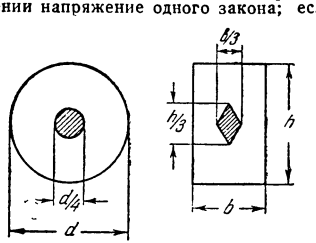


Рис. 4-85.

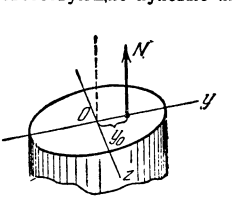


Рис. 4-86.

Ядро у круга занимает среднюю четверть; у тонкого кольца — среднюю половину; у прямоугольника — среднюю треть (рис. 4-85). В случае,

если сила N имеет эксцентриситет по одной из главных осей, например $z_0=0$, то формула (4-289) переходит в

$$\sigma=\frac{N}{W_z'}(y_0-b),\quad W_z'=\frac{J_z}{y},\quad y_0=\frac{M_z}{N},\quad b=-\frac{i_z^2}{y},\qquad (4\text{-}292)$$

где y — координата точки, для которой вычисляют σ. Если σ определяют в крайней точке сечения, то $W_z'=W_z$, b — *ядровое расстояние* и $N(y-b)$ — *ядровый момент;* знаки b и y всегда обратны; знак y_0 согласуется с направлением оси y; на рис. 4-86 положительные y и y_0 — вправо от точки O.

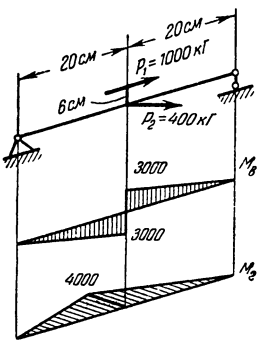


Рис. 4-87.

На рис. 4-87 представлена деталь круглого сечения ($d=4$ *см*), подверженная внецентренному действию в вертикальной плоскости силой P_1 и изгибу в горизонтальной плоскости силой P_2. Для определения по формуле (4-289) напряжения в середине пролета построены эпюры M в вертикальной и горизонтальной плоскостях. Ввиду того, что $J_z=J_y$, переходим к равнодействующему моменту $M=\sqrt{3000^2+4000^2}=5000$ *кГ·см*.

Следовательно,

$$\sigma_{\text{макс}}=\frac{N}{F}\pm\frac{M}{W}=\frac{1000}{12{,}56}\pm\frac{5000}{6{,}28},$$

$$\sigma_{\text{макс}}=840\ кГ/см^2.$$

Формулы (4-289) и (4-292) видоизменяются при расчете *гибкого* стержня ($\lambda>50$; см. гл. 4-7). Расчетный изгибающий момент $M_{\text{расч}}$ от совместного действия силы N, приложенной с эксцентриситетом e, и момента от поперечной нагрузки M_0 определяется по формуле

$$M_{\text{расч}}=M_0+Ne+\frac{Nv_0}{1\pm\beta},\qquad (4\text{-}293)$$

где v_0 — прогиб в расчетном сечении $\beta=N:N_{\text{кр}}$; $+\beta$ при растяжении; $-\beta$ при сжатии. Более точно расчет должен выполняться путем использования общих уравнений продольно-поперечного изгиба (4-254) — (4-256).

Для учета влияния тонкостенности (см. § 4-21) в правую часть формулы (4-289) должен добавляться четвертый член, учитывающий действие бимомента B и определяемый по формуле (4-143): $\frac{B}{J_\omega}\omega$.

§ 4-41. Кручение с изгибом

Для бруса круглого сечения расчетная формула будет:

$$\sigma_{\text{расч}}=\frac{M_{\text{расч}}}{W}\leqslant[\sigma],\qquad (4\text{-}294)$$

где $W=\frac{\pi r^3}{4}$, а $M_{\text{расч}}$ находится в зависимости от принятой теории

прочности:

$$\left.\begin{aligned} M_{\text{I}} &= 0{,}5\,M_{\text{изг}} + 0{,}5\,M_{\text{III}}; \quad M_{\text{II}} = \frac{1-\mu}{2}\,M_{\text{изг}} + \frac{1+\mu}{2}\,M_{\text{III}}; \\ M_{\text{III}} &= \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{к}}^2}; \qquad M_{\text{V}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + 0{,}75\,M_{\text{к}}^2}, \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}295)$$

где $M_{\text{изг}}$ и $M_{\text{к}}$ — изгибающий и крутящий моменты в опасном сечении; индексы указывают на: I — теорию $\sigma_{\text{макс}}$, II — теорию $\varepsilon_{\text{макс}}$; III — теорию $\tau_{\text{макс}}$; V — теорию $\tau_{\text{окт}}$. Для брусьев произвольной формы:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\text{I}} &= 0{,}5\sigma_{\text{и}} + 0{,}5\sigma_{\text{III}}, \\ \sigma_{\text{II}} &= \frac{1-\mu}{2}\,\sigma_{\text{и}} + \frac{1+\mu}{2}\,\sigma_{\text{III}}, \\ \sigma_{\text{III}} &= \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 4\tau_{\text{к}}^2}, \\ \sigma_{\text{V}} &= \sqrt{\sigma_{\text{и}}^2 + 3\tau_{\text{к}}^2}. \end{aligned}\right\} \quad (4\text{-}296)$$

Здесь $\sigma_{\text{и}}$ и $\sigma_{\text{к}}$ — нормальное напряжение изгиба и касательное напряжение кручения в опасной точке. Обычно применяют формулы M_{V}, σ_{V}. При кручении с растяжением используют формулы (4-296) с заменой $\sigma_{\text{и}}$ на $\sigma_{\text{раст}} = \frac{N}{F}$. Допустим, что требуется подобрать круглое сечение коленчатого вала, подверженного действию двух сил 50 *кГ*, приложенных на концах шатуна, расчетное положение которого дано на рис. 4-88; $[\sigma] = 280$ *кГ/см*^{2}. Расчетный момент

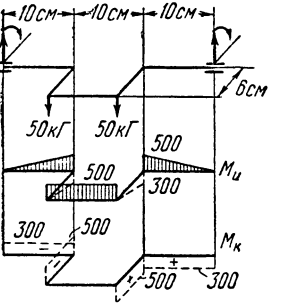


Рис. 4-88.

$$M_{\text{V}} = \sqrt{500^2 + 0{,}75 \cdot 300^2} = 563 \text{ кГ} \cdot \text{см}.$$

По формуле (4-294) $W = 2$ *см*^{3} и $R = 1{,}35$ *см*.

Литература. См. гл. 4-1, стр. 161.

Глава 4-9

ПРУЖИНЫ И РЕССОРЫ

§ 4-42. Цилиндрическая пружина

Диаметр стержня $d = 2r$ пружины, сжимаемой силой P, находят по формуле

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{5PR}{[\tau]}} \quad (4\text{-}297)$$

(где R — радиус витка) с проверкой напряжения τ по уравнению

$$\tau = \frac{2PR}{\pi r^3}\left(1 + \frac{r}{2R}\right) \leq [\tau]. \quad (4\text{-}298)$$

Осадка пружины при числе витков n:

$$\Delta L = \frac{4PR^3 n}{Gr^4}. \quad (4\text{-}299)$$

§ 4-43. Коническая пружина

Диаметр стержня пружины находится по формуле (4-297), причем R – наибольший радиус конуса: осадка

$$\Delta L = \frac{P(R^2 + R_1^2)(R + R_1)n}{Gr^4}, \qquad (4\text{-}300)$$

где R_1 — наименьший радиус конуса. Формула (4-300), строго говоря, справедлива для пружины с постоянным шагом.

Для пружин с постоянным углом наклона полученную по (4-300) величину ΔL следует умножить на $\frac{2}{3}\frac{1+c+c^2}{1+c^2}$, где $c = R_1 : R_2$.

Литература. Расчеты на прочность в машиностроении, под ред. С. Д. Пономарева, т. I, гл. XIII, Машгиз, 1956.

Глава 4-10

ТОЛСТОСТЕННЫЕ СОСУДЫ

§ 4-44. Расчеты в упругой стадии

При действии осесимметричной нагрузки на *цилиндр* нормальные тангенциальное σ_t и радиальное σ_r напряжения (рис. 4-89) определяются по формуле

$$\sigma_{t/r} = \frac{p_a - p_b\beta^2}{\beta^2 - 1} \pm \frac{(p_a - p_b)\,b^2}{r^2(\beta^2 - 1)}; \qquad (4\text{-}301)$$

p_b и p_a — внешнее и внутреннее радиальные давления; $\beta = \frac{b}{a}$; нормальное осевое напряжение в сосуде с донышками:

$$\sigma_z = \frac{p_a - p_b\beta^2}{\beta^2 - 1}, \quad \beta = \frac{b}{a}. \qquad (4\text{-}302)$$

При сравнительной тонкостенности $\frac{a}{b} > 0{,}9$ формулы упрощаются:

Рис. 4-89.

$$\sigma_t = 2\sigma_z = \frac{p_a - p_b}{\delta}\,a, \qquad (4\text{-}303)$$

где $\delta = (b - a)$ — толщина стенки.

Радиальное перемещение точки, отстоящей от центра на r:

$$u = \frac{r}{E(\beta^2 - 1)}\left[(1-\mu)(p_a - p_b\beta^2) + (1+\mu)\frac{(p_a - p_b)\,b^2}{r^2}\right] - \frac{\mu\delta_z \cdot r}{E}. \qquad (4\text{-}304)$$

При расчете на прочность цилиндра, испытывающего внутреннее давление, обращаются к следующим формулам, построенным на базе одной из теорий прочности: II ($\varepsilon_{\text{макс}}$), III ($\tau_{\text{макс}}$) или V ($\tau_{\text{окт}}$):

$$\sigma^{\text{II}}_{\text{расч}} = p_a\frac{1{,}3\beta^2 + 0{,}4}{\beta^2 - 1}, \quad \sigma^{\text{III}}_{\text{расч}} = p_a\frac{2\beta^2}{\beta^2 - 1}, \quad \sigma^{\text{V}}_{\text{расч}} = p_a\frac{\beta^2\sqrt{3}}{\beta^2 - 1}. \qquad (4\text{-}305)$$

Для цилиндра, скрепленного из двух составляющих цилиндров при первоначальной разности их радиусов в контакте $b_1 - a = \Delta$ (рис. 4-90), взаимное давление равно

$$p = \frac{E \cdot \Delta}{2b_1} \frac{(\beta_1^2 - 1)(\beta^2 - 1)}{(\beta_1^2 \beta^2 - 1)}, \tag{4-306}$$

где $\beta = b : a$; $\beta_1 = b_1 : a_1$; чтобы установить напряжение скрепления после определения p, составляющие цилиндра рассчитываются по формуле (4-301): внешний цилиндр для действия $p_a = p$, внутренний — для $p_b = p$.

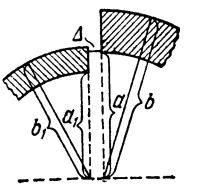


Рис. 4-90.

Для *сферического* толстостенного *сосуда*

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= A + B, \\ \sigma_r &= A - 2B, \\ A &= \frac{p_a - p_b \beta^3}{\beta^3 - 1}, \\ B &= \frac{(p_a - p_b)\, b^3}{2r^3 (\beta^3 - 1)} \end{aligned}\right\} \tag{4-307}$$

Радиальное перемещение

$$u = \frac{r}{E(\beta^3 - 1)} \left[(1 - 2\mu)(p_a - p_b \beta^3) + (1 + \mu) \frac{(p_a - p_b) b^3}{r^3} \right]. \tag{4-308}$$

При тонкостенности сферы

$$\sigma_t = \frac{p_a - p_b}{2\delta} a. \tag{4-309}$$

§ 4-45. Расчеты в пластической и упруго-пластической стадиях

При переходе цилиндра по всей толще в пластическое состояние нормальные тангенциальные σ_t и радиальное σ_r напряжения составляют:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_t &= k\sigma_т + \sigma_r, \\ \sigma_r &= -p_a + k\sigma_т \ln \frac{r}{a} = -p_b + k\sigma_т \ln \frac{b}{r}, \end{aligned}\right\} \tag{4-310}$$

где $\sigma_т$ — предел текучести, $k = 1$ для III теории прочности ($\tau_{макс}$) и $k = 1{,}15$ для V теории прочности ($\tau_{окт}$). При действии только внутреннего давления p_a ($p_b = 0$) предел пластического сопротивления равен:

$$p_{a,\,пл} = k\sigma_т \ln \beta. \tag{4-311}$$

Если в состояние пластичности переходит цилиндр лишь по толщине c, причем $a < c < b$, взаимное давление q упругой и пластической зон находится по формуле (рис. 4-90)

$$q = \sigma_{упр} \frac{\beta_y^2 - 1}{2\beta_y^2}; \quad \beta_y = \frac{b}{c}, \tag{4-312}$$

где $\sigma_{упр}$ — предел упругости, принимаемый примерно равным $\sigma_т$; после определения q внешняя область (упругая) рассчитывается по (4-301), внутренняя (пластическая) — по (4-310).

Литература. См. гл. 4-1, стр. 161.

Глава 4-11

ДИНАМИЧЕСКИЕ НАПРЯЖЕНИЯ

§ 4-46. Колебания систем с одной степенью свободы

Дифференциальное уравнение малых линейных колебаний без затухания и его интеграл:

$$v'' + \omega^2 v = \frac{P(t)}{m}; \tag{4-313}$$

$$v = \frac{1}{m\omega}\int_0^t P(t_1)\cdot \sin\omega(t-t_1)\,dt_1 = v_0\cos\omega t + \frac{v_0'}{\omega}\sin\omega t + \frac{P(0)}{m\omega^2}(1-\cos\omega t) + \frac{P'(0)}{m\omega^3}(\omega t - \sin\omega t) + \ldots, \tag{4-314}$$

где v_0, v_0', $P(0)$, $P'(0)\ldots$ — начальные параметры: путь, скорость, внешняя сила и ее производные. Круговая частота колебаний и период T связаны формулой

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{v_{\text{ст}}^{(P)}}} = 2\pi n, \tag{4-315}$$

где $c = \frac{1}{\delta}$ и m — соответственно жесткость упругой системы (сила, вызывающая единичное перемещение) и колеблющаяся масса; $v_{\text{ст}}^{(P)}$ — статическое перемещение системы от веса $P = mg$; n — частота колебаний в герцах.

Ответ (4-314) можно представить в виде *):

$$v = \frac{1}{\omega^2 m}\left\{\left[P(t) - \frac{P''(t)}{\omega^2} + \frac{P^{(IV)}(t)}{\omega^4} - \ldots\right] - \sin\omega t\left[P'(0) - \frac{P'''(0)}{\omega^3} + \ldots\right] - \cos\omega t\left[P(0) - \frac{P''(0)}{\omega^2} + \ldots\right]\right\}, \tag{4-316}$$

в котором опущены два первых слагаемых выражения (4-314). Динамические коэффициенты β в частных случаях действия нагрузки $P(t)$ приведены в табл. 4-40. В случае сильного импульса со спадом нагрузки по рис. 4-91 динамический коэффициент находится по формуле

$$\left.\begin{aligned} &\beta_{\text{дин}} = \alpha\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + \\ &+ A\cos\omega t + (B + D)\sin\omega t, \\ &A = 0{,}5\,\frac{S}{P}\,\omega^2\Delta\tau - \alpha, \quad B = \frac{\alpha}{\omega\tau}, \\ &D = \frac{S}{P}\,\omega, \qquad S = P\Delta\tau. \end{aligned}\right\} \tag{4-317}$$

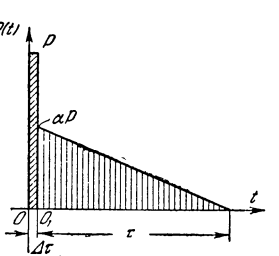


Рис. 4-91.

Максимум $\beta_{\text{дин}}$ наступает при $\omega t_{\text{кр}} = \arccos\frac{B+D}{R} + \arccos\frac{B}{R}$, где $R = \sqrt{A^2 + (B+D)^2}$.

Для случая малых колебаний кручения формулы (4-313) — (4-316) остаются в силе с заменой: массы m на момент инерции массы J_m,

*) Шарбонье, Memorial de l'artillerie française, т. III, 1924.

линейной жесткости $c = \frac{P}{v^{(P)}_{ст}}$ — на жесткость вращения $c_1 = \frac{M}{\varphi^{(M)}_{ст}}$, линейного пути v — на угловой путь φ, внешней силы $P(t)$ — на внешний

Таблица 4-40. **Динамические коэффициенты β**

Уравнение $P(t)$	Формулы β
Импульс $P\Delta t$	$\beta_{макс} = \omega\Delta t = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$, $\Delta t \ll T$
$P = \text{const}$	$(1 - \cos\omega t)_{макс} = 2$
$tP'(0)$	$1 - \frac{\sin\omega t}{\omega t}$
$P\cos\theta t$, $T_1\theta = 2\pi$	$\frac{\cos\theta t - \cos\omega t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$, при $\theta = \omega$ $\beta_{макс} = \frac{\omega t}{2}$
$P\sin\theta t$, $T_1\theta = 2\pi$	$\frac{\sin\theta t - \frac{\theta}{\omega}\sin\omega t}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}}$, при $\theta = \omega$ $\beta_{макс} = \frac{\omega t}{2}$

момент $M(t)$. При наличии сил сопротивлений колебаниям, пропорциональных скорости движения, динамический коэффициент равен:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2\theta^2}{\pi^2\omega^2}}}, \qquad (4\text{-}318)$$

где θ — частота периодического возмущения; λ — логарифмический

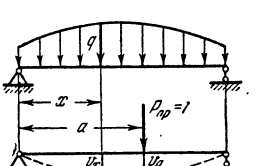


Рис. 4-92.

декремент затухания, равный 0,05—0,6 для железнодорожных мостов и железобетонных конструкций, 0,02—0,30 — для автодорожных мостов и

деревянных конструкций. Замену распределенной массы весом $\int_0^l q\,dx$ сосредоточенной массой веесом $P_{\text{пр}}$ можно выполнить по формуле

$$P_{\text{пр}} = \frac{\int_0^l q v_x^2\,dx}{v_a^2}, \tag{4-319}$$

где v_x и v_a — перемещения (рис. 4-92) соответственно произвольной точки и точки приведения от действия силы $P=1$; такая замена допускает использование формул (4-313) — (4-317).

§ 4-47. Колебания систем с n степенями свободы

Собственные частоты колебаний находят из условия обращения в нуль детерминанта системы n однородных уравнений относительно инерционных сил X:

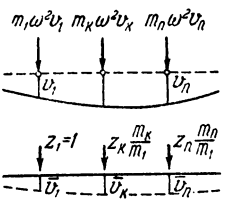


Рис. 4-93.

$$\begin{gathered} X_1\delta_{k1} + X_2\delta_{k2} + \ldots \\ \ldots + X_k\left(\delta_{kk} - \frac{1}{m_k\omega^2}\right) + \ldots \\ \ldots + X_n\delta_{kn} = 0 \end{gathered} \tag{4-320}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n),$$

где сила X_k определяется произведением массы m_k на квадрат частоты ω^2 и амплитуду перемещения v_k, а δ_{kn} — статическое перемещение по направлению X_k от силы $X_n = 1$.

Определение частот с одновременным выяснением формы колебаний удобно выполнять последовательными приближениями с помощью формул *) (рис. 4-93)

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m_1\bar{v}_1}}, \qquad z_k = \bar{v}_k : \bar{v}_1; \tag{4-321}$$

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_1 &= z_1\delta_{11} + z_2\delta_{12}\frac{m_2}{m_1} + \ldots + z_n\frac{m_n}{m_1}\delta_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{v}_k &= z_1\delta_{k1} + \ldots + z_n\frac{m_n}{m_1}\delta_{kn}. \end{aligned}\right\} \tag{4-322}$$

Величинами z_k вначале задаются, а затем их уточняют с помощью (4-321). После определения 1-й частоты (и 1-й формы) переход

*) См. статью «Динамика сооружений» во II томе «Технического справочника железнодорожника», стр. 183—196, 1950.

к последующим частотам должен сопровождаться соблюдением условия ортогональности. Задачу можно решить как аналитически, так и графоаналитически. Пусть, например, требуется найти частоты колебаний консоли переменного сечения, несущей равномерно распределенную нагрузку (рис. 4-94), которую приближенно представим системой с двумя степенями свободы. Сосредоточенные массы в точках деления при использовании формулы (4-176) будут:

$$m_1 = 0{,}283 q_0 l,$$

$$m_2 = \frac{0{,}348 q_0 l}{2}(2 \cdot 1{,}75 + 0{,}36 \cdot 1 + 0{,}36 \cdot 2{,}67) = 0{,}84 q_0 l,$$

$$m_3 = 0{,}572 q_0 l.$$

Расчетное состояние показано на рис. 4-94, *а*, причем $\frac{m_2}{m_1} = 2{,}96$; соответствующие моменты:

$$M_2 = 1 \cdot 0{,}5l;$$

$$M_3 = 1 \cdot l + 2{,}96 z_3 \cdot 0{,}5l,$$

а кривизны (рис. 4-94, *б*) $q_{\Phi_2} = \frac{M_2}{2{,}5EJ_1}$, $q_{\Phi_3} = \frac{M_3}{5{,}33EJ_1}$. Переход к сосредоточенным фиктивным силам по формуле (4-176) даст (рис. 4-94, *в*):

$$P_{\Phi_3} = 0{,}174l(q_{\Phi_3} + 0{,}36 q_{\Phi_2}) = \frac{0{,}174l^2}{EJ_1}(0{,}260 + 0{,}278 z_3),$$

$$P_{\Phi_2} = \frac{0{,}174l^2}{EJ_1}(0{,}467 + 0{,}1 z_3).$$

Прогибы составляют:

$$\bar{v}_2 = \frac{0{,}174l^3}{EJ_1}(0{,}130 + 0{,}139 z_2),$$

$$\bar{v}_1 = \frac{0{,}174l^3}{EJ_1}(0{,}493 + 0{,}328 z_2).$$

Используя из (4-321) отношение $z_2 = \bar{v}_2 : \bar{v}_1$, находим для первых двух форм колебаний: $z_2' = 0{,}29$; $z_2'' = -1{,}37$; по ординатам $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ построены 1-я и 2-я формы колебаний (рис. 4-94, *г*). Частоты, вычисленные по (4-321), равны:

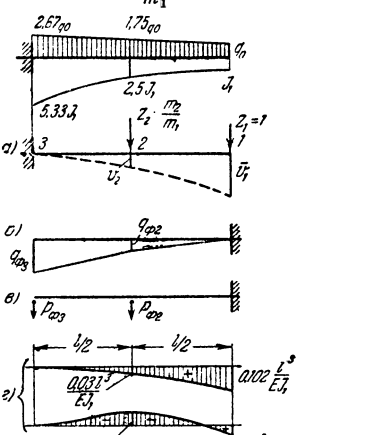


Рис. 4-94.

$$\omega_1 = \frac{5{,}9}{l^2}\sqrt{\frac{gEJ_1}{q_0}}; \qquad \omega_2 = \frac{21{,}7}{l^2}\sqrt{\frac{gEJ_1}{q_0}}.$$

Лучшим приближением было бы деление балки на три-четыре участка с выполнением того же порядка действий.

§ 4-48. Удар

Динамический коэффициент при ударе груза P по упругой системе (вес которой, приведенный к месту удара, равен $G_{\text{пр}}$) составляет:

$$\beta_{\text{дин}} = 1 - \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega y_{\text{ст}}^{(P)}} \sin \omega t; \qquad (4\text{-}323)$$

его максимум при $\operatorname{tg}\omega t = -\dfrac{v_0}{\omega y_{ст}^{(P)}}$

$$\beta_{макс} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{ст}^{(P+G_{пр})}}}, \tag{4-324}$$

где h — высота падения; если задана не высота падения, а скорость v' сближения груза P с системой, то $2h$ заменяется на $\dfrac{(v')^2}{g}$. Величину $G_{пр}$ берут по формуле (4-319). Если груз P не падает извне на систему, а движется с ней, причем движение в каком-либо сечении системы внезапно останавливается (например, торможение каната подъемника при его движении вниз), то

$$\beta_{макс} = \sqrt{\frac{(v')^2}{g y_{ст}^{(P+G_{пр})}}}. \tag{4-325}$$

Динамический коэффициент при крутящем ударе равен:

$$\beta_{макс} = \frac{\varphi'}{\omega_{кр}\varphi_{ст}^{(M+M_{пр})}}, \tag{4-326}$$

где $\omega_{кр}$ — частота кручения; φ — угол кручения; $\varphi' = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Литература. 1. См. гл. 4-1, стр. 161. 2. Тимошенко С. П., Теория колебаний в инженерном деле, Физматгиз, 1959.

ОТДЕЛ ПЯТЫЙ

ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

В. А. Зиновьев

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Латинский алфавит

A — расстояние между центрами колес (*мм*).

$A_д$ — работа движущей силы (*кГ · м*).

$A_{изб}$ — избыточная работа в цикле установившегося движения звена приведения (*кГ · м*).

A_c — расстояние между центрами долбяка и колеса, нарезаемого со сдвигом долбяка (*мм*); работа сил сопротивления (*кГ · м*).

A_0 — расстояние между центрами колес, нарезанных без сдвига исходного контура (*мм*).

A_{0c} — расстояние между центрами долбяка и колеса, нарезаемого без сдвига долбяка (*мм*).

a_B — ускорение точки B (*м/сек*^{2}).

a_B^n — нормальное ускорение точки B (*м/сек*^{2}).

a_B^t — тангенциальное ускорение точки B (*м/сек*^{2}).

$a_{BB_i}^k$ — кориолисово ускорение в движении точки B относительно точки B_i (*м/сек*^{2}).

$a_{BB_i}^r$ — ускорение точки B в движении относительно точки B_i (относительное ускорение) (*м/сек*^{2}).

C — коэффициент, принимаемый на основании табл. 5-3 при определении абсолютной вязкости (*кГ·сек·град*^{3}*/м*^{2}).

c — коэффициент радиального зазора в зубчатом зацеплении; угловой коэффициент прямой, заменяющей рабочий участок механической характеристики асинхронного электродвигателя (*кГ · м · сек*).

c_{km} — косинус угла между направлениями k и m.

D — диаметр вкладыша подшипника (*мм*).

d — диаметр цапфы вала (*мм*).

$d_д$ — диаметр делительного цилиндра червяка (*мм*).

E_t — вязкость по Энглеру при температуре смазки $t°$.

e — основание натуральных логарифмов; эксцентриситет кулачкового механизма с поступательно движущимся толкателем и роликом на конце (*мм*).

$\mathbf{e}_i$ — орт вектора $\mathbf{l}_i$.

$\dot{\mathbf{e}}_i$ — первая производная орта $\mathbf{e}_i$ по времени.

$\ddot{\mathbf{e}}_i$ — вторая производная орта $\mathbf{e}_i$ по времени.

$\mathbf{e}_i'$ — орт, полученный поворотом на 90° орта $\mathbf{e}_i$ в положительную сторону.

$\mathbf{e}_i''$ — орт, полученный поворотом на 90° орта $\mathbf{e}_i'$ или на 180° орта $\mathbf{e}_i$ в положительную сторону.

F — сила трения (*кГ*).

F_{km} — сила трения звена k относительно звена m (*кГ*).

$F_{\text{изб}}$ — избыточная площадь диаграммы сил (моментов сил) движущих и сопротивления (*мм*²).

f — коэффициент высоты головки зуба; коэффициент трения скольжения.

$f_г$ — коэффициент гидродинамического трения.

f_0 — условный коэффициент трения скольжения подшипника качения, отнесенный к поверхности цапфы вала.

f' — условный коэффициент трения скольжения клиновой поверхности.

h_i — плечо силы P_i (*м*).

h_0 — минимальный зазор между цапфой и вкладышем в условиях гидродинамического трения (μ).

$J_м$ — момент инерции махового колеса (*кГ · м · сек*²).

$J_п$ — момент инерции приведенной массы (приведенный момент инерции) (*кГ · м · сек*²).

J_x — момент инерции массы звена относительно оси x (*кГ · м · сек*²).

J_{xy} — центробежный момент инерции массы звена относительно осей x и y (*кГ · м · сек*²).

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты осей x, y, z пространственной системы координат.

i_c — передаточное отношение от долбяка к нарезаемому колесу.

i_{km} — передаточное отношение от звена k к звену m.

i_{km}^H — передаточное отношение от колеса k к колесу m относительно водила H планетарного механизма.

k — действительное число устанавливаемых сателлитов планетарного механизма; коэффициент запаса, вводимый при определении момента двигателя; коэффициент запаса сцепления в фрикционных передачах; коэффициент теплоотдачи от металла к воздуху (*кГ · м/м² · сек · град*); коэффициент трения качения (*см*); отношение угла поворота кривошипа шарнирного четырехзвенника при прямом ходе коромысла к углу поворота кривошипа при обратном ходе коромысла; число ходов резьбы червяка; число цевок ведущего звена мальтийского механизма.

k_0 — теоретическое число сателлитов планетарного механизма из условия собираемости без учета условия соседства.

k_1 — число сателлитов планетарного механизма, определяемое из условия соседства.

L — расстояние между центрами вращения кулачка и коромысла (*мм*).

l — длина коромысла кулачкового механизма; длина цапфы вала (*мм*).

l_{AB} — натуральный размер звена AB (*м*).

l_i — натуральный размер звена i (*м*).

$\mathbf{l}_k \cdot \mathbf{l}_m$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{l}_k$ и $\mathbf{l}_m$.

$\mathbf{l}_k \times \mathbf{l}_m$ — векторное произведение векторов $\mathbf{l}_k$ и $\mathbf{l}_m$.

$\dot{\mathbf{l}}_i$ — первая производная вектора $\mathbf{l}_i$ по времени.

$\ddot{\mathbf{l}}_i$ — вторая производная вектора $\mathbf{l}_i$ по времени.

$M_д$ — момент движущей силы (*кГ · м*).

$M_{д\,ср}$ — средний движущий момент на заданном интервале времени или угла поворота звена приведения (*кГ · м*).

$M_{и\,k}$ — момент инерционной пары, приложенной к звену k (*кГ · м*).

$M_н$ — номинальный движущий момент (*кГ · м*).

$M_п$ — момент приведенной силы (*кГ · м*).

$M_{пс}$ — момент приведенных сил полезного сопротивления (*кГ · м*).

$M_с$ — момент приведенных сил сопротивления (*кГ · м*).

$M_{с\,ср}$ — средний момент приведенных сил сопротивления на заданном интервале времени или угла поворота звена приведения (*кГ · м*).

$M_{тс}$ — момент приведенных сил трения (*кГ · м*).

$M_у$ — уравновешивающий момент (*кГ · м*).

M_F — момент силы трения (*кГ · м*).

M_k — момент силы, приложенной к звену k (*кГ · м*).

$M_k^и$ — идеальный (при отсутствии трения) момент, приложенный к звену k зубчатого механизма (*кГ · м*).

M_{km} — момент сил трения во вращательной паре km (*кГ·м*).

M_0 — условный момент, определяемый при замене рабочего участка механической характеристики асинхронного электродвигателя (*кГ · м*).

M_x, M_y, M_z — проекции вектора момента $\mathbf{M}$ на оси x, y, z неподвижной системы координат.

m — масса звена (*кГ · сек²/м*); модуль зубчатого зацепления (*мм*).

$m_п$ — приведенная масса (*кГ · сек²/м*).

$m_{пk}$ — масса противовеса, закрепленная на звене (*кГ·сек²/м*).

$m_{ср}$ — средний модуль зацепления, измеренный по средней начальной окружности конического зубчатого колеса (*мм*).

m_a — осевой модуль зацепления косозубого колеса (*мм*).

m_i — масса звена i (*кГ · сек²/м*).

m_n — модуль зацепления в нормальном сечении косозубого колеса, червяка и червячного колеса (*мм*).

m_s — модуль зацепления в торцовом сечении косозубого колеса (*мм*).

mod P — модуль вектора силы P.

n — число оборотов звена в минуту; число подвижных сторон замкнутого плоского векторного многоугольника.

$P_д$ — движущая сила (*кГ*).

$P_и X$ — сила инерции материальной точки X (*кГ*).

$P_и^n$, $P_и^t$ — нормальная (центробежная) и тангенциальная (касательная) силы инерции (*кГ*).

$P_п$ — приведенная сила (*кГ*).

$P_{пс}$ — сила полезного сопротивления (*кГ*).

$P_с$ — сила сопротивления (*кГ*).

$P_у$ — уравновешивающая сила (*кГ*).

P_{km} — сила воздействия звена k на звено m.

P_{km}^x, P_{km}^y, P_{km}^z — проекции вектора силы $\mathbf{P}_{km}$ на оси x, y, z неподвижной системы координат.

p — удельная нагрузка (*кГ/см²*).

Q — окружное усилие червяка, осевое усилие червячного колеса (*кГ*).

q — число модулей в делительном цилиндре червяка.

$R_{eд}$ — радиус окружности выступов долбяка (*мм*).

R_{ek} — радиус окружности выступов зубчатого колеса k (*мм*).

R_i — текущее значение радиуса-вектора теоретического профиля кулачка (*мм*).

R_{ik} — радиус окружности впадин зубчатого колеса k (*мм*).

R_0 — минимальное значение радиуса-вектора теоретического профиля кулачка (*мм*).

R_i' — текущее значение радиуса-вектора рабочего профиля кулачка (*мм*).

$r_{д}$ — радиус делительной окружности долбяка (*мм*).

$r_{дk}$ — радиус делительной окружности колеса k (*мм*).

$r_{пk}$ — радиус окружности, на которой закрепляется масса $m_{пk}$ противовеса (*мм*).

r_{ok} — радиус основной окружности колеса k (*мм*).

$r_{ср}$ — средний радиус винтовой резьбы (*мм*).

r_k — радиус начальной окружности колеса k (*мм*).

r_{km} — радиус цапфы вращательной пары km (*мм*).

r_{ok} — радиус основной окружности конического зубчатого колеса k на шаровой поверхности (*мм*).

r_k' — радиус начальной окружности конического колеса k на шаровой поверхности (*мм*).

S_1 — натяжение ведущей ветви нити или ремня (*кГ*).

S_2 — натяжение ведомой ветви нити или ремня (*кГ*).

s — путь точки приведения (*м*); разность диаметров вкладыша и цапфы (*μ*).

$s_д$ — толщина зуба по делительной окружности зубчатого колеса (*мм*).

s_0 — толщина зуба по основной окружности зубчатого колеса (*мм*).

s_i — текущее значение пути, проходимого толкателем кулачкового механизма (*мм*).

s_k — координата центра тяжести звена k (*мм*).

T — кинетическая энергия (*кГ · м*).

T — промежуток времени полного оборота ведущего звена мальтийского механизма (*сек*).

t — температура смазочного масла (*град*); шаг зубчатого зацепления (*мм*).

$t_{\text{д}}$ — промежуток времени движения креста мальтийского механизма (*сек*).

t_0 — шаг зубчатого зацепления по основной окружности (*мм*).

$t_{\text{п}}$ — промежуток времени покоя креста мальтийского механизма (*сек*).

t_a — шаг зубчатого зацепления в осевом сечении косозубого колеса (*мм*).

t_n — шаг зубчатого зацепления в нормальном сечении зубьев косозубого колеса, червяка и червячного колеса (*мм*).

t_s — шаг зубчатого зацепления в торцовом сечении косозубого колеса (*мм*).

t_0 — температура окружающей среды (*град*).

$v_{\text{п}}$ — скорость точки приведения (*м/сек*).

v_B — скорость точки B (*м/сек*).

v_{BB_i} — скорость точки B относительно точки B_i, расположенной под точкой B (*м/сек*).

w — число степеней свободы кинематической цепи.

$|\mathbf{X}|$ — модуль вектора $\mathbf{X}$.

X_i, Y_i, Z_i — проекции вектора $\mathbf{l}_i$ на оси x, y, z пространственной системы координат.

$|x|$ — модуль алгебраической величины x.

$\mathbf{x}_m$ — вектор амплитуды динамической неуравновешенности вращающегося звена.

x_m, y_m, z_m — проекции орта $\mathbf{e}_m$ на оси x, y, z пространственной системы координат.

$\dot{x}_m$, $\dot{y}_m$, $\dot{z}_m$ — первые производные по времени проекций орта $\mathbf{e}_m$ на оси x, y, z пространственной системы координат.

$\ddot{x}_m$, $\ddot{y}_m$, $\ddot{z}_m$ — вторые производные по времени проекций орта $\mathbf{e}_m$ на оси x, y, z пространственной системы координат.

$y(x)$ — переменная величина y, изменяющаяся в функции x.

z — число прорезей креста мальтийского механизма.

$z_{\text{д}}$ — число зубьев долбяка.

$z_{\text{пр}}$ — предельное минимальное число зубьев зубчатого колеса, при котором возможно эвольвентное зацепление.

$z_{\text{у}}$ — условное число зубьев косозубого колеса.

z_k — число зубьев зубчатого колеса k.

Греческий алфавит

α — угол зацепления в осевом сечении червяка или червячного колеса (*рад, град*); угол зубчатого зацепления (*рад, град*); угол обхвата круглого цилиндра нитью или шкива ремнем (*рад, град*).

$\alpha_{\text{п}}$ — угол между вектором $\mathbf{P}_{\text{п}}$ приведенной силы и вектором $v_{\text{п}}$ скорости точки приведения (*рад, град*).

$\alpha_{\text{с}}$ — станочный угол зацепления (*рад, град*).

α_i — текущее значение угла наклона радиуса-вектора теоретического профиля кулачка (*рад, град*).

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — углы наклона вектора $\mathbf{l}_i$ к осям x, y, z пространственной системы координат (*рад, град*).

α_n — угол зацепления в нормальном сечении резьбы червяка или зуба червячного колеса (*рад, град*).

α_0 — угол зубчатого зацепления исходного контура (*рад, град*).

α_i' — текущее значение угла наклона радиуса-вектора рабочего профиля кулачка (*рад, град*).

β — угол наклона зуба косозубого колеса (*рад, град*); угол подъема резьбы червяка (*рад, град*).

γ — удельный вес смазочной жидкости ($Г/см^3$).

Δ — полный коэффициент неравномерности регулятора.

Δx — приращение величины x или поправка, вводимая для приведения левой части уравнения к нулю (единица измерения x).

δ — диаметр окружности, по которой перемещается цапфа в условиях гидродинамического трения (*мм*); коэффициент неравномерности установившегося движения звена приведения.

$\delta_{\text{р}}$ — коэффициент неравномерности регулятора.

δ_i — отклонение левой части уравнения от нуля.

δ_m — половина угла при вершине начального конуса колеса m (*рад, град*).

ε — коэффициент нечувствительности регулятора.

ε — коэффициент перекрытия зубчатого зацепления; угловое ускорение ($сек^{-2}$).

ε_s — коэффициент перекрытия косозубого зацепления.

η — единица абсолютной вязкости жидкости ($кГ \cdot сек/м^2$, пуаз); коэффициент полезного действия механизма.

η_{H1} — коэффициент полезного действия при передаче мощности от водила H к колесу 1 планетарного механизма.

η_{km} — коэффициент полезного действия зубчатого механизма при передаче мощности от колеса k к колесу m.

η_{1H} — коэффициент полезного действия при передаче мощности от колеса 1 к водилу H планетарного механизма.

θ — угол, равный инволюте угла α (*рад, град*).

ϑ — угол давления силы (*рад, град*).

λ — угол между осями двух соседних цевок ведущего звена мальтийского механизма (*рад, град*).

μ_k — масштаб физической величины k (ед. изм. $k/мм$).

ξ — коэффициент сдвига исходного контура.

ρ — радиус кривизны кривой (*мм*).
ρ_i — текущее значение радиуса кривизны теоретического профиля кулачка (*мм*).
ρ_k — радиус развертки дополнительного конуса конического колеса k (*мм*).
ρ_1' — текущее значение радиуса кривизны рабочего профиля кулачка (*мм*).
σ_k — угол наклона вектора силы P_k к оси x неподвижной системы координат (*рад*, *град*).
φ — угол поворота звена приведения (*рад*, *град*).
φ — угол трения скольжения (*рад*, *град*).
φ_i — угол наклона стороны i замкнутого плоского векторного многоугольника к оси x неподвижной системы координат (*рад*, *град*).
φ_1 — угол поворота ведущего звена мальтийского механизма за период времени движения креста (*рад*, *град*).
φ_2 — угол поворота креста мальтийского механизма за период времени его движения (*рад*, *град*).
φ_{1i} — текущее значение угла поворота кулачка (*рад*, *град*).
φ_{2i} — текущее значение угла поворота коромысла кулачкового механизма (*рад*, *град*).
φ' — условный угол трения клиновой поверхности (*рад*, *град*).
φ_k' — первая производная угла φ_k по углу φ_1.
φ_k'' — вторая производная угла φ_k по углу φ_1.
ψ — коэффициент потерь механизма; относительный зазор между цапфой и вкладышем.
ψ_H — коэффициент потерь планетарного механизма в обращенном движении относительно водила H.
χ — абсолютный сдвиг исходного контура (*мм*).
ω — угловая скорость (*сек*$^{-1}$).
$\omega_н$ — номинальная угловая скорость (*сек*$^{-1}$).
$\omega_р$ — угловая скорость регулятора (*сек*$^{-1}$).
$\omega_{ср}$ — средняя угловая скорость (*сек*$^{-1}$).
ω_{km} — относительная угловая скорость звеньев k и m (*сек*$^{-1}$).

Глава 5-1

СТРУКТУРА МЕХАНИЗМОВ

§ 5-1. Механизм. Кинематические пары. Кинематическая цепь

Механизм — искусственно созданная система известным образом взаимно связанных материальных точек, предназначенная для воспроизведения требуемого движения.

Деталь — отдельная неделимая часть механизма. *Звено* — одна или несколько неподвижно соединенных деталей. *Кинематическая пара* — подвижное соединение двух звеньев, находящихся в непосредственном

соприкосновении. В *низшей паре* соприкосновение осуществляется по поверхности, в *высшей* — по линии или в точке.

Положение звена в пространстве определяется шестью величинами, называемыми *параметрами положения* звена: тремя координатами какой-нибудь точки звена и тремя углами Эйлера или тремя координатами какой-нибудь точки звена, двумя углами наклона к осям прямоугольной системы координат прямой, связанной со звеном и проходящей через указанную точку, и углом поворота звена относительно этой прямой. Одно звено кинематической пары в системе другого звена связывает некоторые из указанных параметров. На рис. 5-1 показаны распространенные кинематические пары: *а*) шаровая, *б*) шаровая с пальцем, *в*) цилиндрическая, *г*) вращательная, *д*) поступательная, *е*) винтовая, *ж*) точечная, *з*) линейная.

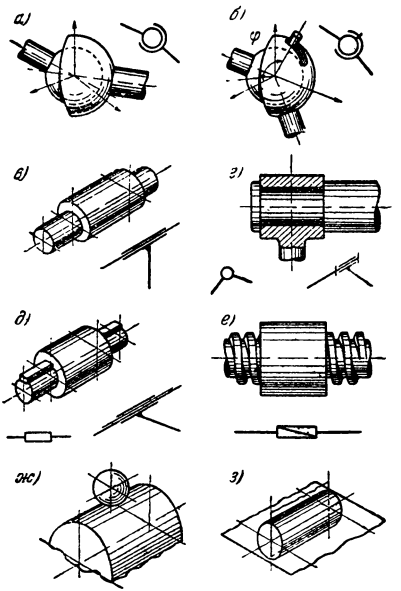


Рис. 5-1.

Соединение в кинематическую пару двух звеньев при их движении обеспечивает неизменяемость некоторых параметров положения одного звена в системе другого (рис. 5-1).

Кинематическая цепь — система звеньев, соединенных в кинематические пары (рис. 5-2—5-4). *Стойка* — звено кинематической цепи, принимаемое за неподвижное.

Кинематическая цепь оказывается связанной условием непосредственного соприкосновения ее звеньев, входящих в кинематические пары. Число

условий связи, наложенных на кинематическую цепь в целом, равно в общем случае сумме условий связи всех ее кинематических пар.

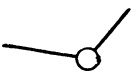


Рис. 5-2.

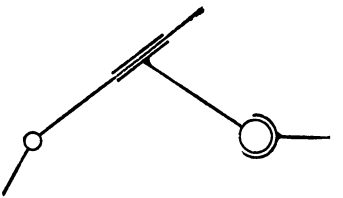


Рис. 5-3.

Структурная формула кинематической цепи общего вида:

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \qquad (5\text{-}1)$$

где w — число несвязанных параметров положения кинематической цепи (число ее *степеней свободы*); n — число ее подвижных звеньев; p_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) — число кинематических пар с i условиями связи.

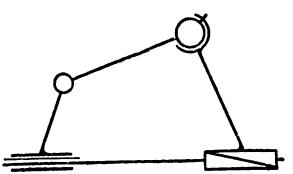


Рис. 5-4.

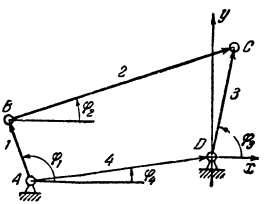


Рис. 5-5.

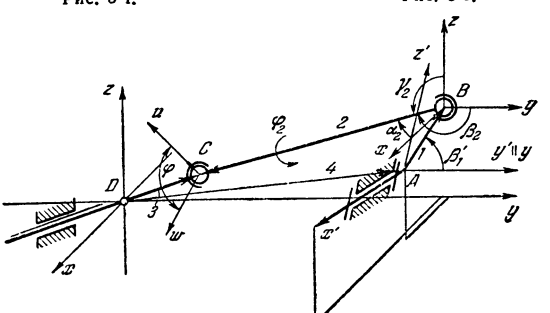


Рис. 5-6.

В частных случаях отдельные комбинации кинематических пар налагают дополнительные связи, вследствие чего часто приходится применять частного вида формулы [1], из которых приведем только

формулу для плоских кинематических цепей, звенья которых могут двигаться только параллельно одной какой-либо плоскости:

$$w = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (5\text{-}2)$$

Для определения положений звеньев кинематической цепи целесообразно пользоваться ее схемой, представляющей собой многоугольник, для установления математических выражений, связывающих параметры положения сторон многоугольника. Основными такими выражениями являются *уравнения замкнутости* отдельных контуров, составляющих многоугольник. Рассматривая стороны многоугольника как векторы, им задают направления, причем для стороны, выходящей из неподвиж-

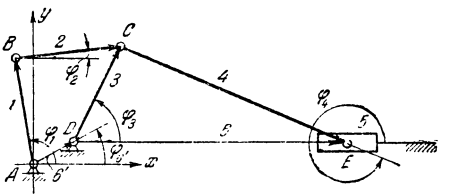


Рис. 5-7.

ной точки, целесообразно задавать направление так, чтобы начало вектора совпадало с неподвижной точкой. Обходя каждый контур схемы в произвольно выбранном направлении, составляют уравнения замкнутости, в которых векторам, направленным против направления обхода, присваивают знаки минус. Кроме уравнений замкнутости, следует составлять соотношения, связывающие параметры положения отдельных пар сторон. Общее число составленных указанным способом уравнений и соотношений устанавливает число условий, связывающих кинематическую схему.

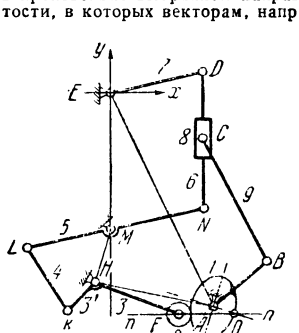


Рис. 5-8.

Если подсчитать общее число изменяемых параметров положения сторон многоугольника и вычесть из него число условий связи, то получится число степеней свободы заданной кинематической цепи. После такого исследования будут подготовлены соотношения, необходимые для решения задач о кинематическом анализе заданной цепи.

Общий метод первоначального исследования заданной кинематической цепи: 1) подсчитать числа подвижных звеньев и кинематических пар с различными условиями связи; 2) воспользовавшись формулой (5-1) для пространственной цепи общего вида или формулой (5-2) для плоской цепи, определить число степеней свободы w; 3) выявить изменяемые параметры положения и составить связывающие их соотношения; 4) поинтересоваться, не обращаются ли некоторые из выявленных соотношений в тождества (рис. 5-5—5-9).

В каждой кинематической цепи, применяемой в качестве механизма, всегда $w \geq 1$ (чаще всего $w = 1$). Если w изменяемых параметров связать заранее установленными зависимостями от времени, то можно

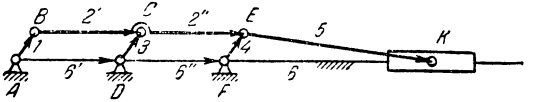


Рис. 5-9.

будет получить требуемое движение всех звеньев цепи. В этом случае кинематическая цепь будет выполнять роль механизма.

Рис. 5-5. $n = 3$, $p_5 = 4$, $w = 1$. Переменные параметры: φ_1, φ_2, φ_3. Уравнение замкнутости: $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$ (два условия связи).

Рис. 5-6. $n = 3$, $p_3 = 1$, $p_4 = 1$, $p_5 = 2$, $w = 1$. Переменные параметры: β'_1, α_2, β_2, γ_2, φ_2, l_2. Условия связи: $l_1 + l_2 = l_3 + l_4$; $\cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1$; $\varphi = \text{const}$.

Рис. 5—7. $n = 5$, $p_5 = 7$, $w = 1$. Переменные параметры: φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, l_8. Условия связи: $l_1 + l_2 = l_3 + l_8' = 0$, $l_3 + l_4 = l_8$.

Рис. 5-8. $n = 9$, $p_4 = 1$, $p_5 = 12$, $w = 2$. Неопределенный характер вращения ролика *2* не влияет на движение остальных звеньев (фиктивная степень свободы).

Рис. 5-9. $AB \neq DC \neq FE$. Звенья *1*, *3* и *4* движутся одинаково; звено *1* или *3* является пассивным.

§ 5-2. Структурные свойства плоских механизмов. Образование плоских механизмов по Ассуру

Схема плоского механизма представляет собой замкнутый плоский многоугольник, стороны которого в общем случае могут изменять свое относительное расположение, а некоторые из них — и свои длины. Простейшим является двухзвенный механизм, состоящий из одного подвижного и одного неподвижного звеньев (рис. 5-10).

Плоский механизм любой сложности состоит из двухзвенного, подвижное звено которого называется *ведущим* и закон движения которого считается заданным, и *групп Ассура*, состоящих каждая из четного числа звеньев, входящих в кинематические пары с пятью условиями связи каждая, причем число пар должно равняться полуторному числу звеньев. Наиболее простая группа, называемая *двухповодковой*, состоит из двух звеньев, входящих в три кинематические пары. Присоединением двухповодковой группы к ведущему звену и к стойке получают четырехзвенный механизм, схема которого представляет собой единый замкнутый векторный контур, связанный одним *векторным уравнением замкнутости* (рис. 5-11).

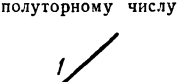


Рис. 5-10.

Примененный Ассуром *метод наслоения* для образования плоских механизмов присоединением к четырехзвенному механизму второй двухповодковой группы позволяет получить шестизвенный механизм, схема которого состоит из двух замкнутых контуров (рис. 5-12).

Добавлением к шестизвенному механизму еще одной двухповодковой группы получают восьмизвенный механизм (рис. 5-13) и т. д.

Решение задач о кинематическом анализе указанных механизмов производится при помощи уравнений замкнутости в последовательном порядке в соответствии с порядком присоединения групп. Такой порядок соблюдается при исследовании любого плоского механизма.

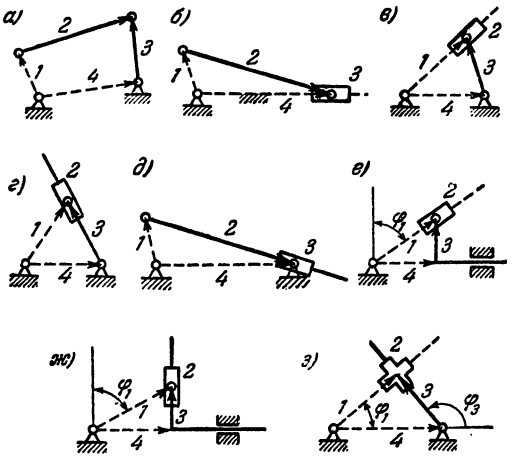


Рис. 5-11.

Следующая по сложности группа — *трехповодковая*, состоящая из звена, входящего в три кинематические пары (*базисное звено*), и трех

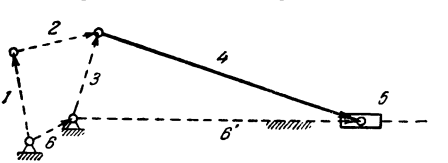


Рис. 5-12.

поводков. Присоединением такой группы к ведущему звену и к стойке получают шестизвенный механизм, схема которого состоит из двух замкнутых контуров, уравнения замкнутости которых приходится решать совместно. Этим такой механизм отличается от рассмотренного выше (рис 5-14).

Из четырех звеньев с шестью кинематическими парами состоит группа, входящая в состав шестизвенного механизма, схема которого изображена на рис. 5-15. Такая схема состоит из двух замкнутых контуров, решаемых совместно.

Еще более сложная группа — *четырехповодковая* — изображена в составе восьмизвенного механизма, схема которого состоит из решаемых совместно трех замкнутых векторных контуров (рис. 5-16).

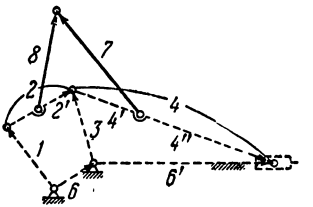


Рис. 5-13.

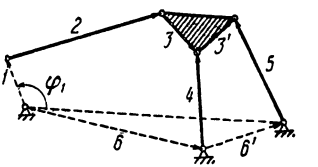


Рис. 5-14.

Группы с бо́льшим числом звеньев применяются в виде исключения, а потому их рассматривать не будем. Принцип наслоения можно применять для групп любой сложности. При кинематическом исследовании

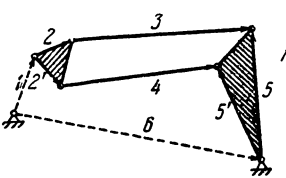


Рис. 5-15.

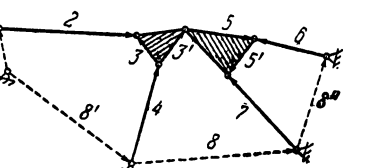


Рис. 5-16.

любого механизма следует решать уравнения замкнутости в последовательности присоединения групп.

Глава 5-2

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

§ 5-3. Определение положений звеньев

Если схема механизма состоит из нескольких многоугольников, решаемых раздельно, то графическое решение сводится к последовательному построению треугольников и четырехугольников. Численный метод предусматривает решение уравнений замкнутости каждого многоугольника.

Сторону многоугольника как вектор мы будем представлять в виде произведения его алгебраического значения l и орта $\mathbf{e}$. Следует помнить, что скалярное произведение двух ортов $\mathbf{e}_m$ и $\mathbf{e}_n$ равно косинусу разности углов φ_m и φ_n их наклона к оси x прямоугольной системы координат. Орты осей x и y обозначаются соответственно через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$.

Примеры. 1. Рис. 5-17. По заданным φ_1, l_1, l_2, l_3 и l_4 определить углы φ_2 и φ_3.

В численном методе составляем уравнение замкнутости

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 = l_4\mathbf{i} + l_3\mathbf{e}_3, \tag{5-3}$$

которое решается последовательно возведением его в скалярный квадрат после изолирования $l_2\mathbf{e}_2$ и $l_3\mathbf{e}_3$.

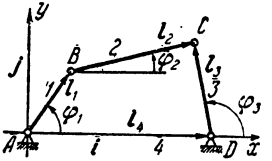


Рис. 5-17.

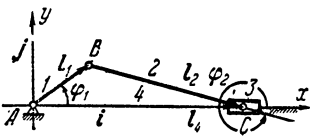


Рис. 5-18.

2. Рис. 5-18. По заданным φ_1, l_1 и l_2 определить φ_2 и l_4.

В численном методе имеем:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 = l_4\mathbf{i}. \tag{5-4}$$

Уравнение (5-4) решается скалярным умножением на орт j и затем на орт i.

3. Рис. 5-19. По заданным φ_1, l_1 и l_4 определить φ_3 и l_3.

В численном методе имеем уравнение

$$l_1\mathbf{e}_1 = l_4\mathbf{i} + l_3\mathbf{e}_3, \tag{5-5}$$

которое после изолирования $l_3\mathbf{e}_3$ решается возведением в скалярный квадрат. Угол φ_3 определяется скалярным умножением (5-5) на орт i или на орт j.

4. Рис. 5-20. По заданным φ_1, φ_4, l_1, l_2, l_3, l_4 и l_5 определить φ_2, φ_3, φ_5 и l_7.

Сначала следует решить четырехугольник *ABCDA*, после чего решается треугольник *DCED*.

Если схема механизма состоит из нескольких многоугольников, решаемых совместно, то при графическом методе применяются методы геометрических мест и шаблонов. В численном методе пользуются методом линейных поправок.

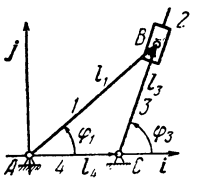


Рис. 5-19.

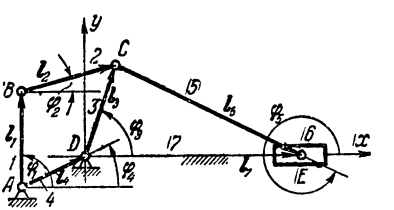


Рис. 5-20.

5. Рис. 5-21. По заданному углу φ_1, линейным размерам всех сторон и углам наклона сторон *6* и *7* определить углы наклона сторон *BC*, *CD*, *KD* и *HE*.

Метод геометрических мест. Разъединяют звенья в шарнире *2—3*. Вычерчивают траекторию $\alpha-\alpha$ точки *C* как дугу окружности, описанной из точки *B*. Вычерчивают траекторию $\beta-\beta$ точки *C*, принадлежащей звену *3*. Пересечение указанных траекторий определяет истинное положение точки *C*, чем устанавливается положение всех звеньев.

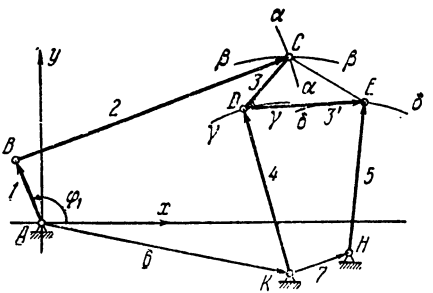


Рис. 5-21.

Метод шаблонов. Из плотной бумаги вырезают шаблон, изображающий треугольник *DCE*. Положения точек *C*, *D* и *E* можно определить, если установить шаблон своими вершинами на окружностях $\alpha-\alpha$, $\gamma-\gamma$ и $\delta-\delta$.

Численный метод. Сначала задачу решают графически; этим грубо приближенно определяют значения искомых параметров. Составляют уравнения проекций замкнутых векторных контуров *1-2-3-4-6* и *4-3'-5-7*. Подставляют в выражения проекций замкнутых контуров полученные геометрическим методом приближенные значения неизвестных, после чего устанавливают величины δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 в указанных выражениях. Для значительного их уменьшения вводят поправки — угловые вида $\Delta\varphi$ и, если нужно, линейные вида Δl, — в результате чего под знаками косинуса и синуса получаются суммы вида $(\varphi+\Delta\varphi)$, а вместо l получается $(l+\Delta l)$. Из полученных указанным образом уравнений устанавливают величины упомянутых поправок, предварительно представляя величины $\cos(\varphi+\Delta\varphi)$ и $\sin(\varphi+\Delta\varphi)$ следующим образом:

$$\cos(\varphi+\Delta\varphi)\approx\cos\varphi-\sin\varphi\,\Delta\varphi,\quad \sin(\varphi+\Delta\varphi)\approx\sin\varphi+\cos\varphi\,\Delta\varphi. \qquad (5\text{-}6)$$

После разложения косинуса и синуса сумм описанным способом тригонометрические уравнения превращаются в линейные алгебраические, решение которых не представляет трудностей. Повторным применением указанного метода задача о положениях звеньев механизма может быть решена с любой наперед заданной степенью точности.

Подробное изложение рассмотренного метода см. в [6].

§ 5-4. Решение задачи о скоростях и ускорениях [1]

Задача о скоростях и ускорениях может быть решена при помощи уравнений, получаемых в результате дифференцирования по времени уравнений замкнутости многоугольников схемы механизма. Такое решение можно произвести либо графически, либо численным методом.

Дифференцирование по времени орта **e**. Представим орт **e** так (рис. 5-22):

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}\cos\varphi + \mathbf{j}\sin\varphi. \tag{5-7}$$

Первая производная по времени:

$$\frac{d\mathbf{e}}{dt} = (-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)\,\omega = \omega\mathbf{e}', \tag{5-8}$$

где $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ — угловая скорость орта **e**; **e′** — орт, полученный поворотом орта **e** на 90° в положительном направлении.

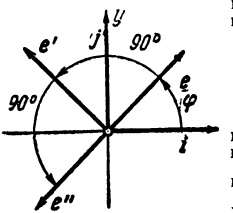


Рис. 5-22.

Вторая производная по времени:

$$\frac{d^2\mathbf{e}}{dt^2} = (-\mathbf{i}\cos\varphi - \mathbf{j}\sin\varphi)\,\omega^2 + (-\mathbf{i}\sin\varphi + \mathbf{j}\cos\varphi)\,\varepsilon = \omega^2\mathbf{e}'' + \varepsilon\mathbf{e}', \tag{5-9}$$

где **e″** — орт, полученный поворотом орта **e′** в положительном направлении на 90° или таким же поворотом орта **e** на 180°; $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение орта **e**.

Примеры. 1. По заданным постоянным и переменным параметрам схемы механизма (рис. 5-23, *а*), угловым скорости ω_1 и ускорению ε_1 звена *1* определить законы движения всех ведомых звеньев.

Уравнения замкнутости многоугольников *ABCDA* и *DCED*:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 = l_4\mathbf{e}_4 + l_3\mathbf{e}_3; \qquad l_3\mathbf{e}_3 + l_5\mathbf{e}_5 = l_7\mathbf{i}. \tag{5-10}$$

В результате дифференцирования последних уравнений по времени получаем:

$$l_1\omega_1\mathbf{e}_1' + l_2\omega_2\mathbf{e}_2' = l_3\omega_3\mathbf{e}_3', \qquad \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{CB} = \mathbf{v}_C; \tag{5-11}$$

$$l_3\omega_3\mathbf{e}_3' + l_5\omega_5\mathbf{e}_5' = \dot{\mathbf{l}}_7\mathbf{i}, \qquad \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{EC} = \mathbf{v}_E. \tag{5-12}$$

где ω_2, ω_3 и ω_5 — угловые скорости звеньев *2*, *3* и *5*; $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ — орты линейных скоростей: $\mathbf{v}_B$ — точки *B*, $\mathbf{v}_{CB}$ — точки *C* относительно точки *B*, $\mathbf{v}_C$ — абсолютной скорости точки *C*; $\mathbf{e}_5'$ — орт линейной скорости точки *E* относительно точки *C*; $\dot{\mathbf{l}}_7$ — скорость изменения длины вектора $\mathbf{l}_7$, определяющая скорость точки *E*.

Графический метод решения поставленной задачи предусматривает построение плана скоростей (рис. 5-23, *б*). Решение следует вести в таком порядке: 1) определить величину $l_1\omega_1$ вектора $\mathbf{v}_B$; 2) задаться масштабом $\mu_v = м/сек \cdot мм$ плана скоростей и определить длину отрезка *pb*, после чего произвести его построение; 3) в соответствии с направлениями ортов $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ провести прямые *bc* и *pc*, пересечение которых определяет точку *c*, устанавливающую положение концов векторов $\overline{bc}$ и $\overline{pc}$ скоростей $\mathbf{v}_{CB}$ и $\mathbf{v}_C$; 4) в соответствии с линиями действия ортов $\mathbf{e}_5'$ и **i** провести прямые *ce* и *pe*, точка *e* пересечения которых устанавливает положение концов векторов $\overline{ce}$ и $\overline{pe}$ скоростей $\mathbf{v}_{EC}$ и $\mathbf{v}_E$.

В численном методе для определения величины ω_2 следует скалярно умножить уравнение (5-11) на орт $\mathbf{e}_3$, благодаря чему член в пра-

вой части обратится в нуль, и мы получим линейное уравнение с одним неизвестным ω_3. Величина ω_3 определяется скалярным умножением уравнения (5-11) на орт $\mathbf{e}_2$.

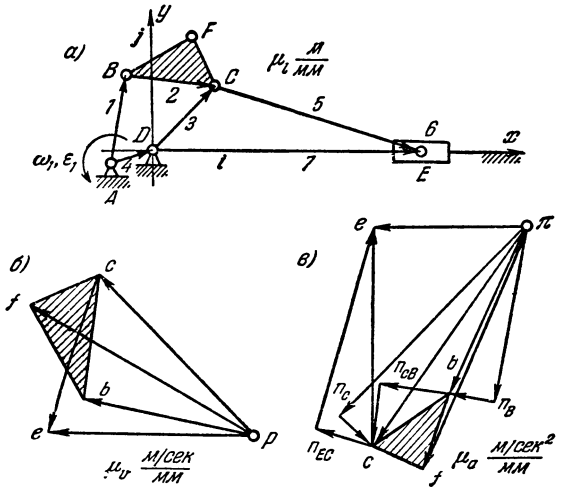


Рис. 5-23.

Для решения задачи об ускорениях дифференцируем по времени уравнения (5-11) и (5-12). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} l_1\omega_1^2\mathbf{e}_1'' + l_1\varepsilon_1\mathbf{e}_1' + l_2\omega_2^2\mathbf{e}_2'' + l_2\varepsilon_2\mathbf{e}_2' &= l_3\omega_3^2\mathbf{e}_3'' + l_3\varepsilon_3\mathbf{e}_3', \\ \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t + \mathbf{a}_{CB}^n + \mathbf{a}_{CB}^t &= \mathbf{a}_{CD}^n + \mathbf{a}_{CD}^t; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}13)$$

$$\left.\begin{aligned} l_3\omega_3^2\mathbf{e}_3'' + l_3\varepsilon_3\mathbf{e}_3' + l_5\omega_5^2\mathbf{e}_5'' + l_5\varepsilon_5\mathbf{e}_5' &= \ddot{l}_7 i, \\ \mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^t + \mathbf{a}_{EC}^n + \mathbf{a}_{EC}^t &= \mathbf{a}_E, \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}14)$$

где орты $\mathbf{e}_1''$, $\mathbf{e}_2''$ и $\mathbf{e}_3''$ определяют направления векторов $\mathbf{a}_B^n$, $\mathbf{a}_{CB}^n$ и $\mathbf{a}_C^n$ — нормальных ускорений точки B, точки C относительно точки B и точки C в абсолютном движении; ε_2, ε_3 и ε_5 — угловые ускорения звеньев *2*, *3* и *5*; орты $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ и $\mathbf{e}_3'$ определяют линии действия векторов $\mathbf{a}_B^t$, $\mathbf{a}_{CB}^t$ и $\mathbf{a}_C^t$ — тангенциальных ускорений точки B, точки C относительно точки B и точки C в абсолютном движении; орты $\mathbf{e}_5''$ и $\mathbf{i}$ устанавливают направление вектора нормального ускорения $\mathbf{a}_{EC}^n$ и линию действия абсолютного ускорения $\mathbf{a}_E$, орт $\mathbf{e}_5'$ — линию действия вектора $\mathbf{a}_{EC}^t$ тангенциального ускорения точки E относительно точки C.

Масштаб μ_a *м/сек²* · *мм* плана ускорений (рис. 5-23, *в*) вычисляется в соответствии с величиной $l_1\omega_1^2$ и намечаемой длиной отрезка πn_B. После вычисления величин нормальных ускорений производится построение плана ускорений в соответствии с уравнениями (5-13) и (5-14).

В численном методе, руководствуясь теми же уравнениями, можно определить величины ε_2, ε_3, ε_5 и $\ddot{l}_7$. Для определения ε_3 следует скалярно умножить уравнение (5-13) на орт $\mathbf{e}_3$, для ε_3 — на орт $\mathbf{e}_2$; для определения ε_5 и $\ddot{l}_7$ надо последовательно произвести скалярное умножение уравнения (5-14) на орты $\mathbf{j}$ и $\mathbf{e}_5$.

Свойство подобия планов скоростей и ускорений и многоугольника звена. Многоугольники, образованные векторами скоростей и ускорений в движении одних точек относительно других, подобны многоугольнику схемы звена и сходственно с ним расположены. Под сходственностью расположения подобных фигур подразумевается одноименная последовательность вершин при обходе периметров в одном и том же направлении. Свойство подобия используется при графическом определении скорости и ускорения любой точки звена по построенным планам скоростей и ускорений. На рис. 5-23 показано, как определяются скорость $\mathbf{v}_F$ и ускорение $\mathbf{a}_F$ точки F, принадлежащей звену 2. Здесь треугольники *BFC* и *bfc* подобны и сходственно расположены.

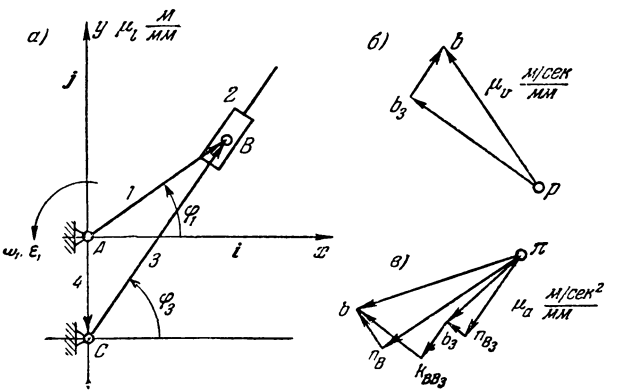


Рис. 5-24.

2. По заданным постоянным и переменным параметрам схемы механизма (рис. 5-24, *а*), угловой скорости ω_1 и углового ускорения ε_1 звена *1* определить угловую скорость ω_3 и угловое ускорение ε_3 звена *3*.

Уравнение замкнутости:

$$l_1\mathbf{e}_1 = l_4\mathbf{j} + l_3\mathbf{e}_3. \tag{5-15}$$

Уравнения скоростей:

$$\left.\begin{aligned} l_1\omega_1\mathbf{e}_1' &= \dot{l}_3\mathbf{e}_3 + l_3\omega_3\mathbf{e}_3', \\ \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{BB_3} + \mathbf{v}_{B_3}, \end{aligned}\right\} \tag{5-16}$$

где $\mathbf{v}_{BB_3} = \dot{l}_3\mathbf{e}_3$ — скорость движения точки B, принадлежащей пол-

зуну 2, относительно точки B_3, расположенной на направляющей 3 под точкой B; $\mathbf{v}_{B_3} = l_3\omega_3\mathbf{e}_3'$ — скорость точки B_3 в абсолютном движении. Линии действия векторов скоростей устанавливаются направлениями ортов, входящих в уравнения (5-16). План скоростей рассматриваемого механизма представлен на рис. 5-24, *б*.

В численном методе уравнение (5-16) следует скалярно умножить сначала на орт $\mathbf{e}_3$, чем определится угловая скорость ω_3, и затем на орт $\mathbf{e}_3$, что даст возможность определить скорость $\mathbf{v}_{BB_3}$.

Уравнения ускорений:

$$\left.\begin{aligned} l\omega_1^2\mathbf{e}_1'' + l_1\varepsilon_1\mathbf{e}_1' &= \ddot{l}_3\mathbf{e}_3 + 2\dot{l}_3\omega_3\mathbf{e}_3' + l_3\omega_3^2\mathbf{e}_3'' + l_3\varepsilon_3\mathbf{e}_3', \\ \mathbf{a}_B^n + \mathbf{a}_B^t &= \mathbf{a}_{BB_3}^r + \mathbf{a}_{BB_3}^k + \mathbf{a}_{B_3}^n + \mathbf{a}_{B_3}^t. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}17)$$

где $\mathbf{a}_{BB_3}^r = \ddot{l}_3\mathbf{e}_3$ — ускорение точки B относительно точки B_3; $\mathbf{a}_{BB_3}^k = 2\dot{l}_3\omega_3\mathbf{e}_3$ — кориолисово ускорение точки B, вектор которого расположен перпендикулярно к CB и направлен в соответствии со знаками $\dot{l}_3$ и ω_3. В данном случае направление вектора $\mathbf{a}_{BB_3}^k$ устанавливается положительным поворотом орта $\mathbf{e}_3$ на 90°, потому что знаки $\dot{l}_3$ и ω_3 положительны. Руководствуясь планом скоростей, направление вектора кориолисова ускорения можно установить поворотом на 90° вектора скорости ползуна относительно кулисы (на рис. 5-24, *б* вектор $\overline{b_3b}$) по направлению вращения кулисы. Направление вектора $\mathbf{a}_{B_3}^n$ и линия действия вектора $\mathbf{a}_{B_3}^t$ устанавливаются ортами $\mathbf{e}_3''$ и $\mathbf{e}_3'$.

После вычисления величин $\mathbf{a}_{BB_3}^k$ и $\mathbf{a}_{B_3}^n$ можно построить план ускорений (рис. 5-24, *в*). Построение необходимо выполнять так, чтобы конец вектора $\mathbf{a}_{BB_3}^k$ совпадал с концом вектора $\mathbf{a}_B^t$, а вектор $\mathbf{a}_{B_3}^n$ выходил из начала плана.

Численное решение уравнения (5-17) можно произвести последовательным скалярным умножением его на орты $\mathbf{e}_3'$ и $\mathbf{e}_3$, благодаря чему будут определены искомые величины ε_3 и $\ddot{l}_3$.

3. По заданным постоянным и переменным параметрам схемы механизма (рис. 5-25), постоянной угловой скорости ω_1 звена *1* определить скорость $\mathbf{v}_E$ и ускорение $\mathbf{a}_E$ точки E.

В рассматриваемом случае многоугольники схемы могут быть решены только совместно.

Уравнения замкнутости многоугольников $ABCDA$ и $DCEFAD$:

$$l_1\mathbf{e}_1 - l_{CB}\mathbf{e}_3 - l_4\mathbf{e}_4 - l_5\mathbf{e}_5 = 0, \quad (5\text{-}18)$$

$$l_4\mathbf{e}_4 + l_{CE}\mathbf{e}_3 - l_7\mathbf{j} - l_6\mathbf{i} + l_5\mathbf{e}_5 = 0. \quad (5\text{-}19)$$

Уравнения скоростей:

$$\left.\begin{aligned} l_1\omega_1\mathbf{e}_1' - \dot{l}_{CB}\mathbf{e}_3 - l_{CB}\omega_3\mathbf{e}_3' - l_4\omega_4\mathbf{e}_4' &= 0, \\ \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_{BB_3} - \mathbf{v}_{B_3C} - \mathbf{v}_C &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}20)$$

$$\left.\begin{aligned} l_4\omega_4\mathbf{e}_4' + l_{CE}\omega_3\mathbf{e}_3' - \dot{l}_6\mathbf{i} &= 0, \\ \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{EC} - \mathbf{v}_E &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}21)$$

В написанных уравнениях содержатся следующие неизвестные: $\dot{l}_{CB}$, ω_3, ω_4 и $\dot{l}_6$, причем в каждом из указанных уравнений по три неизвестных, так что непосредственное решение рассматриваемой задачи графическим методом невозможно.

Для решения воспользуемся методом особых точек Ассура. Заменим в уравнении (5-18) вектор $l_{CB}\mathbf{e}_3$ двумя слагаемыми векторами $l_{BS}\mathbf{e}'_3$ и $l_{CS}\mathbf{e}_4$ (рис. 5-25). Имеем:

$$l_{CB}\mathbf{e}_3 = l_{BS}\mathbf{e}'_3 + l_{CS}\mathbf{e}_4. \quad (5\text{-}22)$$

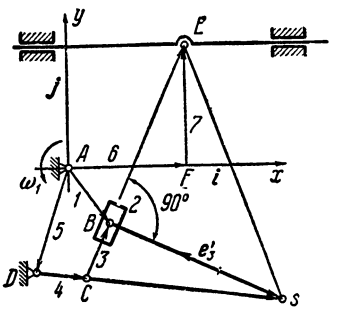


Рис. 5-25.

Имея в виду, что точка S принадлежит звену 3, дифференцируем по времени последнее равенство. Имеем:

$$\dot{l}_{CB}\mathbf{e}_3 + l_{CB}\omega_3\mathbf{e}'_3 = l_{BS}\omega_3\mathbf{e}''_3 + l_{CS}\omega_3\mathbf{e}'_4 = -l_{BS}\omega_3\mathbf{e}_3 + l_{CS}\omega_3\mathbf{e}'_4. \quad (5\text{-}23)$$

Теперь уравнения (5-20) можно заменить следующими:

$$\left.\begin{aligned} &l_1\omega_1\mathbf{e}'_1 + l_{BS}\omega_3\mathbf{e}_3 - \\ &-(l_4\omega_4 + l_{CS}\omega_3)\,\mathbf{e}'_4 = 0, \\ &\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{SB} = \\ &= \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{SC} = \mathbf{v}_S. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}24)$$

т. е. таким способом можно определить скорость $\mathbf{v}_S$ точки S, принадлежащей звену 3.

После этого определяется скорость $\mathbf{v}_E$ точки E на основании следующего уравнения:

$$\mathbf{v}_E = \mathbf{v}_S + \mathbf{v}_{ES}. \quad (5\text{-}25)$$

Далее, можно установить величины скоростей и остальных точек рассматриваемого механизма.

Для определения ускорений дифференцируем по времени уравнения (5-20) и (5-21). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} &l_1\omega_1^2\mathbf{e}''_1 - \ddot{l}_{CB}\mathbf{e}_3 - 2\dot{l}_{CB}\omega_3\mathbf{e}'_3 - l_{CB}\omega_3^2\mathbf{e}''_3 - l_{CB}\varepsilon_3\mathbf{e}'_3 - \\ &\qquad - l_4\omega_4^2\mathbf{e}''_4 - l_4\varepsilon_4\mathbf{e}'_4 = 0, \\ &\mathbf{a}_B^n - \mathbf{a}_{BB_3}^r - \mathbf{a}_{BB_3}^k - \mathbf{a}_{B_3C}^n - \mathbf{a}_{B_3C}^t - \mathbf{a}_C^n - \mathbf{a}_C^t = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}26)$$

$$\left.\begin{aligned} &l_4\omega_4^2\mathbf{e}''_4 + l_4\varepsilon_4\mathbf{e}'_4 + l_{CE}\omega_3^2\mathbf{e}''_3 + l_{CE}\varepsilon_3\mathbf{e}'_3 - \ddot{l}_6\mathbf{i} = 0, \\ &\mathbf{a}_C^n + \mathbf{a}_C^t + \mathbf{a}_{EC}^n + \mathbf{a}_{EC}^t - \mathbf{a}_E = 0. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}27)$$

Применяя метод особых точек, продифференцируем по времени уравнение (5-23). Имеем:

$$\ddot{l}_{CB}\mathbf{e}_3 + 2\dot{l}_{CB}\omega_3\mathbf{e}'_3 + l_{CB}\omega_3^2\mathbf{e}''_3 + l_{CB}\varepsilon_3\mathbf{e}'_3 = = -l_{BS}\omega_3^2\mathbf{e}'_3 - l_{BS}\varepsilon_3\mathbf{e}_3 + l_{CS}\omega_3^2\mathbf{e}''_4 + l_{CS}\varepsilon_3\mathbf{e}'_4. \quad (5\text{-}28)$$

Теперь уравнения (5-26) можно написать так:

$$\left.\begin{aligned} &l_1\omega_1^2\mathbf{e}_1'' + l_{BS}\omega_3^2\mathbf{e}_3' + l_{BS}\varepsilon_3\mathbf{e}_3'' - (l_4\omega_4^2 - l_{CS}\omega_3^2)\,\mathbf{e}_4'' - \\ &\qquad - (l_4\varepsilon_4 - l_{CS}\varepsilon_3)\,\mathbf{e}_4' = 0, \\ &\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{SB}^n + \mathbf{a}_{SB}^t = \left(\overline{a_C^n + a_{SC}^n}\right) + \left(\overline{a_C^t + a_{SC}^t}\right). \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}29)$$

Подобно предыдущему последнее уравнение можно использовать для определения ускорения точки S, после чего дальнейшее решение производится аналогично рассмотренному.

Решение той же задачи численным методом можно осуществить скалярным умножением уравнений (5-20), (5-26) и (5-21), (5-27) соответственно на орты $\mathbf{e}_3'$ и $\mathbf{j}$, благодаря чему получаются по два линейных алгебраических уравнения соответственно с неизвестными ω_3 и ω_4, с ε_3 и ε_4.

Глава 5-3

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФРИКЦИОННЫХ И ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

§ 5-5. Обыкновенные фрикционные и зубчатые механизмы [1]

Основной закон передачи вращательного движения. Нормаль nn, проведенная через точку касания двух соприкасающихся звеньев, делит линию центров на части, обратно пропорциональные их угловым скоростям. Точка P, делящая линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям звеньев, называется *мгновенным центром в относительном дзижении звеньев.* Геометрические места $\alpha_1\alpha_1$ и $\alpha_2\alpha_2$

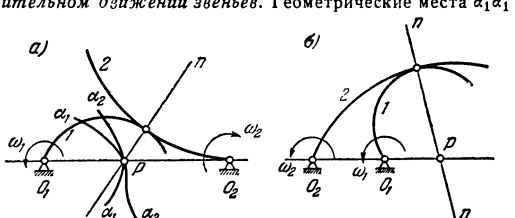


Рис. 5-26.

мгновенных центров в относительном движении звеньев, являющиеся центроидами относительного движения, называются *начальными кривыми* (рис. 5-26).

Отношение i_{km} угловых скоростей ω_k и ω_m звеньев k и m называется *передаточным отношением.* Имеем:

$$i_{km} = \frac{\omega_k}{\omega_m} \quad \text{или} \quad i_{mk} = \frac{\omega_m}{\omega_k}. \quad (5\text{-}30)$$

Следствие из основного закона. Если нормали, проведенные через последовательно соприкасающиеся точки двух звеньев, проходят через

одну и ту же точку линии центров, то передаточное отношение остается постоянным. Этим свойством обладают зубчатые механизмы, составленные из круглых колес. Начальные кривые в таком случае являются окружностями и называются также *начальными*.

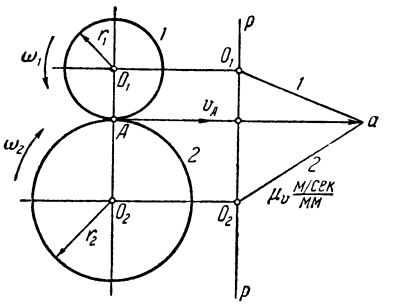


Рис. 5-27.

Механизмы, удовлетворяющие приведенному выше следствию, применяются либо в виде соприкасающихся круглых дисков (фрикционные передачи), либо в виде зубчатых колес (зубчатые передачи). Обыкновенным *одноступенчатым* фрикционным или зубчатым механизмом называется механизм соприкасающихся колес с двумя неподвижными осями (рис. 5-27—5-29).

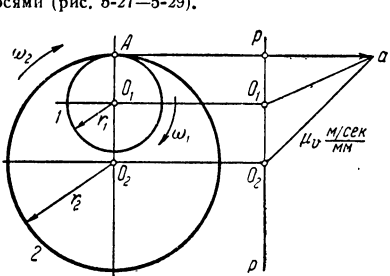


Рис. 5-28.

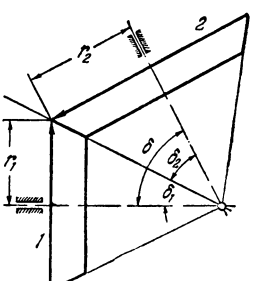


Рис. 5-29.

Передаточные отношения фрикционных и зубчатых механизмов. Условные обозначения: r_k — радиус начальной окружности колеса k; z_k — число зубьев колеса k.

Рис. 5-27. $i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = -\dfrac{r_2}{r_1} = -\dfrac{z_2}{z_1}$; $v_A = pa \cdot \mu_v$.

Рис. 5-28. $i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{z_2}{z_1}$.

Рис. 5-29. $i_{12} = \dfrac{\omega_1}{\omega_2} = \dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{\sin \delta_2}{\sin \delta_1}$.

Направления вращения колес показаны стрелками.

Закон распределения линейных скоростей на колесах может быть представлен графически (рис. 5-27 и 5-28) при помощи картин скоростей. Для определения величины вектора $\overline{pa}$ можно воспользоваться следующим равенством:

$$pa = \frac{v_A}{\mu_v} = \frac{\omega_1 r_1}{\mu_v} = \frac{\omega_3 r_3}{\mu_v}, \qquad (5\text{-}31)$$

где $\mu_v = \frac{м/сек}{мм}$ — масштаб картины скоростей.

Обыкновенные многоступенчатые зубчатые механизмы. Обыкновенным *многоступенчатым* механизмом называется такой, у которого

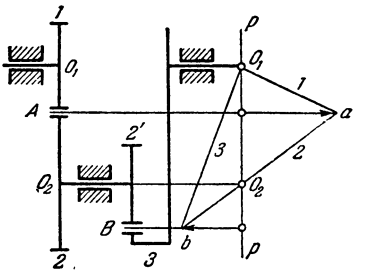


Рис. 5-30.

имеется несколько неподвижных осей вращения. *Ступенью механизма* называется его часть, расположенная между двумя ближайшими неподвижными осями. Передаточное отношение многоступенчатого механизма равно произведению передаточных отношений отдельных его ступеней. На рис. 5-30 показана схема двухступенчатой зубчатой передачи. Там же представлены картины линейных скоростей отдельных колес. Механизм (рис. 5-30), геометрические оси колес *1* и *3* которого располагаются на одной прямой, называется *одноосным* или *соосным*. Зубчатый механизм, ведомое колесо которого вращается медленнее ведущего, называется *редуктором*. Для рассматриваемого механизма имеем:

$$i_{13} = i_{12} \cdot i_{23} = -\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{r_3}{r_{2'}} = -\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_3}{z_{2'}}.$$

§ 5-6. Дифференциальные и планетарные механизмы

Фрикционный или зубчатый механизм, имеющий вращающиеся оси колес, называется *дифференциальным*. Если одно из колес такого механизма закреплено, то его называют *планетарным* (рис. 5-31).

Передаточное отношение планетарного механизма:

$$i_{1H} = 1 - i^H_{13}, \qquad (5\text{-}32)$$

где i_1H — передаточное отношение от звена *1* к водилу H, i^H_{13} — пере-

даточное отношение от колеса *1* к колесу *3* в движении относительно водила *H*.

Для механизма рис. 5-31 имеем:

$$i_{1H} = 1 - i^H_{12} \cdot i^H_{23} = 1 + \frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}.$$

Для определения величины ω_2 угловой скорости *сателлита 2* можно воспользоваться следующим соотношением:

$$i_{2H} = \frac{\omega_2}{\omega_H} = 1 - i^H_{23}. \qquad (5\text{-}33)$$

Для определения передаточных отношений можно воспользоваться картинами скоростей, которые можно построить в такой последовательности: *pa*, $\sigma_1 a$, $\sigma_2 a$, *pb*, $\sigma_1 b$. Для механизма рис. 5-31 имеем $v_1 = \omega_1 r_1$, $v_H = \omega_H (r_1 + r_2)$ и согласно картинам скоростей получаем: $\frac{v_1}{v_H} = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_H (r_1 + r_2)} = \frac{r_2 + r_{2'}}{r_{2'}}$, откуда определяем

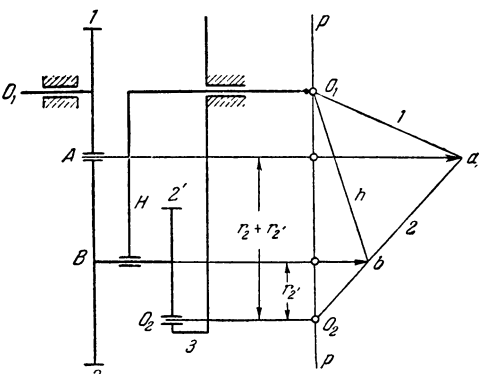


Рис. 5-31.

$$i_{1H} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{(r_1 + r_2)(r_2 + r_{2'})}{r_1 r_{2'}}.$$

Соответственно для i_{2H} имеем: $\frac{v_2}{v_H} = \frac{\omega_2 (r_2 + r_{2'})}{\omega_H (r_1 + r_2)} = \frac{r_2 + r_{2'}}{r_{2'}}$.

Картины скоростей показывают, что угловые скорости ω_2 и ω_H направлены в разные стороны, а потому знак передаточного отношения должен быть отрицательным. Имеем: $i_{2H} = -\frac{r_1 + r_2}{r_{2'}}$.

Для определенности движения дифференциального механизма, в котором все звенья имеют возможность вращаться, должны быть заданы угловые скорости двух из трех звеньев.

Соотношение между ω_1, ω_3 и ω_H:

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}. \qquad (5\text{-}34)$$

Рассмотренные планетарный и дифференциальный механизмы являются одноступенчатыми, потому что они имеют только по две неподвижные оси. Для увеличения передаточного отношения к одноступенчатому механизму можно присоединить одну или несколько ступеней обыкновенного или планетарного механизмов.

Замкнутый дифференциальный механизм. Так называется механизм, у которого два из трех подвижных звеньев соединены дополнительной связью, устанавливающей определенное передаточное отношение между ними.

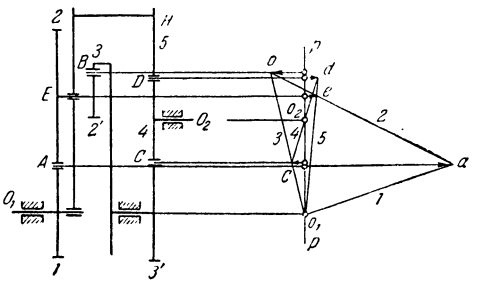


Рис. 5-32.

Рассмотрим в качестве примера механизм грузоподъемной лебедки, схема которого изображена на рис. 5-32. Дано: $z_1 = 24$, $z_2 = 52$, $z_{2'} = 21$, $z_3 = 78$, $z_{3'} = 18$, $z_4 = 30$, $z_5 = 78$. Определить передаточное отношение i_{15}.

Для решения составляем следующие уравнения:

$$i_{13}^{H} = \frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_3 - \omega_H}, \quad i_{35} = i_{34}i_{45} = -\frac{z_5}{z_{2'}}.$$

Разделим числитель и знаменатель первого из приведенных равенств на ω_5. Имеем:

$$i_{13}^{H} = \frac{\frac{\omega_1}{\omega_5} - 1}{\frac{\omega_3}{\omega_5} - 1} = \frac{i_{15} - 1}{i_{35} - 1},$$

откуда $i_{15} = i_{13}^{H}(i_{35} - 1) + 1$, или окончательно:

$$i_{15} = i_{12}i_{23}(i_{34}i_{15} - 1) + 1 = -\frac{z_2 z_3}{z_1 z_{2'}}\left(-\frac{z_4 z_5}{z_{3'} z_4} - 1\right) + 1.$$

После подстановки числовых значений имеем:

$$i_{15} = -\frac{52 \cdot 78}{24 \cdot 21}\left(-\frac{78}{18} - 1\right) + 1 = 43{,}8.$$

Глава 5-4

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ КУЛАЧКОВЫХ И МАЛЬТИЙСКИХ МЕХАНИЗМОВ [1, 7, 10, 12]

§ 5-7. Виды трехзвенных кулачковых механизмов

Трехзвенный кулачковый механизм состоит из ведущего *кулачка*, представляющего собой звено с криволинейным очертанием профиля, *ведомого звена* в общем случае также с криволинейным очерта-

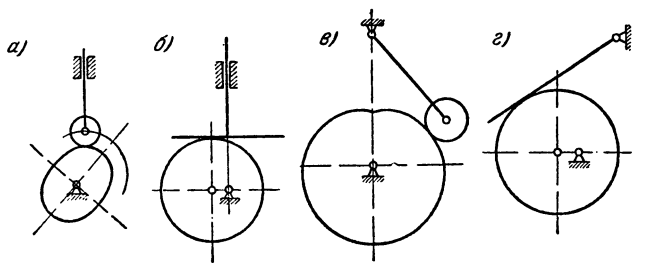


Рис. 5-33.

нием профиля и *стойки*, с которой указанные звенья образуют низшие пары (рис. 5-33). По большей части кулачок входит со стойкой во вращательную пару, а ведомое звено — либо во вращательную, либо в поступательную кинематические пары. В первом случае ведомое звено называется *коромыслом*, во втором — *толкателем*.

В механизмах с роликами различают *практический профиль* кулачка, по которому обкатывается ролик, и *теоретический* (рис. 5-33, *а*), эквидистантный практическому профилю и проходящий через центр вращения ролика. Практический профиль можно построить по теоретическому как огибающую отдельных положений ролика.

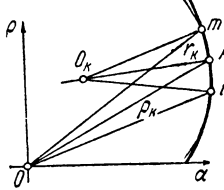


Рис. 5-34.

Радиус-вектор криволинейного звена обыкновенно задается таблицей значений его величин и значений его угла наклона к какому-либо определенному направлению, жестко связанному с кулачком.

Для кинематического исследования кулачкового механизма нужно знать положение и величину радиуса кривизны для каждой точки профиля кулачка. Графически радиус кривизны можно определить в результате построения окружности по трем точкам. Профиль кулачка разбивают на малые дуги, на каждой из которых намечают три точки, через которые и проводят окружности.

Для численного решения той же задачи можно воспользоваться следующим методом. Пусть профиль кулачка задан таблицей значений

радиуса-вектора ρ в зависимости от угла α наклона его радиуса-вектора к какому-либо заранее выбранному направлению, жестко связанному с кулачком. Выбрав три точки i, k и m, близко расположенные друг от друга, определим положение центра O_k окружности, проходящей через них (рис. 5-34). Обозначая через x и y с соответствующими индексами координаты точек, имеем следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(x_i - x_{O_k})^2 + (y_i - y_{O_k})^2 &= r_k^2,\\ (x_k - x_{O_k})^2 + (y_k - y_{O_k})^2 &= r_k^2,\\ (x_m - x_{O_k})^2 + (y_m - y_{O_k})^2 &= r_k^2.\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}35)$$

Аналогично определяются положения центров кривизны и остальных точек профиля кулачка.

§ 5-8. Кинематическое исследование кулачковых механизмов

Метод графического дифференцирования. Сначала строят диаграмму зависимости пути, проходимого ведомым звеном, от угла поворота кулачка или от времени, после чего, дифференцируя по времени указанную диаграмму, получают диаграмму зависимости скорости ведомого звена от времени; второе дифференцирование позволяет получить аналогичную зависимость ускорения от времени.

Пример. Требуется построить диаграммы $s = s\,(t)$, $v = v\,(t)$ и $a = a\,(t)$ для звена 2 кулачкового механизма (рис. 5-35), если кулачок вращается с постоянной угловой скоростью ω_1.

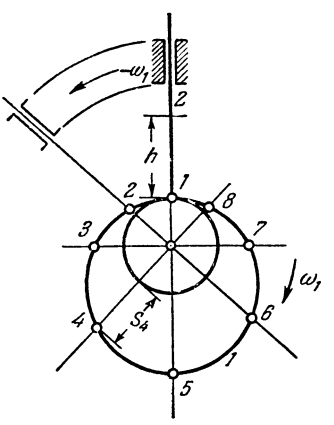


Рис. 5-35.

Перемещения звена 2 можно определить *методом обращения движения*, заключающегося в том, что всей рассматриваемой системе сообщается движение с угловой скоростью $-\omega_1$, вследствие чего кулачок остается неподвижным, а толкатель 2 дополнительно к своему движению вращается, принимая относительно кулачка те положения, которые получаются в действительном движении (рис. 5-35). Выполненный на рис. 5-35 чертеж позволяет построить в масштабе μ_s *м/мм* диаграмму $s = s\,(t)$ (рис. 5-36, *а*), воспользовавшись которой, можно построить диаграмму $v = v\,(t)$. Для этой цели удобно воспользоваться методом секущих. Чтобы определить первую производную заданной зависимости в какой-либо точке A (рис. 5-36, *а*), следует от нее в обе стороны отложить небольшие равные отрезки Aa и Aa' с таким расчетом, чтобы дуга aa' по своей форме была близка к прямой. После этого через точки a и a' проводят прямую, тангенс угла наклона

которой к оси абсцисс пропорционален значению первой производной в точке A. Выбрав на оси абсцисс точку O на расстоянии k *мм*, проводим через нее линию, параллельную прямой aa'. Отрезок $1\text{-}a$ можно рассматривать в качестве ординаты скорости толкателя 2 в масштабе

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{k\mu_t} \frac{м/сек}{мм}. \qquad (5\text{-}36)$$

Получив описанным образом несколько ординат, можно построить диаграмму $v = v(t)$, изображенную на рис. 5-36, *б*.

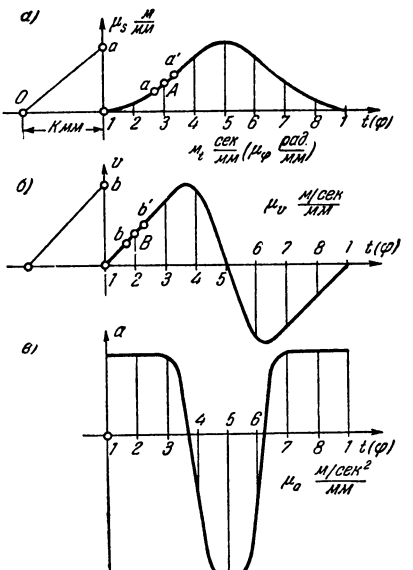


Рис. 5-36.

Диаграмма $a = a(t)$ (рис. 5-36, *в*) может быть построена аналогично по диаграмме $v = v(t)$.

Векторный метод. Векторный метод можно применять только после того, как будут определены положения центров кривизны профиля кулачка.

1. Рис. 5-37. Для решения можно воспользоваться векторным многоугольником AO_kBCA, в котором сторона AC устанавливает искомое положение звена 2.

При понятных из предыдущего обозначениях имеем:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_{1'}\mathbf{e}_{1'} - l_{2'}\mathbf{e}_{2'} - l_2\mathbf{e}_2 = 0. \qquad (5\text{-}37)$$

В последнем уравнении неизвестными являются величина l_2 и орт $\mathbf{e}_1'$. Второе из указанных неизвестных для нас интереса не представляет, поэтому мы его исключим, для чего изолируем $l_1'\mathbf{e}_1'$ и воз-

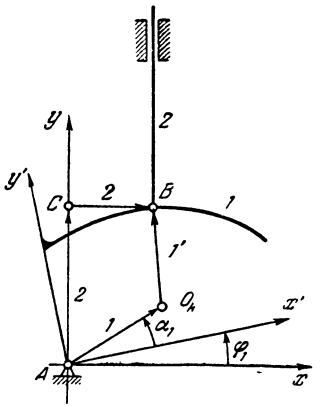


Рис. 5-37.

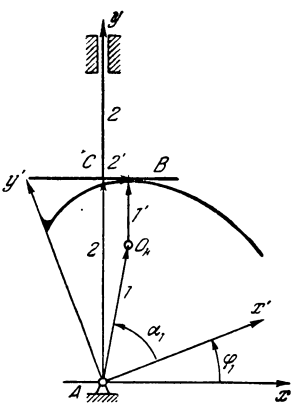


Рис. 5-38.

ведем полученное таким образом равенство в скалярный квадрат. В результате соответствующих преобразований получается квадратное уравнение с неизвестным l_2.

2. Рис. 5-38. Уравнение замкнутости имеет следующий вид:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_1'\mathbf{j} - l_2'\mathbf{i} - l_2\mathbf{j} = 0. \qquad (5\text{-}38)$$

Для определения неизвестного l_2, устанавливающего положение звена 2, уравнение (5-38) следует скалярно умножить на орт $\mathbf{j}$.

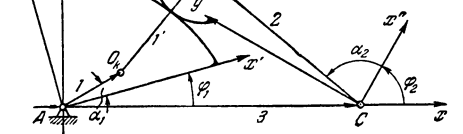


Рис. 5-39.

Рис. 5-39. Воспользуемся следующим уравнением замкнутости векторного многоугольника AO_kO_mCA:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_1'\mathbf{e}_1' - l_2\mathbf{e}_2 - l_3\mathbf{e}_3 = 0. \qquad (5\text{-}39)$$

Для определения неизвестного φ_2 изолируем второе слагаемое левой части уравнения (5-39), после чего возведем полученное равенство в скалярный квадрат.

Аналогичными методами можно определить положения и других кулачковых механизмов.

Задача о скоростях и ускорениях может быть решена дифференцированием по времени соответствующих уравнений замкнутости. По ним либо можно построить планы скоростей и ускорений, либо эти уравнения можно решать численными методами.

§ 5-9. Мальтийские механизмы

Мальтийский механизм (рис. 5-40), часто называемый *механизмом мальтийского креста*, состоит из двух подвижных звеньев *1* и *2* и стойки. При помощи такого механизма осуществляется передача вращения с периодическими остановками. Число пазов у звена *2* может быть не менее трех, пальцев звена *1* может быть также несколько.

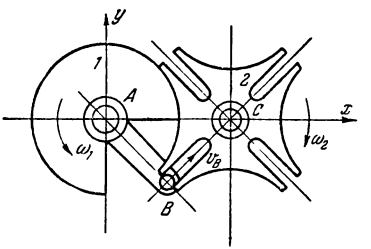


Рис. 5-40.

Кинематическое исследование мальтийских механизмов можно производить такими же графическими или численными методами, какими мы пользовались выше. В данном случае имеем следующее уравнение замкнутости:

$$l_{AB}\mathbf{e}_{AB} - l_{CB}\mathbf{e}_{CB} - l_{AC}\mathbf{i} = 0, \quad (5\text{-}40)$$

которое после изолирования второго слагаемого решается возведением в скалярный квадрат, что позволяет определить l_{CB}. После этого величину φ_{CB} можно установить скалярным умножением (5-40) на орт $\mathbf{i}$ или на $\mathbf{j}$.

Задача о скоростях и ускорениях может быть решена дифференцированием уравнения (5-40) по времени.

Глава 5-5

КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ [8]

§ 5-10. Основные зависимости аналитической геометрии (рис. 5-41)

$$\mathbf{l}_i = l_i\mathbf{e}_i = l_i(\mathbf{i}x_i + \mathbf{j}y_i + \mathbf{k}z_i) = \mathbf{i}X_i + \mathbf{j}Y_i + \mathbf{k}Z_i = l_i(\mathbf{i}\cos\alpha_i + \mathbf{j}\cos\beta_i + \mathbf{k}\cos\gamma_i), \quad (5\text{-}41)$$

где $\mathbf{l}_i$ — вектор; l_i и $\mathbf{e}_i$ — его алгебраическое значение и орт; $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ — орты осей координат; x_i, y_i и z_i — проекции орта $\mathbf{e}_i$ на оси

координат; X_i, Y_i и Z_i — проекции вектора $\mathbf{l}_i$ на оси координат; α_i, β_i и γ_i — углы наклона вектора $\mathbf{l}_i$ к осям координат.

$$X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = l_i^2, \quad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1. \tag{5-42}$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0. \tag{5-43}$$

$$\cos \alpha_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{i}, \quad \cos \beta_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{j}, \quad \cos \gamma_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{k}. \tag{5-44}$$

$$\cos \widehat{\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = x_p x_q + y_p y_q + z_p z_q. \tag{5-45}$$

$$\mathbf{e}_t \sin \widehat{\mathbf{e}_p \mathbf{e}_q} = \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_q = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ x_q & y_q & z_q \end{vmatrix}, \tag{5-46}$$

где орт $\mathbf{e}_t$ представляет собой перпендикуляр к ортам $\mathbf{e}_p$ и $\mathbf{e}_q$. Опре-

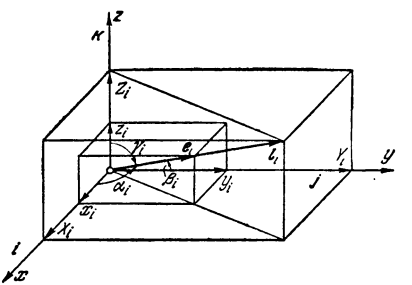


Рис. 5-41.

делитель развертывается по элементам первой строки.

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}, \\ &\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{j}. \end{aligned}\right\} \tag{5-47}$$

Направление вектора l в одной системе $Oxyz$ задано ортом

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z \tag{5-48}$$

и в другой системе $O'x'y'z'$ — аналогичным ортом

$$\mathbf{e} = \mathbf{i}'x' + \mathbf{j}'y' + \mathbf{k}'z', \tag{5-49}$$

где штрихами обозначены орты осей второй системы координат и проекции орта в той же системе.

Связь между проекциями ортов в разных системах:

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{i} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{i} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{i}, \\ y &= x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{j} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{j} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{j}, \\ z &= x'\mathbf{i}' \cdot \mathbf{k} + y'\mathbf{j}' \cdot \mathbf{k} + z'\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}50)$$

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}' + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}' + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}', \\ y' &= x\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}' + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}' + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}', \\ z' &= x\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}' + y\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}' + z\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}51)$$

Дифференцируя второе равенство (5-42) по какому-либо аргументу, например по времени, получаем:

$$\mathbf{e}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_i = x_i \cdot \dot{x}_i + y_i \dot{y}_i + z_i \cdot \dot{z}_i = 0, \quad (5\text{-}52)$$

где точками обозначены первые производные по времени.

Второе дифференцирование по времени дает:

$$\dot{\mathbf{e}}_i \cdot \dot{\mathbf{e}}_i + \mathbf{e}_i \cdot \ddot{\mathbf{e}}_i = \dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2 + x_i \ddot{x}_i + y_i \ddot{y}_i + z_i \ddot{z}_i = 0. \quad (5\text{-}53)$$

§ 5-11. Кривошипно-шатунный механизм

В многоугольнике *OABCO* (рис. 5-42) следующие параметры являются постоянными: l_1, l_2, l_4, углы α_3, β_3 и γ_3 наклона стержня *3*, углы α_4, β_4 и γ_4 наклона стойки *4* (на рис. 5-42 не показаны). Для решения задачи все

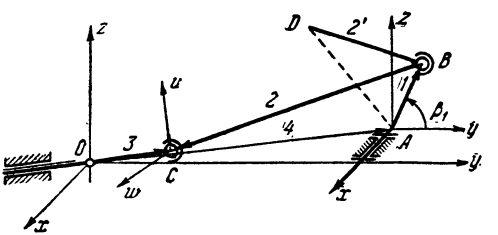


Рис. 5-42.

постоянные должны быть заданы. Переменными параметрами являются угол β_1 наклона вектора $\mathbf{l}_1$ к оси *Ay*, углы α_2, β_2 и γ_2 наклона вектора $\mathbf{l}_2$ к осям координат, алгебраическое значение вектора l_3. Указанные параметры связаны уравнением замкнутости многоугольника *OABCO*:

$$l_4\mathbf{e}_4 + l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 = l_3\mathbf{e}_3, \quad (5\text{-}54)$$

которое может быть развернуто в три уравнения проекций на оси координат, и равенством

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 = 1, \quad (5\text{-}55)$$

где $\mathbf{e}_2$, x_2, y_2, z_2 — орт вектора $\mathbf{l}_2$ и проекции орта на оси координат.

Если один из переменных параметров, например β_1, задан, то рассматриваемая задача о положениях звеньев может быть решена. Для решения возведем уравнение (5-54) в скалярный квадрат, благодаря чему

можно будет определить неизвестное l_3. После этого углы α_2, β_2 и γ_2 можно будет определить при помощи уравнения (5-54).

Решение задачи о скоростях производится дифференцированием по времени уравнений (5-54) и (5-55). В таком случае имеем:

$$\dot{l}_1\mathbf{e}_1 + l_2\dot{\mathbf{e}}_2 = \dot{l}_3\mathbf{e}_3, \tag{5-56}$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 = x_2\dot{x}_2 + y_2\dot{y}_2 + z_2\dot{z}_2 = 0. \tag{5-57}$$

В уравнении (5-56) неизвестными являются величины $\dot{\mathbf{e}}_2$ и $\dot{l}_3$, из которых последняя представляет собой скорость ползуна. Для определения $\dot{l}_3$ скалярно умножим уравнение (5-56) на орт $\mathbf{e}_2$.

Имеем:

$$\dot{l}_1\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + l_2\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \dot{l}_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2. \tag{5-58}$$

Так как (рис. 5-42)

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{j}\cos\beta_1 + \mathbf{k}\sin\beta_1, \tag{5-59}$$

то, дифференцируя последнее равенство по времени, получаем:

$$\dot{\mathbf{e}}_1 = \omega_1(-\mathbf{j}\sin\beta_1 + \mathbf{k}\cos\beta_1), \tag{5-60}$$

где ω_1 — заданная угловая скорость звена *1*, которую мы в дальнейшем будем считать постоянной.

$$\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = (-\mathbf{j}\sin\beta_1 + \mathbf{k}\cos\beta_1)(\mathbf{i}x_2 + \mathbf{j}y_2 + \mathbf{k}z_2)\,\omega_1 = \\ = (-y_2\sin\beta_1 + z_2\cos\beta_1)\,\omega_1, \tag{5-61}$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = x_3x_2 + y_3y_2 + z_3z_2. \tag{5-62}$$

Величину $\dot{l}_3$ скорости ползуна теперь можно определить из следующего соотношения:

$$\dot{l}_3 = l_1\frac{\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2}, \tag{5-63}$$

после чего непосредственно из уравнения (5-56) определяется производная $\dot{\mathbf{e}}_2$ орта $\mathbf{e}_2$. Проекции этой производной получаются после развертывания этого уравнения в уравнения проекций.

Для решения задачи об ускорениях дифференцируем уравнения (5-56) и (5-57) по времени. Имеем:

$$\ddot{l}_1\mathbf{e}_1 + 2\dot{l}_1\dot{\mathbf{e}}_1 + l_2\ddot{\mathbf{e}}_2 = \ddot{l}_3\mathbf{e}_3 + \dot{l}_3\dot{\mathbf{e}}_3, \tag{5-64}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 + \mathbf{e}_2 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2 + x_2\ddot{x}_2 + y_2\ddot{y}_2 + z_2\ddot{z}_2 = 0. \tag{5-65}$$

Для решения (5-64) скалярно умножаем его на орт $\mathbf{e}_2$. В таком случае получаем:

$$\ddot{l}_1\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2 + 2\dot{l}_1\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 + l_2\ddot{\mathbf{e}}_2 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2 = \ddot{l}_3\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 + \dot{l}_3\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_2. \tag{5-66}$$

Скалярные произведения ортов, входящих в (5-66), расшифровываются аналогично случаю задачи о скоростях.

Ускорение $\ddot{l}_3$ ползуна на основании (5-64) получается следующим:

$$\ddot{l}_3 = l_1\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \ddot{\mathbf{e}}_1}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2} - l_2\frac{\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \dot{\mathbf{e}}_2}{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2}. \tag{5-67}$$

Проекции второй производной $\ddot{\mathbf{e}}_2$ орта $\mathbf{e}_2$ можно определить после развертывания уравнения (5-64) в уравнения проекций.

Для определения закона движения шатуна *2* (рис. 5-42) как пространственного тела следует указать дополнительные данные, устанавливаемые шаровой с пальцем парой. На рис. 5-42 показан узел, образуе-

мый шатуном 2 со стержнем 3, входящими друг с другом в шаровую с пальцем пару. Здесь палец u жестко связан с стержнем 3, а ось Cw, перпендикулярная к плоскости щели для пальца, жестко связана с шатуном 2. Ось u необходимо задать в системе звена 3, а ось Cw — в системе шатуна 2. Согласно рис. 5-42 стержень 3, соединенный со стойкой направляющей шпонкой, не имеет возможности вращаться вокруг собственной оси, вследствие чего палец u может совершать только прямолинейное поступательное движение.

Введем следующие обозначения косинусов углов: 1) между u и Oz косинус обозначим c_{uz}; 2) между u и OC обозначим c_{u3}; 3) между w и u косинус равен нулю; 4) между w и BC косинус обозначим c_{w2}.

Руководствуясь равенством (5-45), можно написать:

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{k} = c_{uz}, \quad \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_3 = c_{u3}, \quad \mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_u = 1, \tag{5-68}$$

что в развернутом виде можно представить так:

$$z_u = c_{uz}, \quad x_3 x_u + y_3 y_u + z_3 z_u = c_{u3}, \quad x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = 1. \tag{5-69}$$

Из последних уравнений определяются величины x_u, y_u и z_u проекции орта $\mathbf{e}_u$.

Для определения орта $\mathbf{e}_w$ можно воспользоваться следующими уравнениями:

$$\mathbf{e}_u \cdot \mathbf{e}_w = 0, \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_w = c_{w2}, \quad \mathbf{e}_w \cdot \mathbf{e}_w = 1, \tag{5-70}$$

которые развертываются в уравнения проекций аналогично предыдущим.

Теперь мы имеем возможность перейти к определению положения любой точки D (рис. 5-42), заданной в системе шатуна 2 длиной $l_{2'}$ отрезка BD и углами его наклона к осям BC и w. Обозначая косинусы указанных углов через $c_{2'2}$ и $c_{2'w}$, для определения орта $\mathbf{e}_{2'}$ воспользуемся следующими уравнениями:

$$\mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_2 = c_{2'2}, \quad \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_w = c_{2'w}, \quad \mathbf{e}_{2'} \cdot \mathbf{e}_{2'} = 1, \tag{5-71}$$

которые решаются аналогично предыдущим.

Наконец, из уравнения замкнутости треугольника $ABDA$ можно определить радиус-вектор точки D, устанавливающий ее положение.

Определение скорости и ускорения точки D производится последовательным дифференцированием по времени рассмотренных уравнений.

§ 5-12. Кривошипно-коромысловый механизм

Рис. 5-43. Постоянные параметры: l_1, l_2, l_3, l_4, α_4, β_4, γ_4, углы $\alpha_{x'}$, $\beta_{x'}$, $\gamma_{x'}$ наклона оси Ax' вращения кривошипа 1 к осям координат системы $Oxyz$, углы α_x, β_x, γ_x наклона оси вращения коромысла 3 к осям той же системы (здесь $\alpha_x = 0°$, $\beta_x = \gamma_x = 90°$). Переменные параметры: β'_1; α_2, β_2, γ_2 и β_3. Будем считать параметр β'_1 заданным. Неизвестными являются углы α_2, β_2, γ_2 и угол β_3.

Для решения составим уравнение замкнутости многоугольника $ABCDA$:

$$l_1\mathbf{e}_1 + l_2\mathbf{e}_2 - l_3\mathbf{e}_3 + l_4\mathbf{e}_4 = 0. \tag{5-72}$$

В системе $Ax'y'z'$ орт $\mathbf{e}_1$ выражается так:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i}' \cdot 0 + \mathbf{j}'y'_1 + \mathbf{k}'z'_1, \tag{5-73}$$

где $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и $\mathbf{k}'$ — орты осей координат системы $Ax'y'z'$, которые выражаются следующим образом:

$$\mathbf{i}' = \mathbf{i}\cos\alpha_{x'} + \mathbf{k}\sin\alpha_{x'}, \quad \mathbf{j}' = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}' = -\mathbf{i}\sin\alpha_{x'} + \mathbf{k}\cos\alpha_{x'}. \tag{5-74}$$

В основной системе орты $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_3$ можно выразить так:

$$\mathbf{e}_1 = -\mathbf{i}\sin\alpha_{x'}\sin\beta'_1 + \mathbf{j}\cos\beta'_1 + \mathbf{k}\cos\alpha_{x'}\cos\beta'_1, \tag{5-75}$$

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{j}\cos\beta_3 + \mathbf{k}\sin\beta_3. \tag{5-76}$$

Для определения неизвестного орта $\mathbf{e}_3$ после изолирования слагаемого $l_2\mathbf{e}_3$ следует возвести уравнение (5-72) в скалярный квадрат. В результате уже известных преобразований получается уравнение, из которого определяется искомый угол β_3. Дальнейшим решением из уравнения (5-72) устанавливаются величины α_2, β_2 и γ_2.

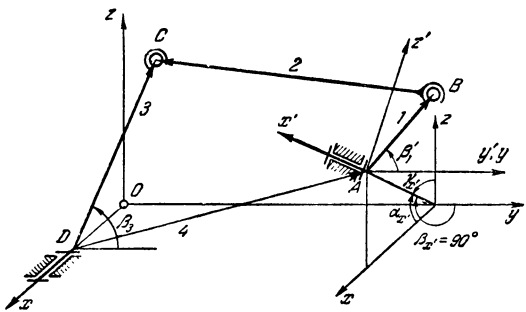


Рис. 5-43.

Решение задачи о скоростях и ускорениях производится после дифференцирования по времени только что приведенных уравнений. Решение полученных указанным образом уравнений выполняется методами, изложенными в предыдущем параграфе.

Определение закона движения шатуна аналогично описаному для случая кривошипно-шатунного механизма. Так как изложенными методами можно определить скорости и ускорения любых точек механизма, то можно установить законы движения и дополнительных звеньев, соединенных с рассмотренным механизмом. Таким образом, описанными методами могут быть решены задачи кинематического исследования сложных пространственных механизмов.

Глава 5-6

ТЕОРИЯ ЗУБЧАТОГО ЗАЦЕПЛЕНИЯ [1, 4, 5]

§ 5-13. Построение искомого профиля, сопряженного с заданным

Условие, которому должны удовлетворять профили зубьев колес с постоянным передаточным отношением: нормаль, проведенная через точку соприкосновения двух зубьев (в любом их положении), должна проходить через одну и ту же точку линии центров (*полюс зацепления*,

или мгновенный центр в относительном движении звеньев). Геометрическое место мгновенных центров относительного движения — *начальная окружность*.

Задача. По заданному профилю одного звена построить искомый сопряженный (удовлетворяющий приведенному выше условию) профиль другого звена.

Решение. 1) Определение положения полюса зацепления P (рис. 5-44). Заданы A, i_{12} и форма профиля 1—2. Для определения r_1 и r_2 имеем:

$$\frac{r_2}{r_1} = i_{12}, \quad r_1 + r_2 = A. \tag{5-77}$$

2) Определение формы искомого профиля. Взяв на заданном профиле точку 1, определяем положение точки $1'$ искомого профиля, в которой 1 и $1'$ соприкасаются. Точки, приходящие в соприкосновение, называются

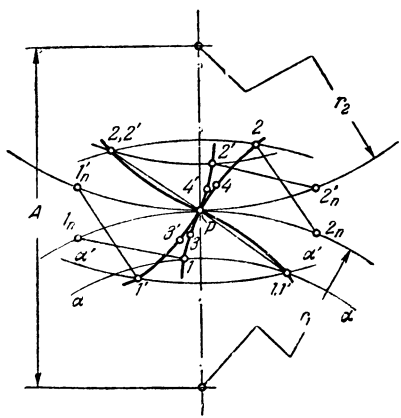


Рис. 5-44.

сопряженными. Проводим нормаль 1—1_n в точке 1. Так как нормали 1—1_n и $1'$—$1'_n$ в момент встречи точек должны проходить через P, то место встречи 1, $1'$ находится на пересечении дуги $\alpha - \alpha$ и дуги, описанной из полюса P радиусом 1—1_n. Конец $1'_n$ нормали $1' - 1'_n$ искомой точки в исходном положении находится на дуговом расстоянии $P1'_n$, равном дуговому расстоянию $P1_n$. Сама точка $1'$ располагается на пересечении дуги $\alpha' - \alpha'$ и дуги, проведенной из точки $1'_n$ радиусом $1'_n - 1'$, равным $1_n - 1$.

Таким же способом определяются и положения искомых точек $2'$, $3'$, $4'$ и т. д. Обводя плавной кривой все найденные точки, получаем форму искомого профиля $1'$—$2'$.

Основные параметры зубчатого зацепления. Размеры профилей практически ограничены, а потому звенья, называемые *зубчатыми колесами*, снабжаются несколькими профилями (*зубьями*), позволяющими поддерживать непрерывное вращение.

Шаг зубчатого зацепления — расстояние между двумя одноименными точками двух соседних профилей (зубьев), взятое по какой-либо окружности (рис. 5-45). Имеем:

$$\left.\begin{aligned} zt &= 2\pi R; \\ R &= \frac{z}{2}\frac{t}{\pi} = \frac{z}{2}m, \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}78)$$

где отношение величины шага к числу π называется *модулем* зацепления.

Стандартные величины модулей (ОСТ 1597). Модули в *мм*: 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 1,00; 1,25; 1,50; 1,75; 2,00; 2,25; 2,50; (2,75); 3,00; (3,25); 3,50; 3,75; 4,00; (4,25); 4,50; 5,00; 5,5; 6,0; 6,5; 7,0; 8,0; 9,0; 10,0; 11,0; 12,0; 13,0; 14,0; 15,0; 16,0; 18,0; 20,0; 22,0; 24,0; 26,0; 28,0; 30,0; 33,0; 36,0; 39,0; 42,0; 45,0; 50,0 и т. д. через 5 *мм*.

Значения модулей, заключенные в скобки, рекомендуется применять только в исключительных случаях.

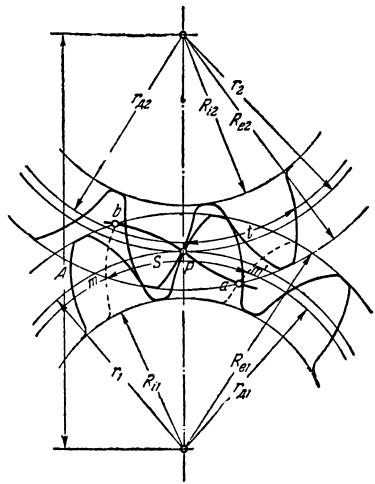


Рис. 5-45.

Делительная окружность — окружность, радиус $r_д$ которой равен половине произведения числа зубьев на стандартную величину модуля:

$$r_д = \frac{z}{2}m. \quad (5\text{-}79)$$

Геометрическое место точек касания двух профилей зубьев называется *линией зацепления* (линия aPb на рис. 5-45). *Дуга зацепления* — дуга, на которую поворачивается колесо парой соприкасающихся зубьев (дуга mm' на рис. 5-45). *Коэффициент перекрытия* ε — отношение дуги зацепления к шагу зацепления.

§ 5-14. Эвольвентное зацепление

Эвольвента окружности (рис. 5-46) — кривая, описываемая точкой прямой, перекатываемой без скольжения по окружности, называемой *основной*. Перекатываемая прямая называется *образующей* прямой. Форма эвольвенты зависит исключительно от величины радиуса основной окружности. Эвольвента — кривая, ограниченная с одной стороны. Начальная точка — точка M_0, расположенная на основной окружности (рис. 5-46). Радиус ρ кривизны эвольвенты в точке M — отрезок AM от точки касания A до точки M. Дуга M_0A основной окружности равна радиусу кривизны AM. Эвольвенты одной и той же окружности эквидистантны.

Основные соотношения, характеризующие эвольвенту (рис. 5-46):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AM}{r_0} = \frac{M_0A}{r_0} = \theta + \alpha;\ \operatorname{inv}\alpha = \theta = \operatorname{tg}\alpha - \alpha, \qquad (5\text{-}80)$$

где угол θ называется *инволютой угла* α ($\operatorname{inv}\alpha$). Инволюта является эвольвентной функцией, таблица значений которой приводится ниже.

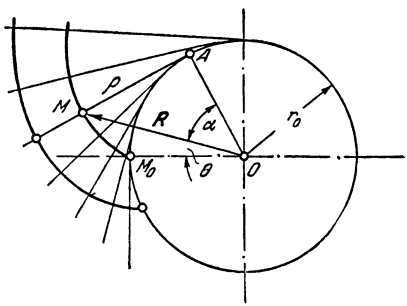


Рис. 5-46.

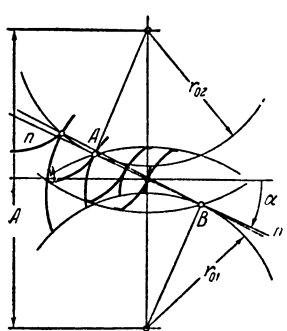


Рис. 5-47.

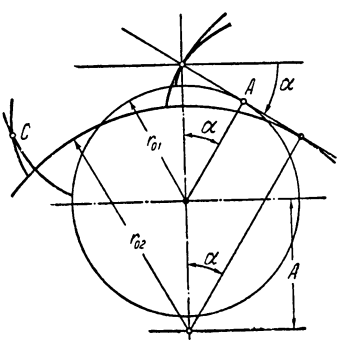


Рис. 5-48.

Величина радиуса-вектора **R** эвольвенты определяется по заданному углу α и радиусу основной окружности следующим образом:

$$R = \frac{r_0}{\cos\alpha}. \qquad (5\text{-}81)$$

Линией эвольвентного зацепления является общая касательная *nn* к двум основным окружностям (рис. 5-47). Эвольвентное зацепление получается ограниченным. Пределы его — точки *A* и *B*. За этими пределами зацепление возможно, но оно не удовлетворяет основному

Таблица 5-1. **Значения $\theta = \text{inv}\,\alpha$**

α°	Порядок	0°	10	20	30	40	50
1	0,000	00 177	00 281	00 420	00 598	00 821	01 092
2	0,000	01 418	01 804	02 253	02 771	03 364	04 035
3	0,000	04 790	05 634	06 573	07 610	08 751	10 000
4	0,000	11 364	12 847	14 453	16 189	18 059	20 067
5	0,000	22 220	24 522	26 978	29 594	32 394	35 324
6	0,00	03 845	04 175	04 524	04 892	05 280	05 687
7	0,00	06 115	06 564	07 035	07 528	08 044	08 582
8	0,00	09 145	09 732	10 343	10 980	11 643	12 332
9	0,00	13 048	13 792	14 563	15 363	16 193	17 051
10	0,00	17 941	18 860	19 812	20 795	21 810	22 859
11	0,00	23 941	25 057	26 208	27 394	28 616	29 875
12	0,00	31 171	32 504	33 875	35 285	36 735	38 224
13	0,00	39 754	41 325	42 938	44 593	46 291	48 033
14	0,00	49 819	51 650	53 526	55 448	57 417	59 434
15	0,00	61 498	63 611	65 773	67 985	70 248	79 561
16	0,0	07 493	07 735	07 982	08 234	08 492	08 756
17	0,0	09 025	09 299	09 580	09 866	10 158	10 456
18	0,0	10 760	11 071	11 387	11 709	12 038	11 373
19	0,0	12 715	13 063	13 418	13 779	14 148	14 523
20	0,0	14 904	15 293	15 689	16 092	16 502	16 920
21	0,0	17 345	17 777	18 217	18 665	19 120	19 583
22	0,0	20 054	20 533	21 019	21 514	22 018	22 529
23	0,0	23 048	23 577	24 114	24 660	25 214	25 778
24	0,0	26 350	26 931	27 521	28 121	28 729	29 348
25	0,0	29 975	30 613	31 260	31 917	32 583	33 260
26	0,0	33 947	34 644	35 352	36 069	36 798	37 537
27	0,0	38 287	39 047	39 819	40 602	41 395	42 201
28	0,0	43 017	43 845	44 685	45 537	46 400	47 276
29	0,0	48 164	49 064	49 976	50 901	51 838	52 788
30	0,0	53 751	54 728	55 717	56 720	57 736	58 765
31	0,0	59 809	60 865	61 937	63 022	64 122	65 236
32	0,0	66 364	67 507	68 665	69 838	71 026	72 230
33	0,0	73 449	74 684	75 934	77 200	78 483	79 781
34	0,0	81 097	82 428	83 777	85 142	86 525	87 925
35	0,0	89 342	90 777	92 230	93 701	95 190	96 698
36	0,	09 822	09 977	10 133	10 292	10 452	10 614
37	0,	10 778	10 944	11 113	11 283	11 455	11 630
38	0,	11 806	11 985	12 165	12 348	12 534	12 721
39	0,	12 911	13 102	13 297	13 493	13 692	13 893
40	0,	14 097	14 303	14 511	14 722	14 936	15 152
41	0,	15 370	15 591	15 815	16 041	16 270	16 502
42	0,	16 737	16 974	17 214	17 457	17 702	17 951
43	0,	18 202	18 457	18 714	18 975	19 238	19 505
44	0,	19 774	20 047	20 323	20 603	20 885	21 171
45	0,	21 460	21 753	22 049	22 348	22 651	22 958
46	0,	23 268	23 582	23 899	24 220	24 545	24 874
47	0,	25 206	25 543	25 883	26 228	26 576	26 929
48	0,	27 285	27 646	28 012	28 381	28 755	29 133
49	0,	29 516	29 903	30 295	30 691	31 092	31 498

закону — общая нормаль не проходит через полюс зацепления. Точки A и B — основания перпендикуляров, опущенных из центров основных окружностей на линию зацепления. Окружности, проведенные через точки A и B, отсекают на профилях предельные точки участков эвольвент, удовлетворяющих основному закону.

Угол зацепления — угол наклона линии эвольвентного зацепления к перпендикуляру к линии центров. Межцентровое расстояние A можно определить по заданным r_{O_1} и r_{O_2} и углу зацепления. Имеем:

$$A = \frac{r_{O_1} + r_{O_2}}{\cos \alpha}. \qquad (5\text{-}82)$$

Рассмотренное выше зацепление называется *внешним*. Внутреннее зацепление получается тогда, когда одно колесо располагается внутри другого (рис. 5-48). Линия внутреннего зацепления колес имеет только одну предельную точку (точка A на рис. 5-48). Правее указанной точки зацепление невозможно. При небольшой разнице между r_{O_1} и r_{O_2} возможно пересечение эвольвент и на рабочем участке линии зацепления (положение C на рис. 5-48). Это явление называется *интерференцией*.

Межцентровое расстояние:

$$A = \frac{r_{O_2} - r_{O_1}}{\cos \alpha}. \qquad (5\text{-}83)$$

Если радиус основной окружности одного колеса увеличивать, то эвольвента такой окружности будет распрямляться и в пределе основная окружность и эвольвента обратятся в прямые.

§ 5-15. Зацепление рейки с зубчатым колесом

Зубчатая рейка, по схеме которой выполняется зуборезный инструмент, представляет собой прямую пластину с трапецеидальными зубьями (рис. 5-49). Угол α_0 наклона боковой грани трапеции в соответствии с нашими стандартами равен 20°. Часть зуба, расположенная выше средней линии mm, называемой *модульной прямой*, называется *головкой*, ниже расположенная часть — *ножкой*. Высота прямолинейной части

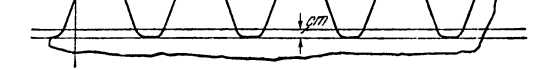


Рис. 5-49.

профиля головки, выраженная в модулях, определяется *коэффициентом высоты* f, равным 1 для нормального зуба и 0,8 — для укороченного. Прямолинейная часть профиля ножки выполняется такой же высоты. Высота закругленных частей головки и основания зуба (впадины) равна cm, где $c = 0{,}25$ для нормального зуба и $c = 0{,}3$ для укороченного зуба.

Величины шагов рейки на различных расстояниях от модульной прямой равны, но толщина зуба и ширина впадины получаются разными. Только на уровне модульной прямой указанные размеры равны.

Форма зуба колеса, сопряженного с заданным профилем зуба рейки, зависит от их относительного расположения. На рис. 5-50 показаны возможные относительные положения рейки и колеса.

Сдвигом реечного исходного контура называется смещение модульной прямой относительно касательной к делительной окружности колеса

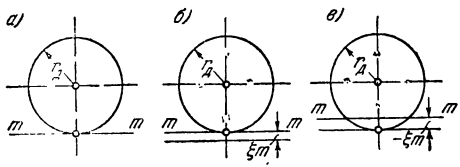


Рис. 5-50.

(рис. 5-50). *Коэффициент сдвига* ξ — смещение, выраженное в модулях; *абсолютный сдвиг* χ — смещение в *мм*. Имеем:

$$\xi = \frac{\chi}{m}. \qquad (5\text{-}84)$$

Зацепление реечного исходного контура с колесом при $\xi = 0$. На рис. 5-51 показан исходный контур в виде наклонной прямой с закругленными концами. Требуется определить форму профиля зуба колеса.

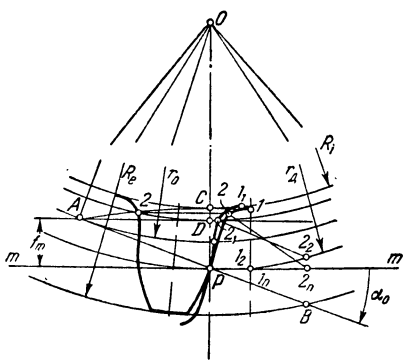


Рис. 5-51.

Для решения воспользуемся методом, изложенным в § 5-12. Точка *1* исходного контура располагается на середине его вершины. Нормаль в этой точке перпендикулярна к модульной прямой *mm*, так что при движении исходного контура эта нормаль будет перемещаться параллельно линии *OP*, и в момент касания точек *1* и 1_1 заданного и искомого профилей она совпадет с линией *CP*. Для нахождения положения искомой точки 1_1 следует на дуге окружности радиуса *OP* отложить расстояние, равное $P1_2$, измеренное по модульной прямой. Из полученной точки 1_2 радиусом, равным нормали $1—1_n$, необходимо сделать

засечку на окружности радиуса OC; эта засечка и определит положение искомой точки 1_1. Определение положений других точек 2_1, 3_1, 4_1, ... производится аналогично.

На рис. 5-51 при $\xi = 0$ соотношение размеров колеса и реечного исходного контура выбрано таким, что крайняя точка линии эвольвентного зацепления совпадает с точкой A. Далее точки A эвольвентное зацепление невозможно. В данном случае мы имеем предельное соотношение размеров колеса и исходного контура, при котором еще возможно эвольвентное зацепление.

Предельное число $z_{пр}$ зубьев, при котором еще возможно эвольвентное зацепление, равно:

$$z_{пр} = \frac{2f}{\sin^2 \alpha_0}. \qquad (5\text{-}85)$$

При $\alpha_0 = 20°$ и $f = 1$ имеем:

$$z_{пр} = 17. \qquad (5\text{-}86)$$

Радиус окружности впадин равен:

$$R_i = m\frac{z - f - c}{2}. \qquad (5\text{-}87)$$

Радиус окружности выступов R_e получается обработкой на токарном станке и от исходного контура не зависит.

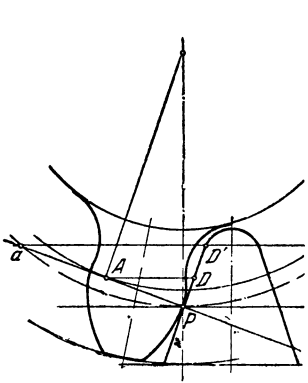


Рис. 5-52.

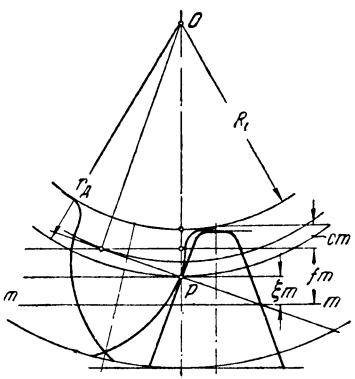


Рис. 5-53.

На рис. 5-52 показано колесо с малым числом зубьев. Траектория конца прямолинейного участка реечного исходного контура пересекает линию PA зацепления левее точки A (точка a на рис. 5-52). Часть DD' прямолинейной части исходного контура не участвует в образовании эвольвентного профиля. В таком случае неэвольвентная часть профиля получается такой, что ножка зуба оказывается тонкой и часть эвольвентного профиля срезанной. При таких условиях имеет место *подрезание ножки зуба* — нежелательное явление из-за ослабления зуба.

Явление подрезания можно исключить, если сдвинуть модульную прямую реечного исходного контура так, как показано на рис. 5-53.

Здесь делительная окружность касается не модульной, а другой прямой, расположенной на расстоянии $\chi = \xi m$ от нее. Со сдвигом исходного контура происходит изменение формы зуба — зуб у основания становится толще, к вершине быстро утончается, появляется опасность срезания части головки (рис. 5-53).

Коэффициент сдвига, необходимый для устранения явления подрезания, равен:

$$\xi = f \frac{z_{\text{пр}} - z}{z_{\text{пр}}}. \tag{5-88}$$

Радиус окружности впадин:

$$R_i = r_{\text{д}} + m(\xi - f - c). \tag{5-89}$$

Сдвиг модульной прямой внутрь делительной окружности колеса (отрицательный сдвиг) производится в тех случаях, когда колесо имеет число зубьев больше предельного и когда нужно выдержать определенное расстояние между центрами колес передачи. При таком сдвиге зуб у основания становится тоньше, прочность его получается небольшой.

Основные параметры зуба, нарезанного реечным исходным контуром: толщина зуба по делительной окружности

$$s_{\text{д}} = m\left(\frac{\pi}{2} + 2\xi \operatorname{tg} \alpha_0\right), \tag{5-90}$$

толщина зуба по основной окружности

$$s_O = r_O\left(\frac{s_{\text{д}}}{r_{\text{д}}} + 2 \operatorname{inv} \alpha_0\right), \tag{5-91}$$

толщина зуба по окружности произвольно заданного радиуса

$$s = R_{\text{п}}\left(\frac{s_O}{r_O} - 2 \operatorname{inv} \alpha_{\text{п}}\right),$$

где

$$\cos \alpha_{\text{п}} = \frac{r_O}{R_{\text{п}}}. \tag{5-92}$$

§ 5-16. Зацепление колес, сопряженных с одним и тем же исходным контуром

Из общей теории зубчатого зацепления известно, что два зубчатых профиля, сопряженных с третьим, сопряжены между собой. Таким образом, колеса, нарезанные одним и тем же реечным контуром, сопряжены между собой.

Монтажный угол зацепления, получающийся после монтажа пары зубчатых колес (рис. 5-54):

$$\operatorname{inv} \alpha = \operatorname{inv} \alpha_0 + \frac{2(\xi_1 + \xi_2)}{z_1 + z_2} \operatorname{tg} \alpha_0. \tag{5-93}$$

$$A = \frac{r_{O_1} + r_{O_2}}{\cos \alpha}. \tag{5-94}$$

$$R_{e_1} = A - R_{i_2} - cm, \quad R_{e_2} = A - R_{i_1} - cm. \tag{5-95}$$

Коэффициент перекрытия равен:

$$\varepsilon = \frac{ab}{t_0}, \tag{5-96}$$

где

$$ab = Pa + Pb = \sqrt{R_{e1}^2 - r_{01}^2} + \sqrt{R_{e2}^2 - r_{02}^2} - A \sin \alpha; \tag{5-97}$$

t_0 – шаг по основной окружности, определяемый из следующего соотношения:

$$t_0 = \pi m \cos \alpha_0. \tag{5-98}$$

Долбяк – колесо с зубьями, имеющими режущие кромки. Основ-

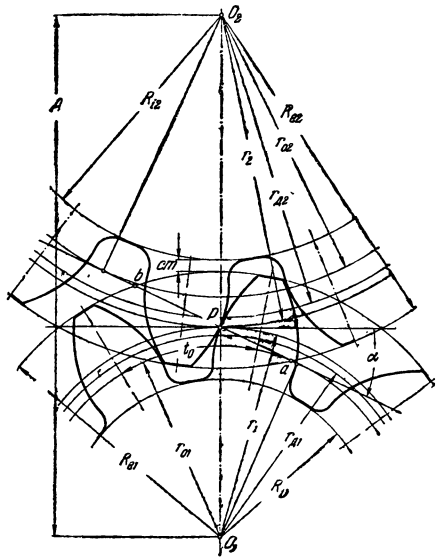


Рис. 5-54.

ные параметры долбяка (рис. 5-55, *а*):

$$R_{ед} = m\left(\frac{z_д}{2} + f + c\right). \tag{5-99}$$

Толщина зуба долбяка по делительной окружности:

$$s_д = \frac{\pi m}{2}. \tag{5-100}$$

Предельное число зубьев колеса при нарезании его без сдвига долбяка (число $z_д$ зубьев долбяка больше числа z зубьев колеса):

$$z_{пр} = \frac{2(z_д + 2f)\sin(\alpha_{ед} - \alpha_0)}{\sin 2\alpha_0}, \quad (5\text{-}101)$$

где

$$\alpha_{ед} = \arccos\frac{z_д \cos\alpha_0}{z_д + 2f}. \quad (5\text{-}102)$$

При $\alpha_0 = 20°$ и $f = 1$

$$z_{пр} = 3{,}11(z_д + 2)\sin(\alpha_{ед} - 20°). \quad (5\text{-}103)$$

При числе z зубьев колеса, меньшем $z_{пр}$, производят нарезание со сдвигом долбяка. Станочное межцентровое расстояние A_c при нарезании со сдвигом (рис. 5-55, *б*):

$$A_c = A_0\frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha_c}, \quad (5\text{-}104)$$

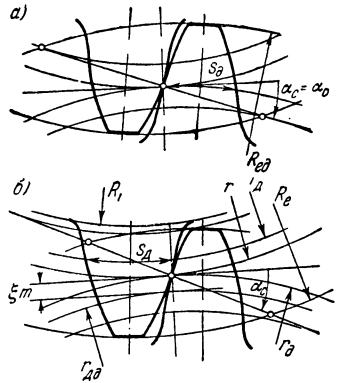


Рис. 5-55.

где станочный угол α_c зацепления определяется из равенства

$$\alpha_c = \operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha_{ед}}{\cos\alpha_{ед} + \dfrac{z\cos\alpha_0}{z_д + 2f}}. \quad (5\text{-}105)$$

Толщина $s_д$ зуба по делительной окружности колеса:

$$s_д = m[0{,}5\pi + (z_д + z)(\operatorname{inv}\alpha_e - \operatorname{inv}\alpha_0)]. \quad (5\text{-}106)$$

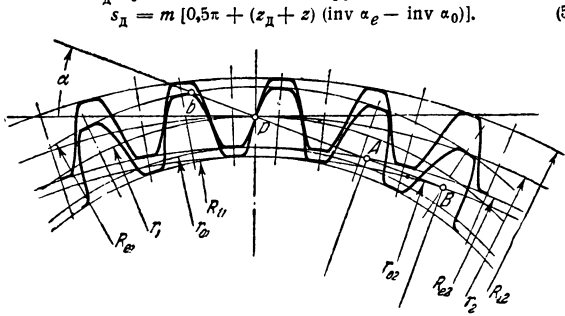


Рис. 5-56.

На рис. 5-56 показано внутреннее зацепление двух колес со всеми основными размерами. Для такого зацепления монтажный угол α

зацепления составляет:

$$\text{inv}\,\alpha = \text{inv}\,\alpha_0 - \frac{2(\xi_2 - \xi_1)}{z_2 - z_1}\,\text{tg}\,\alpha_0; \tag{5-107}$$

межцентровое расстояние

$$A = A_0 \frac{\cos\alpha_0}{\cos\alpha}, \tag{5-108}$$

где A_0 — межцентровое расстояние при $\xi = 0$.

Радиусы R_{i_2} и R_{e_2} для колеса с внутренними зубьями:

$$R_{i_2} = m\left(\frac{z}{2} + f + \xi + c\right), \quad R_{e_2} = A + R_{i_1} + cm. \tag{5-109}$$

Радиус R_{e_1} для колеса с внешними зубьями:

$$R_{e_1} = R_{i_2} - A - cm. \tag{5-110}$$

Толщина зуба по делительной окружности:

$$s_д = \frac{\pi m}{2} - 2m\xi\,\text{tg}\,\alpha_0. \tag{5-111}$$

§ 5-17. Зубчатые зацепления с косозубыми колесами

Боковая поверхность зуба косозубого колеса образуется как след прямой AA (рис. 5-57), связанной с перекатываемой по основному цилиндру плоскостью $П$. Боковая поверхность зуба получается изогнутой. Эта поверхность называется поверхностью линейчатого развертывающегося *геликоида*. Полученная поверхность геликоида пересекается с любой цилиндрической поверхностью, имеющей ту же ось, что и колесо, по винтовой линии. Угол β_0

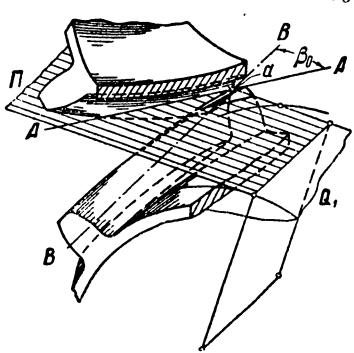


Рис. 5-57.

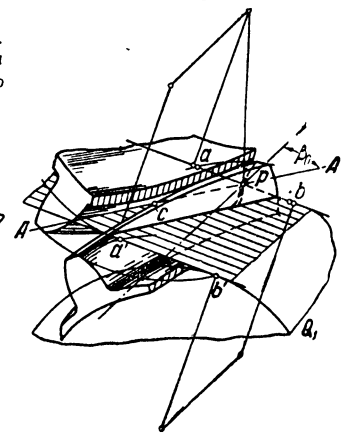


Рис. 5-58.

между касательной к винтовой линии зуба на основном цилиндре и осью колеса называется *углом наклона зуба по основному цилиндру*.

Сопряженные поверхности двух косозубых колес образуются качением общей касательной плоскости к двум основным цилиндрам Q_1 и Q_2

(Q_2 на рис. 5-57 и 5-58 не показан) сначала по одному, а затем по другому цилиндру, вследствие чего получаются два взаимно огибаемых геликоида (рис. 5-57 и 5-58). Касание таких геликоидов происходит по общей образующей, располагающейся в общей касательной плоскости. Два сопряженных колеса имеют равные углы наклона. При внешнем зацеплении винтовая линия одного колеса — правая, другого — левая. При внутреннем зацеплении обе винтовые линии получаются одноименными.

Зацепление двух сопряженных колес происходит так, что сначала вступают в зацепление торцы зубьев (рис. 5-57), зацепление начинается только в одной плоскости в точке a, а затем оно распространяется на все бо́льшую длину зубьев (линия PC на рис. 5-58). Выход из зацепления осуществляется постепенно, так что зубья расцепляются другими своими торцами в точке b'.

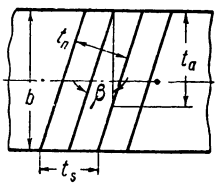


Рис. 5-59.

Параметры косозубого колеса (рис. 5-59). *Нормальный шаг* t_n и *нормальный модуль* m_n измеряются в нормальном сечении. Измеренные в торцевой плоскости шаг t_s и модуль m_s называются *торцевыми*, или *окружными*. Наконец, в осевом сечении измеряют *осевой шаг* t_a и *осевой модуль* m_a. Связь между названными параметрами устанавливается следующими зависимостями:

$$m_s = \frac{m_n}{\cos\beta}, \quad m_a = \frac{m_n}{\sin\beta}. \tag{5-112}$$

Радиус делительной окружности:

$$r_д = \frac{z}{2} m_s = \frac{m_n z}{2\cos\beta_д}. \tag{5-113}$$

Высоты головки и ножки зуба устанавливаются в соответствии с модулем в нормальном сечении.

Коэффициент перекрытия равен:

$$\varepsilon_s = \varepsilon + \frac{b\,\mathrm{tg}\,\beta}{t_s}, \tag{5-114}$$

где ε_s — коэффициент перекрытия косозубого зацепления; ε — коэффициент перекрытия профилей зубьев в торцовой плоскости.

§ 5-17а. Зубчатое зацепление М. Л. Новикова

В зацеплении М. Л. Новикова геометрическое касание происходит в точке. Во время движения колес точка контакта перемещается по линии зацепления, параллельной осям колес. Зубья колес передачи имеют форму винтового тела с боковыми профилями сечений, перпендикулярных осям колес, в виде дуг окружностей. Зацепление может быть выполнено с параллельными, пересекающимися и перекрещивающимися осями колес. На рис. 5-60, *а* показан общий вид зацепления колес с параллельными осями, а на рис. 5-60, *б* — с пересекающимися осями колес.

Радиусы r_1 и r_2 начальных окружностей колес (рис. 5-61) вычисляются по (5-77).

Зубья на одном колесе выпуклые, на другом вогнутые. Одним из основных параметров зацепления является величина смещения линии зацепления от мгновенной оси P относительного вращения. В зависимости от

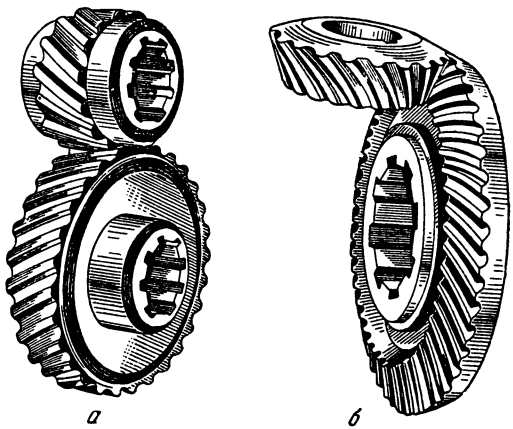


Рис. 5-60.

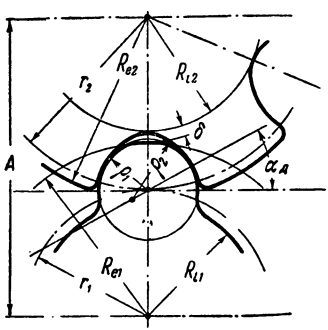


Рис. 5-61.

величины передаваемой мощности следует принимать:

$$l = (0{,}05 \div 0{,}20)\, r_1. \quad (5\text{-}115)$$

Радиусы рабочих профилей:

$$\rho_1 = l, \quad \rho_2 = l\,(1 + k_2)$$

$$(k_2 = 0{,}03 \div 0{,}10). \quad (5\text{-}116)$$

Радиус окружности выступов колеса с выпуклыми зубьями:

$$R_{e_1} = r_1 + (1 - k_e)\, l$$

$$(k_e = 0{,}1 \div 0{,}2).$$

Дуги рабочих профилей выпуклых зубьев проводят от начальной окружности до окружности выступов. Центр одной половины рабочего профиля вогнутого зуба располагают на стороне угла $\alpha_д$ давления на расстоянии от точки P, равном

$$\rho_2 - \rho_1 = (0{,}03 \div 0{,}10)\, \rho_1,$$

где ρ_2 — радиус рабочего профиля вогнутого зуба. Вторая половина рабочего профиля вогнутого зуба симметрична первой.

Угол давления следует принимать равным $\alpha_д = 25 \div 30°$.

Радиус окружности выступов колеса с вогнутыми зубьями:

$$R_{e_2} = r_2 + h, \qquad h = (0{,}1 \div 0{,}2)\, l.$$

Радиус окружности впадин колеса с выпуклыми зубьями:

$$R_{i_1} = r_1 - h - \delta,$$

где δ — радиальный зазор, приблизительно равный $\delta = lk_e$.

Радиус окружности впадин колеса с вогнутыми зубьями:

$$R_{i_2} = A - R_e - \delta.$$

В теории зацепления Новикова вводится понятие *осевого перекрытия*, коэффициент которого принимают равным:

$$\varepsilon A = b/t_a \geqslant 1{,}2,$$

где b — ширина обода и t_a — осевой шаг. Угол β подъема винтовой линии зуба рекомендуется принимать в пределах $\beta = 10 \div 30°$.

Зубья колес Новикова обладают значительной прочностью и износостойкостью. Их нагрузочная способность в 2—3 раза больше нагрузочной способности зубьев колес эвольвентного зацепления одинаковых с колесами Новикова размеров. Вследствие этого механизмы с колесами Новикова начинают широко применяться в практике.

§ 5-18. Коническое зубчатое зацепление

Коническое зацепление применяется при пересекающихся осях колес. Теоретически правильное коническое зацепление является зацеплением

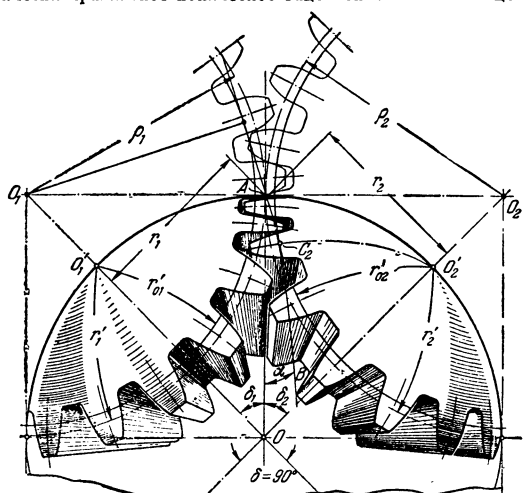


Рис. 5-62.

сферическим, т. е. профили зубьев его должны быть расположены на шаровой поверхности, описанной радиусом OA (рис. 5-62). Начальные

конусы такого зацепления вырезают шаровые сегменты, основания которых соприкасаются в точке A. Если производить измерения только на рассматриваемой шаровой поверхности, то основания шаровых сегментов следует определять сферическими радиусами r'_1 и r'_2. Такие основания называются *начальными окружностями*, одновременно являющимися основаниями начальных конусов, общая вершина которых располагается в точке O.

Для построения сферических профилей зубьев к дуге $O'_1O'_2$ под сферическим углом 90° следует провести круг AO, а касательно к окружности этого круга необходимо провести дугу AB под сферическим углом зацепления α. Опуская из точек O'_1 и O'_2 сферические перпендикуляры на последнюю дугу (на рис. 5-62 изображен только один перпендикуляр O'_2C_2), следует описать основные окружности, сферические радиусы которых равны r'_{o_1} и r'_{o_2}. По этим окружностям следует перекатывать без скольжения дугу AB для получения профилей зубьев, которые, таким образом, очерчиваются по сферическим эвольвентам. Если все точки построенных профилей соединить с центром O, то будут получены зубья с постепенно уменьшающимися сечениями по направлению к вершине O. В практике рекомендуется делать длину зуба равной приблизительно $1/3$ длины образующей OA.

При расчете зубьев на прочность конические колеса заменяют условными цилиндрическими. Профили зубьев каждого колеса располагаются на шаровых поясах (рис. 5-62). Шаровые пояса заменяют касательными к ним коническими поясами с вершинами в O_1 и O_2. Называемые *дополнительными*, такие конусы развертываются на плоскость, после чего на плоскости строятся профили зубьев. Радиусы разверток дополнительных конусов можно определить по формулам:

$$\rho_1 = \frac{r_1}{\cos \delta_1}, \qquad \rho_2 = \frac{r_2}{\cos \delta_2}. \tag{5-117}$$

§ 5-19. Червячное зацепление

Червячное зацепление применяется в большинстве случаев при перекрещивающихся под углом 90° осях и при больших передаточных отношениях. Одно звено в таком случае имеет форму винта, называемого *червяком*, другое — форму колеса с косыми зубьями, называемого *червячным колесом* (рис. 5-63). Червяк представляет собой цилиндр с трапецеидальной нарезкой. Связь между основными параметрами червяка — диаметром d_1 начального цилиндра, ходом s резьбы и углом β ее подъема по тому же цилиндру — устанавливается следующим соотношением:

$$s = \pi d_1 \operatorname{tg} \beta. \tag{5-118}$$

Связь между ходом и шагом многоходовой резьбы:

$$s = kt, \tag{5-119}$$

где k — число ходов винта; t — шаг многоходового винта.

Боковая поверхность профиля червяка (винта) очерчивается либо по *архимедовой*, либо по *эвольвентной* винтовым поверхностям. Архимедова винтовая поверхность получается, если образующую ее прямую в любом положении подчинить условию пересечения с осью цилиндра. В таком случае пересечение плоскости, перпендикулярной к оси цилиндра, дает архимедову спираль. Если указанная прямая будет все время касательной к винтовой линии, то образуется эвольвентная винтовая поверхность. Сечение такой поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси цилидра, получается в виде эвольвенты окружности.

Для червячной резьбы основными служат три цилиндрические поверхности:

1) Поверхность стандартного модуля называется *делительной*. При заданном модуле шаг резьбы составляет $t = \pi m$ и диаметр делительного цилиндра

$$d_{д1} = \frac{kt}{\pi \operatorname{tg} \beta} = \frac{km}{\operatorname{tg} \beta} = qm \qquad (q = 8 \div 13). \qquad (5\text{-}120)$$

2) Диаметры внешнего и

3) внутреннего цилиндров червяка устанавливаются аналогично таким же цилиндрам прямозубого колеса.

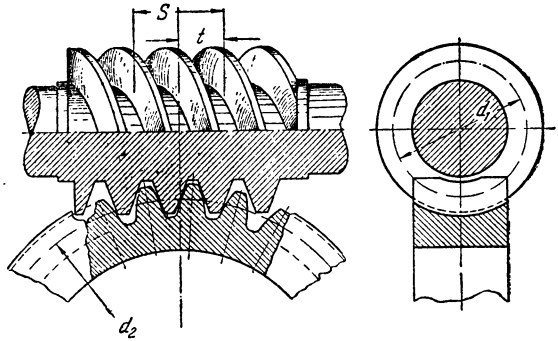


Рис. 5-63.

Диаметр делительной окружности червячного колеса:

$$d_{д2} = z_2 m \ (z_2 \text{ — число зубьев колеса}). \qquad (5\text{-}121)$$

Высота зуба червячного колеса выполняется такой же, как и у обыкновенного зубчатого колеса.

Передаточное отношение червячного зацепления:

$$i_{12} = \frac{z_2}{k}. \qquad (5\text{-}122)$$

Глава 5-7

СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА МЕХАНИЗМ [1]

§ 5-20. Движущие силы и силы производственного сопротивления

Движущая сила — внешняя сила, стремящаяся ускорить движение ведущего звена механизма. *Сила сопротивления* — сила, стремящаяся замедлить движение ведущего звена. *Сила производственного сопротивления* (*сила полезного сопротивления*) — внешняя сила, возникающая при выполнении технологического процесса, на преодоление которой затрачивается работа, необходимая для изготовления изделий, перемещения тел или изменения состояния жидких и газообразных тел.

Двигатель — машина, в которой тот или иной вид энергии преобразуется в механическую энергию, за счет которой совершается та или иная работа. *Рабочая машина* — это такая, с помощью которой производится изменение свойств, состояния, формы и положения обрабатываемого материала или изделия. *Исполнительный механизм* — устройство, предназначенное только производить требуемые целесооб-

разные движения (измерительные и контрольные приборы, приборы для перестановки каких-либо органов из одного положения в другое, счетные и счетно-решающие устройства, часы и т. д.).

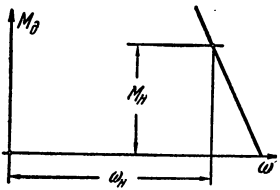


Рис. 5-64.

Механическая характеристика двигателя или рабочей машины — зависимость силового параметра от одного или нескольких кинематических параметров (путь, скорость, ускорение, время).

Механическая характеристика пружинного привода представляет собой действующую силу неизменной величины, пружинного привода — возрастающую прямолинейную зависимость силы от деформации, т. е. от пути. Механические характеристики электромагнитов представляют собой более сложные зависимости силы от пути или момента пары сил от угла поворота.

Рис. 5-64. Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением ($M_н$ — номинальный момент при номинальной угловой скорости $\omega_н$).

Рис. 5-65. Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением.

Рис. 5-66. Механическая характеристика асинхронного двигателя трехфазного тока (ω_c — синхронная угловая скорость или угловая скорость идеального холостого хода, $M_н$ — номинальный момент при номинальной угловой скорости $\omega_н$, $M_{макс}$ — максимальный, или опрокидывающий, момент, $M_п$ — начальный пусковой момент).

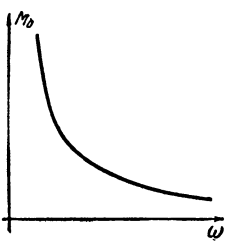


Рис. 5-65.

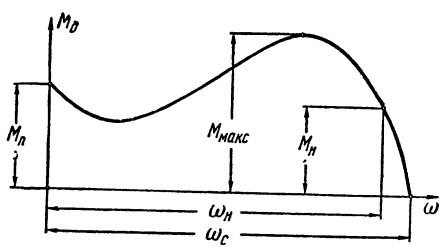


Рис. 5-66.

С точки зрения механических свойств рабочие машины делятся на пять групп: 1) полезные силы постоянны (грузоподъемные машины, прокатные станы, строгальные станки, бумагоделательные машины и пр.); 2) сопротивления зависят от скорости (вентиляторы, дымососы, центробежные насосы, центрифуги, гребные винты и пр.); 3) силы полезного сопротивления зависят от пути (поршневые компрессоры и насосы, ножницы для резки металлов, вагоноопрокидыватели, шахтные подъемники, качающиеся конвейеры, кривошипные прессы и пр.); 4) силы полезного сопротивления зависят от пути и скорости (быстроходные транспортные машины); 5) силы сопротивления зависят от времени (камнедробилки, шаровые мельницы, тестомесильные машины и пр.).

§ 5-21. Трение

Трение — явление, при котором возникает сила сопротивления относительному перемещению двух соприкасающихся тел (вектор этой силы располагается в плоскости касания указанных тел). *Трение скольжения* — явление, при котором одни и те же точки одного тела последовательно приходят в соприкосновение с различными точками другого тела. *Трение качения* — явление, при котором следующие одна за другой точки одного тела последовательно приходят в соприкосновение с следующими одна за другой точками другого тела [мгновенная ось вращения одного тела относительно другого проходит через точку (точки) касания одного из указанных тел]. *Трение верчения* — явление, при котором расположенные в плоскости касания двух тел точки описывают концентрические окружности с центром, лежащим на оси верчения.

Чистое трение возникает на поверхностях, освобожденных от адсорбированных пленок или химических соединений. *Сухое трение* возникает при отсутствии смазки и загрязнений между поверхностями. *Граничное трение* получается тогда, когда поверхности разделены слоем смазки незначительной толщины (не более 0,1 *мк*). *Жидкостное трение* — явление, при котором поверхности полностью разделены слоем смазки. *Полусухое* трение — смешанное трение, одновременно сухое и граничное. *Полужидкостное* трение — одновременно жидкостное и граничное или жидкостное и сухое.

Вектор силы трения, располагаясь в общей касательной плоскости к поверхности взаимодействующих тел, всегда направлен в сторону, противоположную относительной скорости.

Трение представляет собой весьма сложное явление, которое не может быть охарактеризовано одним коэффициентом, неизменным для рассматриваемой трущейся пары. Однако в инженерных расчетах до сих пор пользуются следующей зависимостью при определении силы сухого и полужидкостного трения:

$$F \leqslant f \bmod \boldsymbol{P}_{12}^{n}, \tag{5-123}$$

где F — сила трения; $\boldsymbol{P}_{12}^{n}$ — нормальная сила, прижимающая звено *1* к звену *2*; f — *коэффициент трения* (рис. 5-67).

Величины f не только весьма различны для различных комбинаций трущихся материалов, но и в значительной степени зависят от состояния трущихся поверхностей (степень шероховатости, чистые или смазанные поверхности, длительность предварительного неподвижного контакта и т. д.). Чтобы сдвинуть неподвижное тело с места, требуется бо́льшая сила, чем необходимая для поддержания равномерно-прямолинейного движения.

Угол трения — угол φ отклонения равнодействующей сил реакции от нормали (рис. 5-67). *Конус трения* — геометрическое место возможных положений вектора равнодействующей сил реакции.

Связь между φ и f:

$$\operatorname{tg} \varphi = f. \tag{5-124}$$

Если тело *1* находится под воздействием нескольких сил, которые приводятся к равнодействующей P_{12} (рис. 5-68), то при $\alpha > \varphi$ наблюдается ускоренное движение, при $\alpha = \varphi$ — равномерное движение и при $\alpha < \varphi$ — замедленное движение. В последнем случае плоскость называется *самотормозящейся*.

При жидкостном трении трущиеся поверхности полностью разобщены слоем смазки. В таком случае получается явление скольжения одной поверхности жидкости относительно другой. Необходимое условие жидкостного трения: сцепление жидкости с трущимися поверхностями должно быть больше сцепления слоев жидкости друг с другом. Для

металлов в качестве смазки применяются минеральные, растительные и животные масла. *Коэффициент жидкостного трения* в основном является функцией относительной скорости скольжения, удельного давления на трущихся поверхностях и *абсолютной вязкости* жидкости.

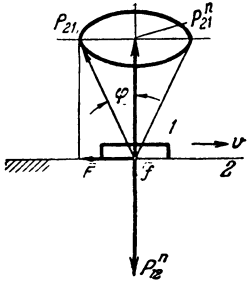


Рис. 5-67.

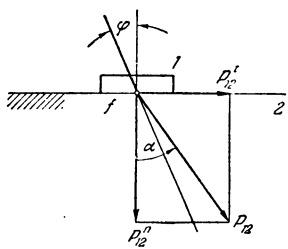


Рис. 5-68.

Единица абсолютной вязкости пуаз (η [$кГ \cdot сек/м^2$]) — вязкость, при которой для перемещения поверхности 1 $м^2$ со скоростью 1 $м/сек$ относительно другой поверхности, разделенных слоем жидкости толщиной 1 $м$, требуется сила, равная 1 $кГ$.

Требования, необходимые для замены полужидкостного трения жидкостным: а) жидкость, занимающая зазор между скользящими поверхностями, должна удерживаться в зазоре; б) внутреннее давление в смазке должно уравновешивать внешнюю нагрузку в виде силы, прижимающей друг к другу скользящие поверхности; в) жидкость должна полностью разделять скользящие поверхности; г) толщина слоя жидкости между скользящими поверхностями должна быть больше суммы высот наиболее выступающих частей шероховатых поверхностей скольжения.

Сила *трения качения* определяется по следующей формуле:

$$F_к = \frac{k}{R} P_n, \tag{5-125}$$

где k [$см$] — *коэффициент трения качения*; R — радиус круглого катящегося тела; P_n — нормальная сила, прижимающая катящееся тело к поверхности.

§ 5-22. Силы инерции

При решении многих задач динамики механизмов пользуются принципом д'Аламбера, в соответствии с которым задача динамики сводится к задаче статики, если учитывать силы инерции.

Сила инерции материальной точки X с массой m_X [$кГ \cdot сек^2/м$] равна:

$$\mathbf{P}_{иX} = -m_X \mathbf{a}_X, \tag{5-126}$$

где $\mathbf{a}_X$ — ускорение материальной точки X.

Силы инерции в плоско-параллельном движении звена, имеющего плоскость симметрии, параллельную движению, приводятся к главному вектору $\mathbf{P}_и$ и главному моменту $M_и$, равным

$$\mathbf{P}_и = -m\mathbf{a}_s, \quad M_и = -\varepsilon J_s, \tag{5-127}$$

где m — масса звена; $\mathbf{a}_S$ — ускорение его центра тяжести; ε — угловое ускорение звена, J_S [$кГ \cdot м \cdot сек^2$] — момент инерции звена относительно оси, проходящей через центр тяжести звена.

В поступательном движении звена $\varepsilon = 0$, а потому и $M_и = 0$.

Во вращательном движении (рис. 5-69) имеем:

$$\mathbf{P}_и = \mathbf{P}_и^n + \mathbf{P}_и^t = -m\mathbf{a}_S^n - m\mathbf{a}_S^t, \tag{5-128}$$

где $\mathbf{P}_и^n$ — нормальная (центробежная); $\mathbf{P}_и^t$ — тангенциальная (касательная) силы инерции; $\mathbf{a}_S^n$ и $\mathbf{a}_S^t$ — нормальная и тангенциальная составляющие ускорения $\mathbf{a}_S$ центра тяжести звена.

Главный момент в этом случае определяется вторым соотношением (5-127). При приведении к одной силе (5-128) $\mathbf{P}_и$ проходит через центр качания K, расположенный от центра вращения на расстоянии

$$l_{OK} = l_{OS} + \frac{J_S}{ml_{OS}}. \tag{5-129}$$

Когда звено не имеет плоскости симметрии, параллельной движению, главный вектор и главный момент сил инерции материальных точек

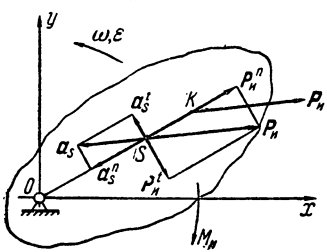


Рис. 5-69.

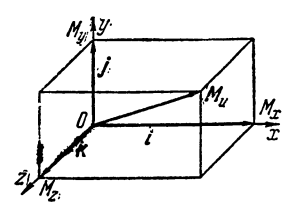


Рис. 5-70.

также могут быть определены, но для этого надо знать величины центробежных моментов инерции масс звена.

Если силы инерции материальных точек звена приведены к точке O (рис. 5-70), то имеем:

главный вектор

$$\mathbf{P}_и = -m\mathbf{a}_S, \tag{5-130}$$

главный момент

$$\mathbf{M}_и = \mathbf{i}(-\omega^2 J_{yz} + \varepsilon J_{xz}) + \mathbf{j}(\omega^2 J_{xz} + \varepsilon J_{yz}) - \mathbf{k}\varepsilon J_z, \tag{5-131}$$

где J_{xz} и J_{yz} — центробежные моменты инерции звена соответственно относительно осей x, z и y, z; J_z — момент инерции звена относительно оси z.

Если центробежные моменты инерции звена определить затруднительно, то для приближенного учета сил инерции можно условно разделить звено на отдельные части, имеющие плоскости симметрии, для каждой из которых и следует определить главный вектор и главный момент, после чего такие силовые параметры можно привести к одной силе и к одной паре.

Глава 5-8

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МАШИННОГО АГРЕГАТА [1]

§ 5-23. Приведение сил и масс

При исследовании движения машинного агрегата приходится решать следующие основные задачи: 1) определение законов движения звеньев механизма по заданным законам изменения внешних приложенных к механизму сил; 2) определение величины момента инерции махового колеса, предназначенного для ограничения периодических колебаний скорости установившегося движения механизма; 3) определение основных параметров схемы регулирования непериодических колебаний скоростей звеньев, происходящих в результате изменяющихся условий работы машинного агрегата.

Все указанные задачи решаются методом приведения всех приложенных к механизму сил и всех масс звеньев к одному звену — звену приведения. Благодаря этому задача о динамике сложной системы заменяется задачей о движении одного ее звена.

Приведенная сила — условная сила, приложенная к выбранной точке звена приведения и подчиненная тому условию, в соответствии с которым ее элементарная работа или ее мощность соответственно равны сумме элементарных работ или сумме мощностей заданных сил. Величину приведенной силы можно вычислить из следующего равенства:

$$P_{\text{п}} - \frac{\sum_{i=1}^{i=n} P_i v_i \cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{i=n} M_i \omega_i}{v_{\text{п}} \cos\alpha_{\text{п}}} = 0; \qquad (5\text{-}132)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$ — номера звеньев механизма; α_i — угол между векторами силы $\mathbf{P}_i$ и скорости $\mathbf{v}_i$ точки приложения силы $\mathbf{P}i$; M_i и ω_i — момент пары сил, приложенной к звену i, и угловая скорость звена; $\alpha_{\text{п}}$ — угол между векторами приведенной силы $\mathbf{P}_{\text{п}}$ и скорости $\mathbf{v}_{\text{п}}$ точки приложения силы $\mathbf{P}_{\text{п}}$. Знаки слагаемых первой суммы устанавливаются знаками косинусов, а знаки слагаемых второй суммы получаются положительными, если направления M_i и ω_i одинаковы; при разноименных их направлениях знаки следует принимать отрицательными.

Если силы приводят к вращающемуся звену, то для определения момента $M_{\text{п}}$ приведенной силы можно воспользоваться следующим соотношением:

$$M_{\text{п}} - \frac{P_{\text{п}} v_{\text{п}} \cos\alpha_{\text{п}}}{\omega_{\text{п}}} = 0, \qquad (5\text{-}133)$$

где $\omega_{\text{п}}$ — угловая скорость звена приведения.

Уравновешивающая сила $\mathbf{P}_{\text{у}}$ — сила, приложенная к звену приведения и преодолевающая сопротивления приложенных к механизму сил. Элементарная работа уравновешивающей силы равна сумме элементарных работ, приложенных к механизму сил, $\mathbf{P}_{\text{у}} = -\mathbf{P}_{\text{п}}$.

Уравновешивающий момент $M_{\text{у}}$ — момент уравновешивающей силы.

Теорема Жуковского. Если все силы, включая силы инерции и уравновешивающую, приложенные к механизму, перенести параллельно са-

мим себе в одноименные точки повернутого плана скоростей, то сумма моментов указанных сил относительно полюса плана будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{i=n} P_i h_i = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{5-134}$$

где h_i — длина перпендикуляра, опущенного из полюса плана на линию действия силы P_i; повернутый план скоростей — фигура обыкновенного плана скоростей, повернутая в любую сторону на 90°. Из уравнения (5-134), в которое входит и уравновешивающая сила, можно определить ее величину.

Приведенная масса $m_п$ — условная масса, сосредоточенная в звене приведения, кинетическая энергия которой равна сумме кинетических энергий масс звеньев механизма:

$$m_п = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} m_i v_{Si}^2 + \sum_{i=1}^{i=n} J_i \omega_i^2}{v_п^2} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{5-135}$$

При вращающемся звене приведения момент инерции его массы равен:

$$J_п = \frac{m_п v_п^2}{2\omega_п^2}. \tag{5-136}$$

§ 5-24. Дифференциальное уравнение движения звена приведения

Общее дифференциальное уравнение движения звена приведения:

$$M_д\, d\varphi + M_с\, d\varphi = dT \qquad \text{или} \qquad P_д\, ds + P_с\, ds = dT, \tag{5-137}$$

где $M_д$ и $P_д$ — приведенные движущий момент и движущая сила; φ и s — угол поворота звена приведения и путь точки приведения; $M_с$ и $P_с$ — приведенный момент и приведенная сила сопротивления; T — кинетическая энергия приведенных момента инерции и массы. Все величины, входящие в (5-137), алгебраические, и они могут быть как положительными, так и отрицательными.

Различают *стационарное (установившееся)* и *нестационарное* движения машинного агрегата. При установившемся движении кинематические и силовые параметры агрегата изменяются по периодическим законам. По периодическому закону изменяется и скорость звена приведения. Период изменения кинематических и силовых параметров часто называют *циклом*.

Так как в начале и в конце цикла кинематические и силовые параметры соответственно равны друг другу, то за этот промежуток времени приращение кинетической энергии равно нулю, и следовательно:

$$\int_{2\pi k}^{2\pi m} M_д\, d\varphi + \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_с\, d\varphi = 0, \tag{5-138}$$

где k и m — целые числа и $2\pi(m-k)$ определяет величину угла поворота звена приведения, соответствующую одному циклу.

Если к звену приведения, кроме сил полезного сопротивления, приложены и силы трения, то

$$M_c = M_{пс} + M_{тс}, \tag{5-139}$$

где $M_{пс}$ — приведенный момент сил полезного сопротивления; $M_{тс}$ — приведенный момент сил трения.

В соответствии с указанным можно написать:

$$A_д + A_{пс} + A_{тс} = 0, \tag{5-140}$$

где

$$A_д = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_д \, d\varphi, \qquad A_{пс} = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_{пс} \, d\varphi, \qquad A_{тс} = \int_{2\pi k}^{2\pi m} M_{тс} \, d\varphi. \tag{5-141}$$

Коэффициент полезного действия машинного агрегата и *коэффициент потерь*:

$$\eta = \frac{A_{пс}}{A_д}, \qquad \psi = \frac{A_{тс}}{A_д} = 1 - \eta. \tag{5-142}$$

Нестационарный режим работы машинного агрегата характеризуется непериодическими изменениями его кинематических и силовых параметров.

Решение дифференциальных уравнений (5-137). Основные задачи о движении машинного агрегата в соответствии с заданными условиями: 1) $M_д = M_д(\varphi)$, $M_c = M_c(\varphi)$, $J_п = J_п(\varphi)$; 2) $M_д = M_д(\omega)$, $M_c = M_c(\varphi)$, $J_п = J_п(\varphi)$; 3) $M_д = M_д(\omega)$, $M_c = M_c(\omega)$, $J_п = \text{const}$; 4) $M_д = M_д(\omega)$, $M_c = M_c(t)$, $J_п = \text{const}$.

В соответствии с заданными зависимостями при решении требуется определять законы изменения угловой скорости (*скоростную характеристику*) звена приведения либо в функции его угла поворота, либо в функции времени и, кроме того, необходимо также определять *нагрузочную характеристику* двигателя $[M_д = M_д(\varphi)$ или $M_д = M_д(t)]$. Чаще всего исходные зависимости бывают заданы в виде соответствующих диаграмм.

Задачи 1 и 2 при заданных начальных условиях можно решать в следующем общем порядке. На выбранном интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$ устанавливают приращение $\Delta T = T_k - T_i$ кинетической энергии. На основании (5-137) имеем:

$$\Delta T = T_k - T_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} (M_д + M_c) \, d\varphi. \tag{5-143}$$

Для ω_k в положении k имеем:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{2T_k}{J_п(\varphi_k)}}. \tag{5-144}$$

Решая поставленную задачу шаг за шагом, в конце концов можно получить зависимость $\omega = \omega(\varphi)$. Если исходная зависимость движущего момента была задана в виде $M_д = M_д(\omega)$, то теперь можно определить закон его изменения в функции φ.

В случае необходимости получить зависимость $\omega = \omega(t)$ следует воспользоваться уравнением

$$t_k - t_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_k} \frac{1}{\omega}\, d\varphi. \qquad (5\text{-}145)$$

Для решения этого уравнения необходимо предварительно получить зависимость $\frac{1}{\omega} = f(\varphi)$ из $\omega = \omega(\varphi)$. Решая шаг за шагом уравнение (5-145), получаем $\varphi = \varphi(t)$, после чего при наличии $\omega = \omega(\varphi)$ определяется и $\omega = \omega(t)$.

Определение ΔT при помощи равенства (5-143). Представим (5-143) в следующем виде:

$$\Delta T = T_k - T_i = (M_{д\,ср} + M_{с\,ср})\,(\varphi_k - \varphi_i) = M_{д\,ср}\Delta\varphi + M_{с\,ср}\Delta\varphi. \qquad (5\text{-}146)$$

Если дано: $M_д = M_д(\varphi)$, $M_с = M_с(\varphi)$ и $J_п = J_п(\varphi)$, то на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$ можно определить $M_{д\,ср}$ и $M_{с\,ср}$ по заданным диаграммам (рис. 5-71), после чего из (5-146) устанавливается величина T_k и далее ω_k.

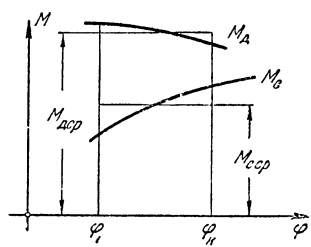


Рис. 5-71.

Если дано: $M_д = M_д(\omega)$, $M_с = M_с(\varphi)$ и $J_п = J_п(\varphi)$, то определение $M_{д\,ср}$ на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$ производится в результате упрощающих допущений.

А. Если положить, что на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$ $M_{д\,ср} = M_д(\omega_i)$ и $M_{с\,ср} = M_с(\varphi_i)$, то в соответствии с (5-146) можно вычислить T_k. Предлагаемый метод дает результаты тем более точные, чем меньше интервал $\varphi_i \sim \varphi_k$.

Б. Будем считать, что $M_д$ на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$ изменяется в функции φ по линейному закону: $M_д = M_{дi} + c\varphi$, где c — угловой коэффициент. В таком случае для $M_{д\,ср}$ имеем:

$$M_{д\,ср} = \frac{M_{дk} + M_{дi}}{2} = \frac{M_{дi} + \Delta M_д + M_{дi}}{2} = M_{дi} + \frac{\Delta M_д}{2}, \qquad (5\text{-}147)$$

где $\Delta M_д$ — полное приращение движущего момента на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$.

Теперь равенство (5-146) можно представить так:

$$\frac{T_k}{\Delta\varphi} = \left(\frac{T_i}{\Delta\varphi} + M_{дi} + M_{с\,ср}\right) + \frac{\Delta M_д}{2}. \qquad (5\text{-}148)$$

В написанном равенстве левая часть представляет собой зависимость $\frac{T_k}{\Delta\varphi} = \frac{J_k\omega^2}{2\Delta\varphi} = f(\omega)$; в правой части выражение в скобках — постоянная величина, а последнее слагаемое — функция ω по зависимости $0{,}5\, M_д = f_1(\omega)$. Таким образом, мы получили уравнение, в котором переменные T_k и $\Delta M_д$ являются различными функциями

одного и того же переменного ω. Графическое решение уравнения (5-148) иллюстрируется рис. 5-72. Построение выполняется в следующем порядке: определить $M_{c.ср}$, определить $T_k/\Delta\varphi$: от точки A отложить $M_{дi}$, от точки $B - M_{c\,ср}$, от точки C построить кривую CD, равноотстоящую от диаграммы 0,5 $M_д(\omega)$, до пересечения с диаграммой $T_k(\omega)$. Точка D определяет $T_k/\Delta\varphi$; ω_k устанавливается из диаграммы рис. 5-72.

Для определения зависимости $\omega = \omega(t)$ можно воспользоваться следующим упрощенным методом. Имеем:

$$\omega_{ik} \approx \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi_k - \varphi_i}{t_k - t_i},$$

где ω_{ik} — среднее значение ω на интервале $\varphi_i \sim \varphi_k$.

Получаем:

$$t_k = t_i + \frac{\varphi_k - \varphi_i}{\omega_{ik}}. \qquad (5\text{-}149)$$

Определив промежутки времени для всего исследуемого участка угла φ, можно построить диаграмму $\omega = \omega(t)$.

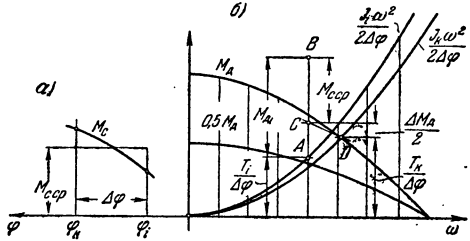


Рис. 5-72.

Для решения задач 3 и 4 воспользуемся получаемым из (5-137) уравнением

$$M_д + M_c = J_п \frac{d\omega}{dt}. \qquad (5\text{-}150)$$

Дано: $M_д = M_д(\omega)$, $M_c = M_c(\omega)$ и $J_п = \text{const}$. Имеем следующее решение:

$$t_k - t_i = J_п \int_{\omega_i}^{\omega_k} \frac{d\omega}{M_д(\omega) + M_c(\omega)}. \qquad (5\text{-}151)$$

Дано: $M_д = M_д(\omega)$, $M_c = M_c(t)$, $J_п = \text{const}$.

Задача решается аналогично рассмотренной в пункте Б. В данном случае вместо (5-148) имеем:

$$\frac{J_п\omega_k}{\Delta t} = \left(\frac{J_п\omega_i}{\Delta t} + M_{дi} + M_{c\,ср}\right) + 0{,}5\,\Delta M_д, \qquad (5\text{-}152)$$

где Δt — промежуток времени между t_i и t_k, а остальные величины аналогичны рассмотренным ранее.

В данном случае после решения уравнения (5-152) для всех участков абсциссы можно сразу построить диаграмму $\omega = \omega(t)$.

§ 5-25. Ограничение периодических колебаний скорости агрегата

Коэффициент δ неравномерности установившегося движения машинного агрегата — величина, характеризующая колебания угловой скорости звена приведения:

$$\delta = \frac{\omega_{макс} - \omega_{мин}}{\omega_{ср}}, \qquad (5\text{-}153)$$

где $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$ — экстремальные значения угловой скорости в периоде установившегося движения; $\omega_{ср}$ — среднее значение угловой скорости за тот же период, определяемое из формулы

$$\omega_{ср} = \frac{\omega_{макс} + \omega_{мин}}{2}. \qquad (5\text{-}154)$$

Ограничение периодических колебаний скорости осуществляется при помощи добавочной массы звена приведения. Добавочная масса представляет собой маховое колесо, устанавливаемое на валу звена приведения.

При установившемся движении и малых δ обыкновенно считают момент $M_д$ двигателя приближенно постоянным. В таком случае задача об определении момента инерции махового колеса решается в такой последовательности.

А. По заданной диаграмме $M_с = M_с(\varphi)$ (рис. 5-73) определяют величину $M_д$ на основании следующего равенства:

$$M_д = \frac{1}{2\pi k}\int_0^{2\pi k} M_с(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2\pi k} F \mu_м \mu_\varphi, \qquad (5\text{-}155)$$

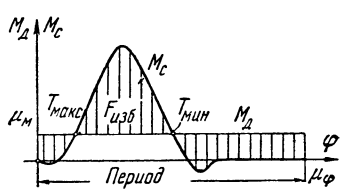


Рис. 5-73.

где F — площадь диаграммы $M_с(\varphi)$ за цикл $2\pi k$; $\mu_м$ и μ_φ — масштабы.

Б. Определяют наибольшую избыточную работу:

$$A_{изб} = F_{изб}\mu_м \mu_\varphi, \qquad (5\text{-}156)$$

т. е. разность работ движущих сил и сил сопротивления (или наоборот) между двумя соседними положениями звена приведения, в которых $M_д = M_с$.

В. Вычисляют величину момента инерции $J_м$ махового колеса, обеспечивающего заданный δ:

$$J_м = \frac{A_{изб}}{\delta\omega_{ср}^2} = \frac{F_{изб}\mu_м \mu_\varphi}{\delta\omega_{ср}^2}. \qquad (5\text{-}157)$$

В описанном расчете не учтена приведенная масса звеньев механизма, которая по сравнению с массой махового колеса обыкновенно бывает в таких случаях мала.

При определении $J_м$ для машинных агрегатов с электродвигателями, момент которых является функцией угловой скорости ротора, рассмотрим два случая.

1. Момент сопротивления равен $M_c = M_c(\varphi)$, а приведенный момент инерции $J_п$ звеньев механизма приблизительно равен нулю.

Пусть в машинный агрегат входит асинхронный электродвигатель, механическая характеристика которого представлена на рис. 5-74.

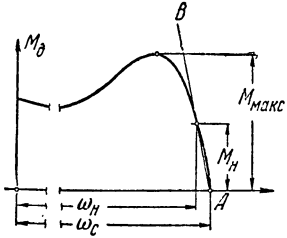


Рис. 5-74.

Заменим рабочий участок характеристики прямой AB, проходящей через точку номинального момента $M_н$. Имеем:

$$M_д = M_0 - c\omega. \qquad (5\text{-}158)$$

где M_0 — величина условного момента, которая получается, если продолжить указанную прямую до пересечения с осью ординат, c — угловой коэффициент:

$$c = \frac{M_0}{\omega_c}. \qquad (5\text{-}159)$$

Величину $M_н$ момента двигателя определяют из

$$M_н = kM_{с\,ср}\ (k = 1{,}15 \div 1{,}25). \qquad (5\text{-}160)$$

Если момент M_c изменяется в соответствии с рис. 5-75 (диаграмма, характерная для машин ударного действия при большом моменте $M_р$ на угле $\varphi_р$ рабочего хода и малом $M_х$ на угле $\varphi_х$ холостого хода), то при заданных $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$, руководствуясь частью диаграммы, устанавливающей момент при рабочем ходе, получаем следующую величину $J_м$ [1]:

$$J_м = \frac{c^2\varphi_р}{c(\omega_{макс} - \omega_{мин}) + M_0' \ln \dfrac{M_0' - c\omega_{макс}}{M_0' - c\omega_{мин}}}, \qquad (5\text{-}161)$$

где $M_0' = M_0 - M_р$.

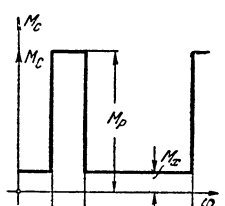


Рис. 5-75.

Так как мощность двигателя была выбрана с некоторым запасом, то амплитуда колебаний ω, очевидно, будет несколько меньше заданной.

В тех случаях, когда диаграмма $M_c = M_c(\varphi)$ представляет собой плавно изменяющуюся кривую, а диаграмма $M_д = M_д(\omega)$ также криволинейна, для определения $J_м$ можно использовать следующий приближенный метод.

При экстремальных значениях ω, равных $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$, угловое ускорение звена приведения равно нулю, а потому

$$M_д + M_c = J_м \frac{d\omega}{dt} = 0,$$

откуда $M_д = -M_c$. Это позволяет определить положения звена приведения, в которых ω достигает экстремальных значений (рис. 5-76).

Предполагаем, что в функции φ $M_д$ изменяется по закону прямой линии. В таком случае избыточная работа выражается заштрихованной на рис. 5-76 площадью и $J_м = \frac{A_{изб}}{\delta\omega^2_{ср}}$.

Проверим полученный результат, для чего определим $T_{макс}$ и $T_{мин}$: $T_{макс} = J_м \frac{\omega^2_{макс}}{2}$ и $T_{мин} = J_м \frac{\omega^2_{мин}}{2}$ и воспользуемся уравнением (5-148):

$$J_м \frac{\omega_i^2}{2\Delta\varphi} + M_{дi} + M_{с\,ср} + \frac{\Delta M_д}{2} = J_k \frac{\omega_k^2}{2\Delta\varphi}.$$

Будем считать (рис. 5-76), что точка A соответствует значениям $J_м \frac{\omega_i^2}{2\Delta\varphi}$ и $M_{д\,макс}$. Так как мы будем пользоваться малым участком параболы $J_м \frac{\omega^2}{2\Delta\varphi}(\omega)$, то ее в этой части можно считать прямолинейной. Для интервалов $\Delta_1\varphi$ и $\Delta\varphi$ построены две различные кривые, — вторые их точки получены в соответствии с величинами

$$J_м \frac{\omega^2_{макс}}{2\Delta_1\varphi} \text{ и } J_м \frac{\omega^2_{макс}}{2\Delta\varphi}.$$

При $\omega = \omega_{макс}$ энергетическое состояние агрегата характеризуется точкой *1*. Руководствуясь приведенным выше уравнением, производим следующее построение: $M_{дi}$ — отрезок *1—2*; $M_{с\,ср}$ — отрезок *2—3*; 0,5 $\Delta M_д$ — отрезок кривой *3—4*, равноотстоящей от кривой 0,5 $M_д = 0{,}5\,M_д(\omega)$, до пересечения с кривой $A-1$. Точка *4* характеризует энер-

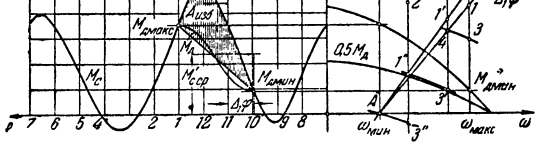


Рис. 5-76.

гетическое состояние агрегата в 1-м положении. Так как следующий интервал равен $\Delta\varphi$, то следует перейти на кривую $A-1'$. Дальнейшие построения ведут в аналогичном порядке. Окончательный результат показывает, что сделанное выше предположение оказалось достаточно точным.

Так как нам известны значения ω во всех исследованных положениях, можно построить уточненную диаграмму $M_д = M_д(\varphi)$. Рис. 5-76 показывает, что избыточные площади, ограниченные снизу прямой и кривой $M_д(\varphi)$, по своим величинам близки друг к другу.

2. $M_с = M_с(t)$ и $J_п = 0$. Определить $J_м$ при заданных $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$.

Для машин ударного действия имеем диаграмму, изображенную на рис. 5-77. Двигатель и в этом случае выбираем в соответствии с равенством (5-160) и пользуемся для рабочей части его характеристики уравнением (5-158). Момент инерции $J_м$ махового колеса устанавливается из формулы [1]:

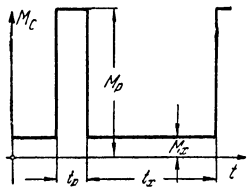


Рис. 5-77.

$$J_м = \frac{ct_р}{\ln \dfrac{M'_0 - c\omega_{макс}}{M'_0 - c\omega_{мин}}}, \qquad (5\text{-}162)$$

где $M'_0 = M_0 - M_р$.

При заданных кривых $M_д = M_д(\omega)$ и $M_с = M_с(t)$ общего вида следует воспользоваться уравнением (5-152).

Момент инерции махового колеса определяется так же, как и в предыдущем случае (рис. 5-78). Последовательность необходимых построений следующая: а) на диаграмме $M_с = M_с(t)$ отмечаем точки $M_{д\,мин}$ и

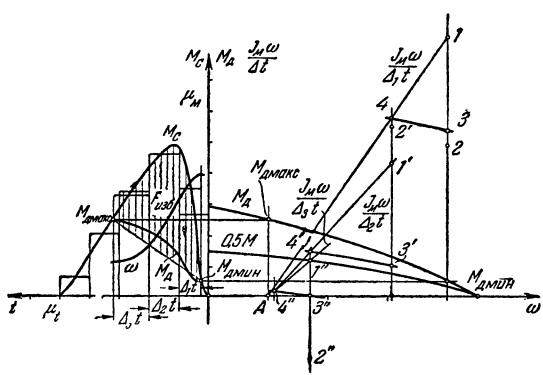


Рис. 5-78.

$M_{д\,макс}$ и соединяем их прямой линией; б) вычисляем величину $F_{изб}\mu_м\mu_t$; в) вычисляем момент инерции $J_м$ по формуле

$$J_м = \frac{F_{изб}\mu_м\mu_t}{\omega_{макс} - \omega_{мин}}; \qquad (5\text{-}163)$$

г) проверяем полученный результат по формуле (5-152), для чего вычисляем величины $\dfrac{J_м(\omega_{макс} - \omega_{мин})}{\Delta t}$ для $\Delta_1 t$, $\Delta_2 t$ и $\Delta_3 t$ (в правой части

диаграммы построены прямые $J_м\omega/\Delta t$ для указанных трех значений Δt); д) пользуясь уравнением (5-152), от точки *1* откладываем отрезок *1—2*, соответствующий ординате $M_{с\,ср}$ для интервала *1—2*, затем отрезок *2—3*, соответствующий ординате диаграммы $M_д = M_д(\omega)$, далее отрезок *3—4*, равностоящий от линии $0{,}5\,M_д = 0{,}5\,M_д(\omega)$.

Следующему интервалу соответствует прямая $J_м\omega/\Delta_2 t$, а потому нужно сделать переход на эту прямую — отрезок *4—1'*, после чего построения ведутся в аналогичном порядке. В данном случае точка *4''* не совпала с точкой *A*. Однако расхождение получилось незначительным и обеспечивающим большую надежность, вследствие чего пересчета делать не нужно. На рис. 5-78 для иллюстрации построены кривые $M_д = M_д(t)$ и $\omega = \omega(t)$.

§ 5-26. Регулирование непериодических колебаний скорости агрегата

Непериодические колебания скорости агрегата происходят при изменяющихся условиях его работы, например в результате изменений внешней нагрузки. На рис. 5-79 показаны три характеристики двигателя, которые получаются при подаче трех различных количеств рабочего вещества (газа, пара). Если двигатель работает по характеристике *I*,

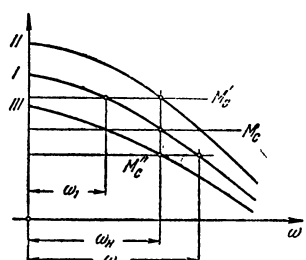


Рис. 5-79.

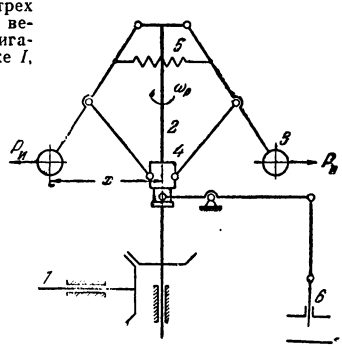


Рис. 5-80.

то при нормальной нагрузке M_c его вал вращается с номинальной скоростью $\omega_н$. При изменении момента сопротивления до M'_c угловая скорость уменьшается до ω_1, а при изменении до M''_c — увеличивается до ω_2. Для устранения колебаний скорости двигатель автоматически переводится на работу по другой характеристике, например по *II* или *III*. Устройства, поддерживающие во время работы двигателя его номинальную скорость, называются *регуляторами*.

Регулятор *прямого действия* непосредственно воздействует на регулирующий орган, устанавливающий подачу в двигатель рабочего вещества в необходимом количестве. Регулятор *непрямого действия* приводит в движение специальный исполнительный механизм (*сервомотор*), управляющий регулирующим органом. На рис. 5-80 показана схема центробежного регулятора прямого действия.

Как показывает рис. 5-80, угловой скорости вала *1* двигателя соответствует определенная угловая скорость $\omega_р$ регулятора. Силы тяжести грузов *3*, муфты *4* и всех подвижно связанных с осью *2* звеньев регулятора и натяжение пружины *5* стремятся удерживать муфту *4* в нижнем положении, а заслонку *6* — в предельном верхнем положении. Центробежные силы $P_и$ грузов, с другой стороны, стремятся поднимать муфту и опускать заслонку. Работа целесообразно работающего регулятора должна быть устойчивой; соотношение между указанными силами должно быть таково, чтобы при различных угловых скоростях $\omega_р$ устойчиво сохранялись определенные положения муфты *4* и заслонки *6*. Это условие будет соблюдено, если приведенные к муфте или к центрам грузов центробежные силы будут равны приведенным силам тяжести звеньев и силе натяжения пружины. На рис. 5-81 показана характеристика регулятора, представляющая собой диаграмму $P_п = P_п(x)$ приведенных к центрам грузов сил веса звеньев и натяжения пружины, где x — расстояние центра груза *3* до оси регулятора. На том же рисунке показаны диаграммы приведенных сил инерции грузов при различных угловых скоростях регулятора. Рассматриваемая характеристика является устойчивой, потому что при каких-либо случайных изменениях положений грузов регулятор стремится возвратиться к прежнему положению.

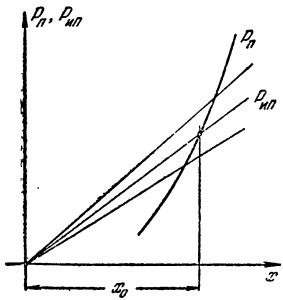


Рис. 5-81.

У регулятора прямого действия при разных внешних нагрузках устанавливаются различные угловые скорости вала двигателя и регулятора. *Коэффициент неравномерности хода* регулятора:

$$\delta_р = \frac{\omega_{макс} - \omega_{мин}}{\omega_{ср}}, \quad \text{где} \quad \omega_{ср} = \frac{\omega_{макс} + \omega_{мин}}{2}. \tag{5-164}$$

Здесь $\omega_{макс}$ и $\omega_{мин}$ — экстремальные угловые скорости регулятора, устанавливающиеся при холостом ходе и при полной нагрузке; $\omega_{ср}$ — средняя угловая скорость, определяемая номинальной угловой скоростью двигателя.

Из-за трения в кинематических парах регулятора муфта *4* при изменении угловой скорости начинает двигаться только тогда, когда центробежные силы инерции грузов преодолеют силы трения, т. е. регулятор отзывается на изменения скорости с некоторым запаздыванием, характеризующим так называемую *нечувствительность*.

Коэффициент нечувствительности:

$$\varepsilon = \frac{\omega''_р - \omega'_р}{\omega_р}, \tag{5-165}$$

где $\omega_р$ — установившаяся при данных условиях угловая скорость регулятора; $\omega''_р$ и $\omega'_р$ — угловые скорости, при которых начинается движение муфты соответственно при уменьшении и при увеличении внешней нагрузки.

Полный коэффициент Δ неравномерности хода регулятора:

$$\Delta = \delta_р + \varepsilon. \tag{5-166}$$

Когда машинный агрегат снабжен и регулятором, и маховым колесом, то коэффициент нечувствительности должен быть больше коэффициента неравномерности хода, определяющего периодические колебания скорости. Соблюдение этого условия необходимо, потому что в противном случае регулятор будет отзываться на периодические изменения скорости и непрерывно будет находиться в колебательном состоянии.

Глава 5-9

СИЛОВОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ [1]

§ 5-27. Кинематические пары

Силовое исследование механизмов сводится к определению реакций в кинематических парах, возникающих от действия внешних сил, сил инерции и сил тяжести звеньев. Так как силы трения в кинематических парах в некоторой части определяют величины реакций, то, вообще говоря, их также следует учитывать.

Поступательная пара. Принятые условности: 1) величины опорных поверхностей ползуна невелики по сравнению с его длиной (рис. 5-82); 2) на опорных поверхностях давление распределяется равномерно; 3) силы и длины их плеч — величины алгебраические и могут быть как положительными, так и отрицательными (то же относится и к векторам сил и плеч); 4) знак плеча момента силы считается отрицательным, если плечо направлено в отрицательную сторону оси координат.

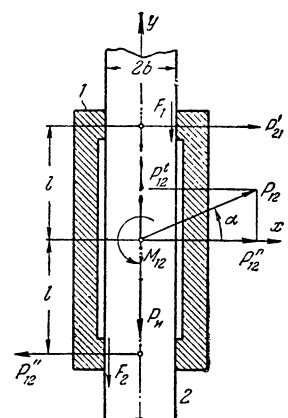


Рис. 5-82.

При решении поставленной задачи все силы, приложенные к звену, будем приводить к центру ползуна, что позволит учитывать только один главный вектор и один главный момент, которые будем обозначать соответственно $\mathbf{P}_{12}$ и $\mathbf{M}_{12}$ (рис. 5-82), где индекс 12 символизирует действие звена *1* на звено *2*.

Пусть ползун движется вверх. Тогда, учитывая силы трения F_1 и F_2, равные

$$F_1 = f \bmod \mathbf{P}'_{21},\quad F_2 = f \bmod \mathbf{P}''_{21} \tag{5-167}$$

и направленные против относительной скорости, можно составить уравнения для определения реакций $\mathbf{P}'_{21}$ и $\mathbf{P}''_{21}$:

$$\left.\begin{aligned} P'_{21} + P_{12}\cos\alpha + P''_{21} &= 0,\\ P'_{21}l + fb \bmod P'_{21} + M_{12} + P''_{21}l + fb \bmod P''_{21} &= 0,\\ P_{12}\sin\alpha + f \bmod \mathbf{P}'_{21} + f \bmod \mathbf{P}''_{21} + P_и &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5-168}$$

где $P_и$ — искомая сила инерции ползуна *1*.

Система уравнений (5-168) является нелинейной из-за входящих в нее величин под знаками модуля, а потому ее можно решить только приближенно. В первом приближении, считая силы трения равными нулю, определяют P'_{21} и P''_{21}, после чего из уравнения (5-167) устанавливают величины F_1 и F_2. Во втором приближении в систему уравнений (5-168) подставляют полученные величины F_1 и F_2 и снова определяют P'_{21} и P''_{21} и т. д.

Если направление движения ползуна предварительно известно, то система уравнений (5-168) может быть решена сразу, потому что в этом случае направления сил трения оказываются также известными.

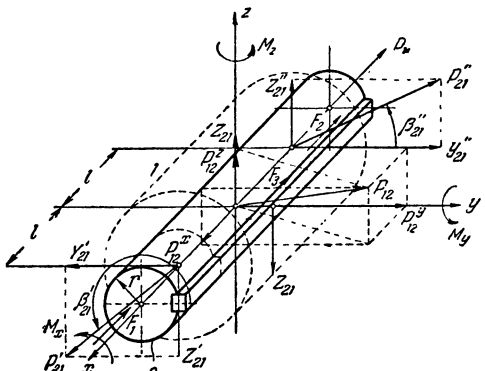


Рис. 5-83.

На рис. 5-83 показан общий случай нагружения поступательной пары. Дано: $\mathbf{P}_{12}\left(P^x_{12}, P^y_{12}, P^z_{12}\right)$, $\mathbf{M}_{12}\left(M_x, M_y, M_z\right)$, r, l и f. Требуется определить $\mathbf{P}'_{21}\left(Y'_{21}, Z'_{21}\right)$, $\mathbf{P}''_{21}\left(Y''_{21}, Z''_{21}\right)$, реакцию Z_{21}, силы трения F_1, F_2, F_3 и силу инерции $P_и$, если ползун движется в положительном направлении оси x.

Составляем уравнения проекций сил и моментов:

$$P^x_{12}+F_1+F_2+F_3+P_и=0, \tag{5-169}$$

$$P^y_{12}+Y'_{21}+Y''_{21}=0, \tag{5-170}$$

$$P^z_{12}+Z'_{21}+Z''_{21}=0, \tag{5-171}$$

$$M_x+Z_{21}r=0, \tag{5-172}$$

$$M_y+Z'_{21}l+Z''_{21}l+F_1r\sin\beta'_{21}+F_2r\sin\beta''_{21}=0, \tag{5-173}$$

$$M_z+Y'_{21}l+Y''_{21}l+F_1r\cos\beta'_{21}+F_2r\cos\beta''_{21}+F_3r=0, \tag{5-174}$$

где

$$F_1 = f \bmod \mathbf{P}'_{21}, \qquad F_2 = f \bmod \mathbf{P}''_{21}, \qquad F_3 = f \bmod \mathbf{Z}_{21}, \quad (5\text{-}175)$$

$$P'_{21} = \sqrt{Y'^2_{21} + Z'^2_{21}}, \qquad P''_{21} = \sqrt{Y''^2_{21} + Z''^2_{21}}. \quad (5\text{-}176)$$

В первом приближении, считая силы трения равными нулю, приведенная выше система уравнений решается в такой последовательности: 1) (5-172); 2) (5-170) и (5-174); 3) (5-171) и (5-173); 4) (5-175) и 5) (5-169).

Во втором приближении следует учесть силы трения, предварительно определив углы β'_{21} и β''_{21} из соотношений

$$\operatorname{tg}\beta'_{21} = \frac{Z'_{21}}{Y'_{21}}, \quad \operatorname{tg}\beta''_{21} = \frac{Z''_{21}}{Y''_{21}}. \quad (5\text{-}177)$$

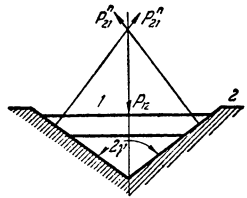


Рис. 5-84.

При клиновидной направляющей (рис. 5-84) сила трения, противодействующая движению ползуна 1 в направлении, перпендикулярном к чертежу, равна:

$$F = \frac{f}{\sin\gamma} \bmod \mathbf{P}_{12} = f' \bmod \mathbf{P}_{12}, \quad (5\text{-}178)$$

где f' — *условный коэффициент трения* клиновидного ползуна.

Вращательная пара. В общем случае при приведении сил, действующих на вал вращательной пары (рис. 5-85), получаются сила $\mathbf{P}_{12}$ (P^x_{12}, P^y_{12}, P^z_{12}) и пара, момент которой равен $\mathbf{M}_{12}$ (M_x, M_y, M_z). Под

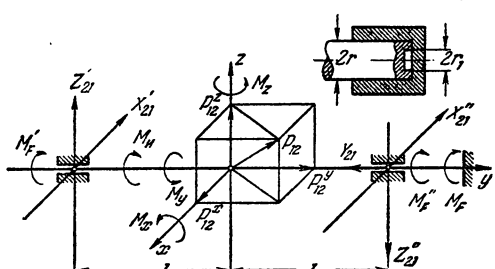


Рис. 5-85.

действием указанных сил возникают реакции, проекции которых показаны на рис. 5-85. Кроме этого, возникают противодействующие пары сил трения, моменты которых соответственно составляют:

$$\left.\begin{aligned} M'_F &= fr \bmod \mathbf{P}'_{21}, \quad M''_F = fr \bmod \mathbf{P}''_{21}, \\ M_F &= \frac{2}{3} f \frac{r^3 - r_1^3}{r^2 - r_1^2} \bmod \mathbf{Y}_{21}, \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}179)$$

где направления моментов противоположны направлению вращения вала.

Расчетная система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} P_{21}^{x} + X'_{21} + X''_{21} &= 0,\\ P_{12}^{y} + Y_{21} &= 0,\\ P_{12}^{z} + Z'_{21} + Z''_{21} &= 0,\\ M_x + Z'_{21}\,l + Z''_{21}\,l &= 0,\\ M_y + M'_F + M''_F + M_F + M_И &= 0,\\ M_z + X'_{21}\,l + X''_{21}\,l &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}180)$$

Решение такой системы уравнений затруднений не вызывает, потому что направления моментов трения легко устанавливаются.

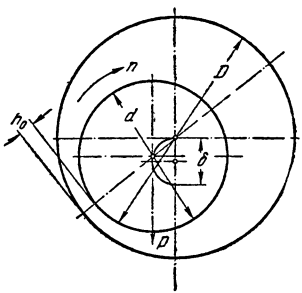


Рис. 5-86.

*Работа цапфы в условиях жидкостного трения**). Вследствие сцепления смазки с цапфой масло при вращении отжимает вал от вкладыша. Цапфа и вкладыш разделяются масляным слоем, внутри которого создается гидродинамическое давление, устанавливающее минимальный зазор h_0 (рис. 5-86). С увеличением абсолютной вязкости η [*кГ·сек/м*^{2}] и n [*об/мин*] и уменьшением удельной нагрузки $p=\frac{P}{dl}$ (l — длина цапфы) h_0 увеличивается и центр цапфы стремится к совпадению с центром подшипника, двигаясь по кривой, близкой к окружности с диаметром $\delta=0{,}5(D-d)$. Между указанными величинами устанавливается зависимость

$$p=\frac{P}{dl}=\frac{0{,}18\eta n}{10^4\psi^2}\,\frac{1}{1+5\dfrac{h_0}{s}\left(\dfrac{d}{l}\right)^2}\sqrt{\frac{s}{2h_0}-1}\,, \qquad (5\text{-}181)$$

где ψ — относительный зазор:

$$\psi=\frac{D-d}{d}=\frac{s}{d}. \qquad (5\text{-}182)$$

С уменьшением ψ и h_0 поддерживающая сила масляного слоя возрастает. Величина относительного зазора зависит от принятой посадки, которую устанавливают в соответствии с условиями работы вала и назначения подшипника (см. табл. 5-2). Для h_0 принимают значение $s/4$. Абсолютную вязкость вычисляют по формуле

$$\eta=\frac{\gamma}{10^5}\left(74\,E_t-\frac{64}{E_t}\right), \qquad (5\text{-}183)$$

где γ — удельный вес масла ($Г/см^3$); E_t — вязкость по Энглеру при действительной температуре t масла.

*) См. Краткий технический справочник под общей редакцией Вяч. А. Зиновьева, часть первая, Гостехиздат, 1952.

Таблица 5-2. **Зазоры $s_м(\mu) = c\sqrt{d}$ (*мм*) при различных посадках (система вала) (диаметры d валов от 30 до 260 *мм*)**

Класс точности	Посадка	Обозначение	Коэффициент c	Класс точности	Посадка	Обозначение	Коэффициент c
2	Движения	Д	1,5	2	Ходовая	Х	4
3	Ходовая	$Х_3$	5	4	Ходовая	$Х_4$	25
2	Легкоходовая	Л	8	4	Легкоходовая	$Л_4$	50
2	Широкоходовая	Ш	12	3	Широкоходовая	$Ш_3$	12
4	Широкоходовая	$Ш_4$	100				

Величину η можно вычислить и на основании данных табл. 5-3:

$$\eta \approx \frac{C}{t^3} \quad (C \text{ берут из табл. 5-3}). \tag{5-184}$$

Таблица 5-3. **Индустриальные масла**

Наименование масел	γ	E_{50}	η_{50}	C
Велосит	0,865	1,35	0,00045	56
Сепараторное Л	0,873	1,65	0,00053	66
Швейное	0,873	1,65	0,00053	66
Веретенное 2	0,883	2,10	0,00061	76
Сепараторное Т	0,886	2,35	0,00064	80
Веретенное 3	0,890	3,00	0,00179	224
Машинное Л	0,901	4,25	0,00270	337
Машинное С	0,906	6,00	0,00392	490
Цилиндровое 2	0,901	2,00	0,00105	131
Турбинное Л	0,901	3,05	0,00185	231
Турбинное УТ	0,906	4,00	0,00254	314
Моторное Т	0,921	8,60	0,00580	724
Автол 6	0,914	—	0,00424	530
Автол 10	0,920	—	0,00675	844
Автол 15	0,926	—	0,01050	1320

Коэффициент гидродинамического трения:

$$f_т = 1{,}5\psi \frac{1 + 5\dfrac{h_0}{s}\left(\dfrac{d}{l}\right)^2}{\sqrt[4]{\dfrac{s}{2h_0} - 1}} \left(1 + \frac{0{,}3}{\sqrt[4]{\dfrac{s}{2h_0} - 1}}\right). \tag{5-185}$$

Для определения рабочей температуры t смазочного слоя можно воспользоваться соотношением

$$\frac{Pf_т n}{60} = kl(t - t_0), \tag{5-186}$$

где t_0 — температура окружающей среды; k [*кг.м/м².сек.град*] — коэффициент теплоотдачи от металла к воздуху, равный $k = 5$ для легких подшипников, $k = 8$ для нормальных и $k = 14$ — для тяжелых; l — длина цапфы (*м*).

Выбором смазки можно добиться того, чтобы удельное давление не превышало допускаемого.

В подшипниках качения одновременно наблюдаются трение качения и трение скольжения. При расчетах величины, оценивающие полные потери в подшипниках качения, можно вычислять с использованием условных коэффициентов трения скольжения f_0, отнесенных к окружности вала. В таких случаях рекомендуется принимать: $f_0 = 0{,}001 - 0{,}004$ для шариковых и $f_0 = 0{,}0025 - 0{,}01$ для роликовых подшипников.

Винтовая пара. Вращению винта *2*, находящегося под воздей-

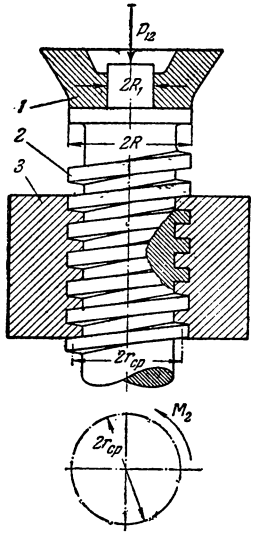


Рис. 5-87.

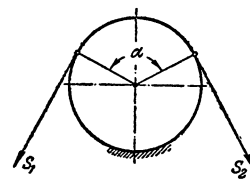


Рис. 5-88.

ствием пары сил с моментом M_2 относительно неподвижной гайки *3*, противодействует осевая сила P_{12} со стороны детали *1* (рис. 5-87). Деталь *1* может двигаться только прямолинейно поступательно. Кроме этого, движению винта *2* противодействуют силы трения в резьбе и на опорной поверхности детали *1*. Силу P_{12} и силы трения в резьбе считают приложенными на средней окружности резьбы.

При движущем моменте M_2 имеем:

$$M_2 = P_{12} r_{cp} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi') + \frac{2}{3} f_1 P_{12} \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^2}, \qquad (5\text{-}187)$$

где α — угол подъема резьбы, $\varphi' = \operatorname{arctg} f'$ — условный угол трения, определяемый по f' в соответствии с уравнением (5-178), если резьба треугольная или трапецеидальная; f_1 — коэффициент трения на опорной поверхности детали *1*.

При движущей силе P_{12} получаем:

$$P_{12} = \frac{M_2}{r_{cp} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi') - \frac{2}{3} f_1 \frac{R^3 - R_1^3}{R^2 - R_1^2}}. \qquad (5\text{-}188)$$

Если знаменатель правой части (5-188) меньше нуля, то это свидетельствует о том, что винтовая пара является *самотормозящейся*.

Трение гибкой нити по неподвижному цилиндру. Формула Эйлера, связывающая натяжения S_1 и S_2 ведущей и ведомой ветвей нити:

$$S_1 = S_2 e^{f\alpha}, \tag{5-189}$$

где f — коэффициент трения; α — угол обхвата; e — основание натуральных логарифмов (рис. 5-88).

§ 5-28. Фрикционные механизмы

Силовое исследование фрикционных механизмов сводится к определению необходимой силы нажатия колес по заданному моменту пары сил сопротивления и размерам колес. Кроме этого, при расчете определяют и реакции в подшипниках.

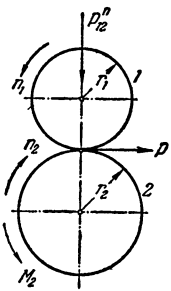


Рис. 5-89.

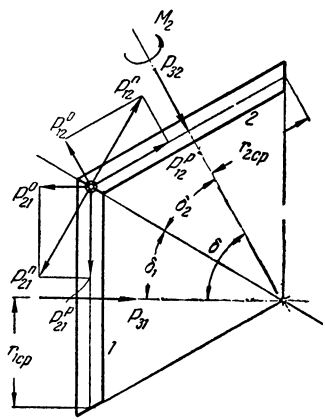


Рис. 5-90.

Для цилиндрической передачи (рис. 5-89) необходимая сила сцепления устанавливается по величине M_2. Имеем:

$$P = \frac{M_2}{r_2} k, \tag{5-190}$$

где $k \approx 1{,}20 \div 1{,}50$ — коэффициент запаса сцепления.

Сила нажатия P_{12}^n:

$$P_{12}^n = \frac{P}{f}, \tag{5-191}$$

где f — коэффициент трения на ободах колес, определяемый из табл. 5-4.

Реакции в подшипниках возникают от обеих сил P и P_{12}^n. Величины этих реакций зависят и от конструктивного оформления передачи.

В конической фрикционной передаче (рис. 5-90) окружная сила сцепления направлена перпендикулярно к чертежу и обозначена кружком с точкой. Ее величина составляет:

$$P = \frac{M_2}{r_{2cp}} k. \tag{5-192}$$

Необходимая нормальная сила нажатия:

$$\left| P_{12}^{n} \right| = \left| P_{21}^{n} \right| = \left| \frac{P}{f} \right|. \tag{5-193}$$

Для колеса 2 имеем:

$$P_{12}^{p} = P_{12}^{n} \cos \delta_2 = \frac{P}{f} \cos \delta_2, \tag{5-194}$$

$$P_{12}^{o} = \frac{P}{f} \sin \delta_2 = P_{32}. \tag{5-195}$$

Таблица 5-4. **Значения коэффициентов трения во фрикционных передачах**

Материалы трущихся поверхностей	Коэффициент трения f
Сталь по стали со смазкой	0,04—0,05
» » » или чугуну всухую	0,15—0,20
» » текстолиту или фибре всухую . .	0,20—0,25
» или чугун по коже всухую	0,20—0,35
» по ферродо всухую	0,30—0,35
» или чугун по резине всухую	0,35—0,45
» » чугун по дереву всухую	0,35—0,50

Для колеса 1:

$$P_{21}^{p} = \frac{P}{f} \cos \delta_1, \qquad P_{21}^{o} = \frac{P}{f} \sin \delta_1 = P_{31}. \tag{5-196}$$

Реакции в подшипниках следует определять по всем трем составляющим: P, P^{p} и P^{o}.

§ 5-29. Зубчатые механизмы

Силовой расчет зубчатых механизмов будем производить с учетом трения скольжения в зацеплениях и в подшипниках. Направления силы трения в зацеплении по разные стороны от полюса P (рис. 5-91) противоположны, потому что скорость скольжения в полюсе меняет знак. Отрезки Pa и Pb линии зацепления будем считать приблизительно равными, так что среднее значение силы трения F_{12} за период зацепления равно нулю. Средняя величина момента трения M_{12} за тот же период имеет определенное значение. На рис. 5-91, a дана эпюра момента $M_{\text{тр}}$, в соответствии с которой среднее значение составляет:

$$M_{12} \approx \frac{1}{2} F_{12} \cdot Pa \approx \frac{1}{2} F_{12} \cdot Pb \approx \frac{1}{4} F_{12} \cdot ab,$$

или, выражая Pa и Pb через дугу зацепления по основной окружности, имеем:

$$M_{12} \approx \frac{1}{4} F_{12} \pi m \varepsilon \cos \alpha = F_{12} h_{12}, \tag{5-197}$$

где m — модуль зацепления; ε — степень перекрытия.

Таким образом, будем считать, что в зацеплении действует пара сил с моментом M_{12}, направленным в сторону, противоположную относительной угловой скорости ω_{21}, равной алгебраической разности абсолютных угловых скоростей колес.

Под воздействием нормальной силы P^n_{32} (рис. 5-91, *б*) на окружности цапфы возникает сила трения $F_{32} = f_0 \bmod P^n_{32}$, направленная в сторону, противоположную относительной скорости. Будем для простоты считать, что к центру цапфы приложена нормальная реакция и

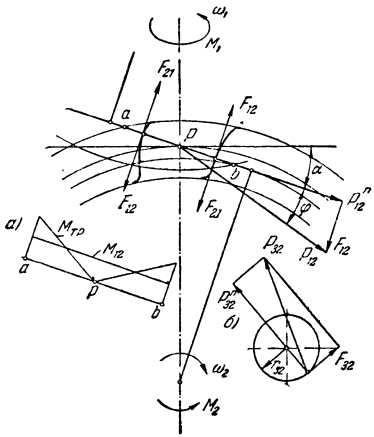


Рис. 5-91.

колесо находится под воздействием пары сил трения, момент M_{32} которой составляет:

$$M_{32} \approx f_0 P^n_{32} r_{32}. \qquad (5\text{-}198)$$

Этот момент направлен также против относительной угловой скорости.

Коэффициент трения f в зацеплении зависит от материала зубчатых колес, точности обработки и монтажа. Коэффициент трения в зацеплениях $f \approx 0{,}05 \div 0{,}20$, для подшипников скольжения $f_0 \approx 0{,}03 \div 0{,}10$, для шариковых $f_0 \approx 0{,}001 \div 0{,}004$ и для роликовых $f_0 \approx 0{,}0025 \div 0{,}01$.

Примеры. На рис. 5-92 изображена схема одноступенчатого механизма с внешним зацеплением зубьев. Пользуясь сначала плоской системой сил, будем определять реакции в подшипниках, условно расположенных в рассматриваемой плоскости зацепления. Такие реакции будем называть *условными*. Одновременно с силовой схемой мы будем пользоваться картинами скоростей колес, при помощи которых можно устанавливать направления относительных угловых скоростей, равных алгебраическим разностям абсолютных угловых скоростей.

Угловая скорость колеса 2 относительно колеса 1 составляет $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1|$, т. е. направлена по движению часовой стрелки, а потому момент

$$M_{12} \approx \frac{\pi}{4} f P_{12}\, m_s \cos\alpha = f P_{12} h_{12} \qquad (5\text{-}199)$$

направлен против движения стрелки часов.

Соответственно

$$M_{31} = f_0 P_{31} r_{31}, \quad M_{32} = f_0 P_{32} r_{32}, \qquad (5\text{-}200)$$

где r_{31} и r_{32} — радиусы цапф; M_{31} и M_{32} направлены против угловых скоростей колес *1* и *2*.

Составим теперь расчетные уравнения.

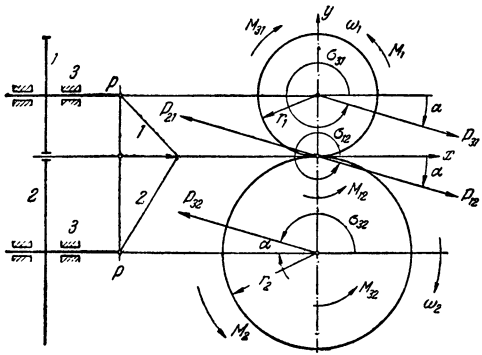


Рис. 5-92.

К о л е с о 2. Так как угол $\sigma_{12} = 360° - \alpha$, то

$$P_{32}\cos\sigma_{32} + P_{12}\cos\alpha = 0, \quad P_{32}\sin\sigma_{32} - P_{12}\sin\alpha = 0, \quad (5\text{-}201)$$

$$M_2 + f P_{12} h_{12} + f_0 P_{32} r_{32} - P_{12} r_2 \cos\alpha = 0. \quad (5\text{-}202)$$

Из уравнений (5-201) имеем: $\operatorname{tg}\sigma_{32} = \dfrac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}$, откуда $\sigma_{32} = 180° - \alpha$ и $P_{32} = P_{12}$. Из уравнения (5-202) получаем:

$$P_{12} = \frac{M_2}{r_2\cos\alpha - f h_{12} - f_0 r_{32}}. \quad (5\text{-}203)$$

К о л е с о *1*. Так как угол $\sigma_{21} = 180° - \alpha$, то

$$-P_{21}\cos\alpha + P_{31}\cos\sigma_{31} = 0, \quad P_{21}\sin\alpha + P_{31}\sin\sigma_{31} = 0, \quad (5\text{-}204)$$

$$M_1 - f_0 r_{31} P_{31} - f P_{21} h_{21} - P_{21} r_1 \cos\alpha = 0. \quad (5\text{-}205)$$

Из уравнения (5-204) имеем: $\operatorname{tg}\sigma_{31} = \dfrac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\sigma_{31} = 360° - \alpha$ и $P_{31} = P_{21}$. Следовательно:

$$M_1 = P_{21}(r\cos\alpha + f_0 r_{31} + f P_{21} h_{21}). \quad (5\text{-}206)$$

При отсутствии трения момент $M_1^{и}$ на колесе *1* равен:

$$M_1^{и} = M_2 \frac{r_1}{r_2}; \quad (5\text{-}207)$$

к. п. д. рассматриваемого механизма

$$\eta = \frac{M_1^{и}}{M_1}. \quad (5\text{-}208)$$

Пусть $r_1 = 100$, $r_2 = 200$, $m = 5$, $\varepsilon = 1{,}4$, $f = 0{,}1$, $f_0 = 0{,}05$, $r_{31} = 15$, $r_{32} = 20$, $M_3 = 10\,000$ *кГ · мм* (все указанные линейные размеры — в *мм*).

Имеем: $f_0 r_{31} = 0{,}05 \cdot 15 = 0{,}75$; $f_0 r_{32} = 0{,}05 \cdot 20 = 1$; $f h_{12} = 0{,}1 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 5 \cdot 1{,}4 \cos 20° = 0{,}517$. После подстановки числовых значений в приведенные выше формулы и вычислений получаем: $P_{12} = 53{,}6$ *кГ*, $M_1 = 5120$ *кГ · мм*, $M_1^{и} = 5000$ *кГ · мм*, $\eta = 0{,}975$.

На рис. 5-93 изображены схема двухступенчатой зубчатой передачи, картины скоростей ее звеньев и силовая схема. Применяя обозначения, аналогичные предыдущим, произведем силовое исследование рассматриваемого механизма по заданному моменту M_3.

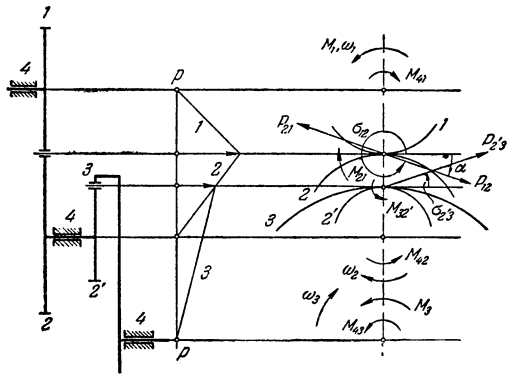


Рис. 5-93.

Так как $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1| < 0$ и $\omega_{23} = -|\omega_2| + |\omega_3| < 0$, то $M_{12} > 0$ и $M_{32}' > 0$.

Колесо 3.

$$P_2'_3 \cos\alpha + P_{43} \cos\sigma_{43} = 0, \quad P_2'_3 \sin\alpha + P_{43} \sin\sigma_{43} = 0, \tag{5-209}$$

$$M_3 - M_2'_3 + M_{43} - P_2'_3 r_3 \cos\alpha = 0. \tag{5-210}$$

Решение последней системы уравнений аналогично рассмотренному в предыдущем примере.

Колеса 2 и 2'.

$$\left.\begin{aligned} P_{12}\cos\alpha - P_{32}'\cos\alpha + P_{42}\cos\sigma_{42} = 0,\\ -P_{12}\sin\alpha - P_{32}'\sin\alpha + P_{42}\sin\sigma_{42} = 0,\end{aligned}\right\} \tag{5-211}$$

$$-P_{12} r_2 \cos\alpha + P_{32}' r_2' \cos\alpha + f h_{12} P_{12} + f h_{32}' P_{32}' + f_0 r_{42} P_{42} = 0. \tag{5-212}$$

Для определения неизвестных P_{12}, σ_{42} и P_{42}, используя уравнение (5-212), исключаем из уравнения (5-211) P_{42} и затем P_{12}, после чего получаем уравнение, в которое σ_{42} входит под знаки синуса и косинуса. Такое уравнение приводится к квадратному относительно одной из указанных тригонометрических функций.

Решая систему методом последовательных приближений, принимаем в первом приближении последнее слагаемое уравнения (5-212) равным нулю. Из этого уравнения определяем P_{12}, после чего находим σ_{42} и затем P_{42} из уравнения (5-211). Во втором приближении подставляем в уравнение (5-212) полученную величину P_{42} и т. д.

Колесо *1*. Силовой анализ аналогичен рассмотренному в предыдущем примере.

Для определения к. п. д. рассматриваемого механизма следует воспользоваться уравнением (5-208), в котором

$$M_1^{\text{и}} = M_3 \frac{r_1 r_2'}{r_2 r_3} . \tag{5-213}$$

На рис. 5-94 изображены схема планетарного механизма, картины скоростей его звеньев и силовая схема. Произведем силовой расчет по заданному моменту сопротивления M_H: $\omega_{21} = -|\omega_2| - |\omega_1| < 0$, а потому $M_{12} > 0$; $\omega_{32} = -|\omega_2| < 0$, а потому $M_{32}' > 0$; $\omega_{2H} = -|\omega_2| + |\omega_H|$; в соответствии с картинами скоростей и размерами звеньев (рис. 5-94) $|\omega_2| > |\omega_H|$, а потому $M_{2H} > 0$.

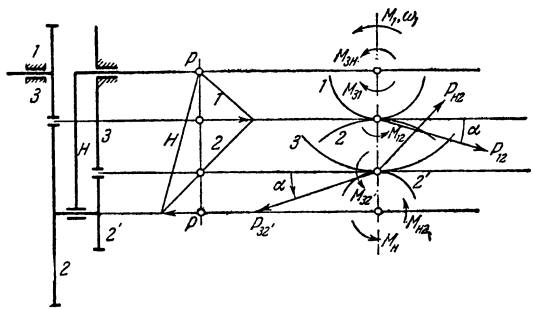


Рис. 5-94.

Водило H и колеса 2 и 2'. Составляем расчетные уравнения:

$$P_{2H}\cos\sigma_{2H} + P_{3H}\cos\sigma_{3H} = 0, \quad P_{2H}\sin\sigma_{2H} + P_{3H}\sin\sigma_{3H} = 0, \tag{5-214}$$

откуда

$$P_{2H} = P_{3H} \quad \text{и} \quad \sigma_{3H} = 180^\circ + \sigma_{2H}, \tag{5-215}$$

$$-P_{2H} r_H \cos\sigma_{2H} + M_H + M_{2H} + M_{3H} = 0, \tag{5-216}$$

где все обозначения аналогичны предыдущим.

$$\left.\begin{aligned} P_{12}\cos\alpha + P_{H2}\cos\sigma_{2H} - P_{32}'\cos\alpha = 0, \\ -P_{12}\sin\alpha + P_{H2}\sin\sigma_{H2} - P_{32}'\sin\alpha = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5-217}$$

$$-P_{12}(r_2 - r_1)\cos\alpha + P_{H_2} r_2'\cos\sigma_{H2} + M_{12} + M_{32}' + M_{H2} = 0. \tag{5-218}$$

Точное решение поставленной задачи затруднительно. Решим числовой пример приближенным методом.

Воспользуемся следующими данными: $m = 5$, $r_1 = 50$, $r_2 = 200$, $r_2' = 40$, $r_3 = 210$, $r_{31} = 15$, $r_{H2} = 20$, $r_{3H} = 25$, $f = 0{,}1$, коэффициент трения во всех подшипниках $f_0 = 0{,}01$, в подшипниках колес 2 и 2' $f_0' = 0{,}05$, коэффициент перекрытия обоих зацеплений $\varepsilon = 1{,}5$, $M_H = 100\,000$ *кГ·мм* (все линейные размеры — в *мм*).

На основании уравнения (5-197) имеем: $h_{12} = h_{32'} = \frac{\pi}{4} m\varepsilon \cos\alpha = \frac{3{,}14}{4} \cdot 5 \cdot 1{,}5 \cdot \cos 20° = 5{,}6$ *мм*. Моменты трения в зацеплениях: $M_{12} = fh_{12}P_{12} = 0{,}1 \cdot 5{,}6\, P_{12} = 0{,}56\, P_{12}$, $M_{32'} = fh_{32'} P_{32'} = 0{,}1 \cdot 5{,}6\, P_{32'} = 0{,}56\, P_{32'}$.

Моменты трения в подшипниках устанавливаются на основании (5-198): $M_{41} = f_0 r_{41} P_{41} = 0{,}01 \cdot 15 P_{41} = 0{,}15\, P_{41}$, $M_{H2} = f_0' r_{H2} P_{H2} = 0{,}05 \cdot 20\, P_{H2} = P_{H2}$, $M_{4H} = f_0 r_{4H} P_{4H} = 0{,}01 \cdot 25\, P_{4H} = 0{,}25\, P_{4H}$.

На основании уравнения (5-216) получаем: $P_{4H} = P_{2H}$ и $\sigma_{4H} = 180° + \sigma_{2H}$.

В первом приближении пренебрегаем трением в подшипниках. По уравнению (5-216): $-250\, P_{2H} \cos\sigma_{2H} + 100\,000 = 0$, откуда

$$P_{2H} \cos\sigma_{2H} = 400 \text{ кг},$$

а по уравнению (5-217): $0{,}94\, P_{12} + 400 - 0{,}94\, P_{32'} = 0$,

$$-0{,}342\, P_{12} + P_{H2} \sin\sigma_{H2} - 0{,}342\, P_{32'} = 0,$$
$$-150{,}5\, P_{12} + 16\,000 + 0{,}56\, P_{12} + 0{,}56\, P_{32'} = 0.$$

Пренебрегая в последнем уравнении величиной $0{,}56 P_{32'}$, после решения имеем: $P_{12} = 107$ *кГ*. Далее вычисляем величину $P_{32'} = 532$ *кГ*. Теперь можно определить $P_{H2} \sin\sigma_{H2} = 218{,}6$ *кГ*. Наконец, имеем:

$$P_{H2} = \sqrt{400^2 + 218{,}6^2} = 456 \text{ кГ}.$$

Для второго приближения вычисляем величины моментов трения: $M_{12} = 0{,}56 \cdot 107 = 60$ *кГ·мм*; $M_{32'} = 0{,}56 \cdot 532 = 300$ *кГ·мм*; $M_{H2} = 456$ *кГ·мм*; $M_{4H} = 0{,}25 \cdot 456 = 114$ *кГ·мм*.

Уточненный расчет производится в той же последовательности. В результате этого расчета окончательно получаем: $P_{2H} \cos\sigma_{2H} = 402$ *кГ*, $P_{12} = 113$ *кГ*, $P_{2H} \sin\sigma_{2H} = 223{,}6$ *кГ*, $P_{32'} = 540$ *кГ*, $P_{H2} = 460$ *кГ*, $\sigma_{H2} = 29°$.

Для колеса 1 имеем: $P_{41} = P_{21}$, $\sigma_{41} = 360° - \alpha = 340°$, $M_1 = 5401$ *кГ·мм*.

Момент $M_1^{и}$ при отсутствии трения: $M_1^{и} = \frac{M_H}{i_{1H}} = \frac{M_H}{1 - \frac{r_2' r_3}{r_1 r_2'}} =$

$= -5000$ *кГ·мм*;

$$\text{к. п. д. } \eta = \frac{5000}{5401} = 0{,}922.$$

Косозубые колеса. Вектор $\mathbf{P}^n$ нормального давления зуба одного колеса на зуб другого располагается в плоскости, повернутой на угол наклона зуба β от торцовой плоскости, и, кроме того, он наклонен под углом зацепления α к плоскости, касающейся начальных цилиндров колес (рис. 5-95).

Из заданных условий обыкновенно устанавливается величина окружного усилия P, в соответствии с которой имеем:

$$P^n = \frac{P}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad P_x = P\operatorname{tg}\beta, \quad P_z = P\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\beta}. \tag{5-219}$$

Учет трения в косозубом зацеплении затруднителен. Если по-прежнему считать среднее значение силы трения в зацеплении равным нулю,

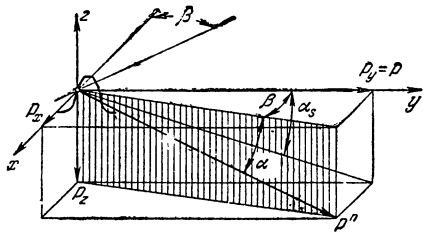


Рис. 5-95.

то для определения момента трения можно воспользоваться формулой (5-197) и считать его приложенным в плоскости действия окружного усилия P.

Коническое зубчатое зацепление. Нормальная сила P^n_{21}, действующая в средней плоскости зубьев, раскладывается на окружную силу P и составляющую P', которая в свою очередь раскладывается на радиальную составляющую P^p_{21} и осевую P^o_{21}. Все эти составляющие оказывают воздействие на подшипники колеса *1* (рис. 5-96).

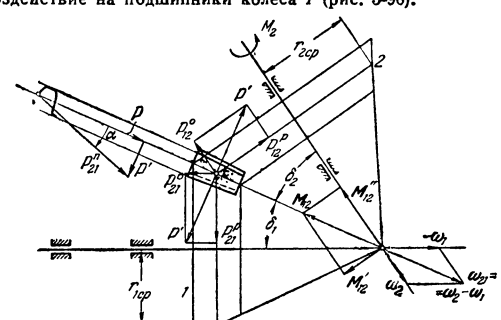


Рис. 5-96.

Если трением пренебречь, то в соответствии с заданным моментом M_2 пары сил сопротивления, приложенной к колесу 2, имеем:

$$P = \frac{M_2}{r_{2cp}}, \quad P^n_{21} = \frac{P}{\cos\alpha}, \quad P^p_{21} = P\operatorname{tg}\alpha\cos\delta_1, \quad P^o_{21} = P\operatorname{tg}\alpha\sin\delta_1. \tag{5-220}$$

Полагая по-прежнему, что за период зацепления пары зубьев среднее значение силы трения равно нулю, можно определить момент трения в зацеплении аналогично предыдущему. Руководствуясь уравнением (5-197), имеем:

$$M_{12} = \frac{\pi}{4} f P_{21}^{n} m_{ср} \varepsilon \cos\alpha = f P_{21}^{n} h_{12}, \qquad (5\text{-}221)$$

где $m_{ср}$ — модуль, измеренный по диаметру средней окружности начального конуса.

Вектор M_{12} направлен в сторону, противоположную относительной угловой скорости ω_{21}, которая определяется в соответствии с рис. 5-96 из равенства $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$. Вектор M_{12} раскладывается на две составляющие — вдоль оси колеса *2* и перпендикулярно к ней:

$$\mathbf{M}_{12} = \mathbf{M}'_{12} + \mathbf{M}''_{12}, \qquad (5\text{-}222)$$

где составляющая M'_{12} уравновешивается реактивной парой в подшипниках; плоскость действия указанной пары совпадает с плоскостью, содержащей ось колеса *2* и перпендикулярной к чертежу. Составляющая M''_{12}, складываясь с моментом M_2, оказывает сопротивление вращению колеса *2*.

На колесо *1* действует момент $M_{21} = -M_{12}$; M_{21} раскладывается аналогично на составляющие M'_{21} и M''_{21}.

Червячное зацепление. На рис. 5-97 показан профиль резьбы червяка, находящегося под воздействием нормальной силы P_{21}^{n} со стороны колеса. Червячное зацепление представляет собой сочетание винтового и реечного зацеплений. Основными в данном случае являются

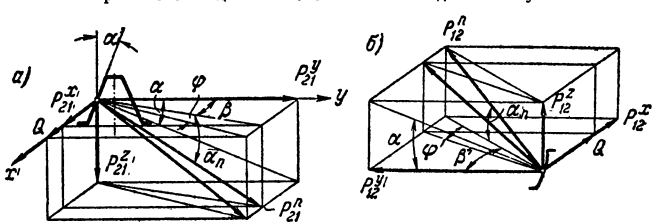


Рис. 5-97.

потери на трение скольжения червяка относительно колеса в направлении касательной к винтовой линии. Соотношение между силами в червячной передаче зависит от того, какое из звеньев служит ведущим.

Ведущий червяк (рис. 5-97, *а*). Дана окружная сила сопротивления P_{21}^{y} колеса. Окружное усилие червяка Q и радиальная сила P_{21}^{z} соответственно составляют:

$$\left.\begin{aligned} Q = P_{21}^{y} \operatorname{tg}(\beta + \varphi'), \quad P_{21}^{z} = P_{21}^{y} \frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta} = P_{21}^{y} \operatorname{tg}\alpha, \\ \text{где} \quad \varphi' = \operatorname{arctg}\frac{f}{\cos\alpha}. \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}223)$$

Ведущее колесо (рис. 5-97, *б*). Дана окружная сила сопротивления Q червяка. Окружное усилие P_{12}^{y} колеса и радиальная сила соответственно составляют:

$$P_{12}^{y}=\frac{Q}{\operatorname{tg}(\alpha-\varphi')},\qquad P_{12}^{z}=P_{12}^{y}\frac{\operatorname{tg}\alpha_n}{\cos\beta}=P_{12}^{y}\operatorname{tg}\alpha. \tag{5-224}$$

Трение червячной пары как реечного зацепления можно учесть моментом M_{12} по формуле (5-197).

§ 5-30. Плоские механизмы с низшими парами

Силовой анализ рассматриваемых здесь механизмов сводится к определению реакций в кинематических парах и уравновешивающего момента M_1, приложенного к ведущему звену, от внешних сил, приложенных к механизму, сил инерции и сил тяжести звеньев. Учет сил трения в кинематических парах будем производить только приближенными методами. Задавать векторы всех указанных сил будем их алгебраическими значениями и их углами наклона к положительному направлению оси x прямоугольной системы координат.

Решение поставленной задачи производится после того, как выполнены структурный и кинематический анализы механизма, на основании последнего из которых определяются силы инерции звеньев, что необходимо при использовании принципа д'Аламбера.

Решение задачи о реакциях следует начинать с наиболее удаленной от ведущего звена группы Ассура, для каждой из которых можно составить столько же уравнений равновесия, сколько неизвестных содержат определяемые реакции. После силового расчета последней группы рассматривают предпоследнюю и т. д., приближаясь к ведущему звену, равновесие которого обеспечивается приложенным к нему уравновешивающим моментом.

Звенья механизма, схема которого изображена на рис. 5-98, нагружены каждое одной силой, являющейся равнодействующей всех приложенных к звену сил. Покажем, как определить реакции во всех кинематических парах и уравновешивающий момент M_1, приложенный к ведущему звену *1*.

Схема заданного механизма может быть разделена на четырехугольник *ABCDA* и треугольник *DEFD*. Расчет начинаем с треугольника *DEFD*, в котором звено *DE* служит ведущим, а звенья *4* и *5* представляют собой двухповодковую группу.

Треугольник *DEFD*. К ведомым звеньям *4* и *5* приложены внешние силы сопротивления $\mathbf{P}_4$ (P_4, σ_4) и $\mathbf{P}_5$ (P_5, σ_5), в результате действия которых со стороны ведущего звена *3* возникает реакция $\mathbf{P}_{34}$ (P_{34}, σ_{34}), со стороны неподвижного звена *6* — $\mathbf{P}_{65}$ (P_{65}, σ_{65}) и в промежуточной опоре — $\mathbf{P}_{45}$ (P_{45}, σ_{45}) или $\mathbf{P}_{54}=-\mathbf{P}_{45}$ (здесь и далее σ с соответствующими индексами — угол наклона вектора силы $\mathbf{P}$ с теми же индексами к оси x).

Уравнения равновесия звеньев *4* и *5*:

звено *4*

$$\mathbf{P}_{34}+\mathbf{P}_4+\mathbf{P}_{54}=0; \tag{5-225}$$

звено *5*

$$\mathbf{P}_{45}+\mathbf{P}_5+\mathbf{P}_{65}=0. \tag{5-226}$$

Так как $\mathbf{P}_{54}=-\mathbf{P}_{45}$, то, складывая уравнения (5-225) и (5-226), получаем:

$$\mathbf{P}_{34}+\mathbf{P}_4+\mathbf{P}_5+\mathbf{P}_{65}=0. \tag{5-227}$$

Для реакции $\mathbf{P}_{34}$ известна точка, через которую проходит линия действия ее вектора, для реакции $\mathbf{P}_{65}$ известно направление линии действия — перпендикуляр к направляющей DF, и в общем случае ни одна точка линии действия неизвестна. Однако в данном частном случае такой точкой служит точка F, потому что в ней пересекаются векторы $\mathbf{P}_5$ и $\mathbf{P}_{43}$ двух сил, приложенных к звену *5*.

Для определения алгебраического значения вектора $\mathbf{P}_{65}$ удобно воспользоваться уравнением моментов сил, действующих на звенья *4* и *5*, относительно точки E. Имеем:

$$P_4 h_4 + P_5 h_5 - P_{65} h_{65} = 0, \tag{5-228}$$

где h с соответствующими индексами — перпендикуляр, опущенный из точки E на линию действия вектора силы с теми же индексами.

После вычисления P_{65} неизвестное $\mathbf{P}_{34}$ можно определить построением плана сил (рис. 5-98, *б*) на основе уравнения (5-227).

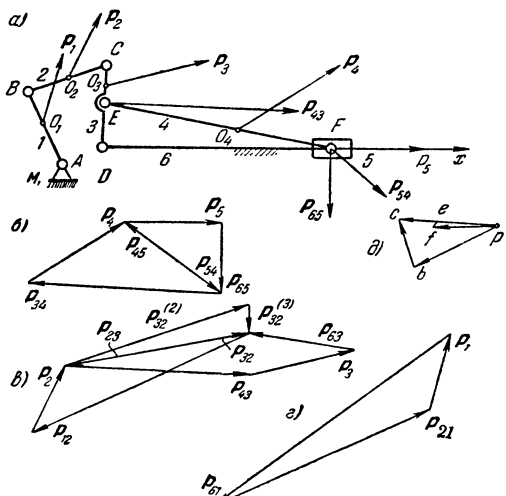


Рис. 5-98.

Для определения реакции $\mathbf{P}_{45}$ в паре *4—5* можно воспользоваться уравнением (5-226) (рис. 5-98, *б*).

Ту же задачу можно решить численным методом. Развернем уравнение (5-227) в уравнения проекций векторов сил на оси координат:

$$\left.\begin{aligned} P_{34}\cos\alpha_{34} + P_4\cos\alpha_4 + P_5\cos\alpha_5 + P_{65}\cos\alpha_{65} = 0,\\ P_{34}\sin\alpha_{34} + P_4\sin\alpha_4 + P_5\sin\alpha_5 + P_{65}\sin\alpha_{65} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5-229}$$

К этим уравнениям надо добавить уравнение моментов, получаемое на основании уравнения (5-228):

$$P_4 l_{EO_4} \sin(\sigma_4 - \varphi_4) + P_5 l_{EF} \sin(\sigma_5 - \varphi_4) + \\ + P_{65} l_{EF} \sin(\sigma_{65} - \varphi_4) = 0, \quad (5\text{-}230)$$

из которого определяется алгебраическое значение вектора $\mathbf{P}_{65}$.

Далее решение системы уравнений (5-229) трудности не представляет. Сначала следует определить $\operatorname{tg} \sigma_{34}$ и σ_{34}, что выполняется, после изолирования первых слагаемых, делением второго уравнения на первое, и затем из одного уравнения системы (5-229) вычисляется P_{34}.

Четырехугольник *ABCDA*. Звено *2* нагружено силой $\mathbf{P}_2$ (P_2, σ_2), звено *3* — силой $\mathbf{P}_3$ (P_3, σ_3) и силой $\mathbf{P}_{43}$ (P_{43}, σ_{43}) действия звена *4* на звено *3*. В результате приложения указанных сил возникают искомые реакции $\mathbf{P}_{12}$ (P_{12}, σ_{12}), $\mathbf{P}_{63}$ (P_{63}, σ_{63}) и $\mathbf{P}_{23}$ (P_{23}, σ_{23}), причем $\mathbf{P}_{23} = -\mathbf{P}_{32}$.

Уравнения равновесия звеньев *2* и *3*:

звено *2*

$$\mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_{32} = 0, \quad (5\text{-}231)$$

звено *3*

$$\mathbf{P}_{23} + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_{43} + \mathbf{P}_{63} = 0. \quad (5\text{-}232)$$

Для удобства решения последних двух уравнений представим вектор $\mathbf{P}_{23}$ или вектор $\mathbf{P}_{32}$ в виде двух проекций на направления *BC* и *DC*. Имеем:

$$\mathbf{P}_{32} = \mathbf{P}^{(2)}_{32} + \mathbf{P}^{(3)}_{32}, \quad \mathbf{P}_{23} = \mathbf{P}^{(2)}_{23} + \mathbf{P}^{(3)}_{23}. \quad (5\text{-}233)$$

Теперь вместо (5-231) и (5-232) получаем:

$$\mathbf{P}_{12} + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}^{(2)}_{32} + \mathbf{P}^{(3)}_{32} = 0, \quad (5\text{-}234)$$

$$\mathbf{P}^{(2)}_{23} + \mathbf{P}^{(3)}_{23} + \mathbf{P}_{43} + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_{63} = 0. \quad (5\text{-}235)$$

Составляющие $P^{(2)}_{32}$ и $P^{(3)}_{23}$ можно определить из уравнений моментов сил, действующих на звено *2*, относительно точки *B* и сил, действующих на звено *3*, относительно точки *D*. Имеем:

$$P_2 h_2 + P^{(3)}_{32} h^{(3)}_{32} = 0, \quad (5\text{-}236)$$

$$P_{43} h_{43} - P_3 h_3 + P^{(2)}_{23} h^{(2)}_{23} = 0, \quad (5\text{-}237)$$

где по-прежнему h с соответствующими индексами — плечо вектора силы с такими же индексами.

Искомые реакции $\mathbf{P}_{12}$ и $\mathbf{P}_{63}$ определяются построением плана сил (рис. 5-98, *в*) на основании уравнений (5-234) и (5-235).

При численном решении той же задачи зависимости (5-236) и (5-237) следует представить в аналитическом виде:

$$P_2 l_{BO_2} \sin(\sigma_2 - \varphi_2) + P^{(3)}_{32} l_{BC} \sin(\varphi_3 - \varphi_2) = 0, \quad (5\text{-}238)$$

$$P_{43} l_{DE} \sin(\sigma_{43} - \varphi_3) + P_3 l_{DO_3} \sin(\sigma_3 - \varphi_3) + \\ + P^{(2)}_{23} l_{DC} \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = 0. \quad (5\text{-}239)$$

Из этих уравнений можно вычислить составляющие векторов $P^{(3)}_{32}$ и $P^{(2)}_{23}$, после чего в соответствии с уравнением (5-233) можно воспользоваться уравнениями для вычисления искомых σ_{32} и P_{32}:

$$\left.\begin{aligned} P_{32} \cos \sigma_{32} &= P^{(2)}_{32} \cos \varphi_2 + P^{(3)}_{32} \cos \varphi_3, \\ P_{32} \sin \sigma_{32} &= P^{(2)}_{32} \sin \varphi_2 + P^{(3)}_{32} \sin \varphi_3. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}240)$$

Наконец, развернув зависимости (5-231) и (5-232) в уравнения проекций, получаем:

$$\left.\begin{aligned} P_{12}\cos\sigma_{12}+P_2\cos\sigma_2+P_{32}\cos\sigma_{32}=0,\\ P_{12}\sin\sigma_{12}+P_2\sin\sigma_2+P_{32}\sin\sigma_{32}=0;\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}241)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{23}\cos\sigma_{23}+P_3\cos\sigma_3+P_{43}\cos\sigma_{43}+P_{63}\cos\sigma_{63}=0,\\ P_{23}\sin\sigma_{23}+P_3\sin\sigma_3+P_{43}\sin\sigma_{43}+P_{63}\sin\sigma_{63}=0.\end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}242)$$

Эти уравнения позволяют вычислить P_{12}, σ_{12} и P_{63}, σ_{63}.

Ведущее звено *1*. Звено *1* находится под воздействием силы $\mathbf{P}_{21}$ (P_{21}, σ_{21}), силы $\mathbf{P}_1$ (P_1, σ_1) и пары сил с искомым моментом M_1. Имеем:

$$\mathbf{P}_{21}+\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_{61}=0, \qquad M_1-P_{21}h_{21}-P_1h_1=0. \quad (5\text{-}243)$$

Первое уравнение можно построить (рис. 5-98, *г*) или развернуть в уравнения проекций, из которых можно определить P_{61}, σ_{61}.

Для вычисления M_1 следует второе уравнение (5-243) представить в аналитическом виде:

$$M_1+P_{21}l_{AB}\sin(\sigma_{21}-\varphi_1)+P_1l_{AO_1}\sin(\sigma_1-\varphi_1)=0. \quad (5\text{-}244)$$

На основании разобранного примера можно сделать следующие выводы: а) силовой анализ необходимо начинать с наиболее удаленной от ведущего звена группы; б) для анализа можно воспользоваться либо векторными уравнениями каждого звена группы, либо векторными уравнениями всех ее звеньев; в) для использования уравнений моментов искомые реакции целесообразно представлять в виде двух составляющих с известными направлениями; г) в качестве центра моментов выбирается точка с таким расчетом, чтобы моменты некоторых из искомых реакций обращались в нуль.

На рис. 5-99 представлен механизм, в состав которого входит трехповодковая группа. Пусть к каждому звену приложена сила (векторы

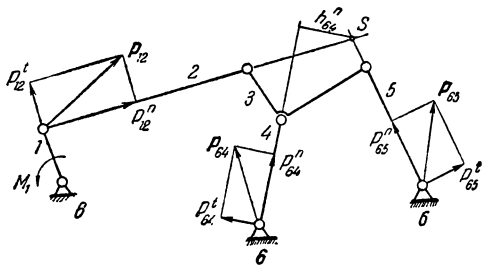


Рис. 5-99

таких сил на рис. 5-99 не показаны), а к ведущему звену *1* приложена пара с искомым моментом M_1. Требуется определить реакции во всех кинематических парах и момент M_1.

Наметим план решения поставленной задачи. Представим векторы $\mathbf{P}_{12}$, $\mathbf{P}_{64}$ и $\mathbf{P}_{65}$ искомых реакций в виде двух составляющих вида $\mathbf{P}^n$ и $\mathbf{P}^t$ каждый. В таком случае можно будет определить составляющие

вида $\mathbf{P}^t$ из уравнений моментов сил, действующих на звенья *2*, *4* и *5*, относительно соответствующих центров шарниров звена *3*. После этого следует установить величину $\mathbf{P}^n_{64}$ из уравнения моментов относительно точки *S* всех сил, действующих на звенья *2*, *3*, *4* и *5*. В этом уравнении моменты искомых составляющих P^n_{12} и P^n_{65} окажутся равными нулю. В заключение при помощи векторного уравнения равновесия всей ведомой части можно будет определить реакции $\mathbf{P}^n_{12}$ и $\mathbf{P}^n_{65}$. Реакции в шарнирах звена *3* определяются из векторных уравнений равновесия звеньев *2*, *4* и *5*.

Решение той же задачи численным методом производится в такой же последовательности после представления всех уравнений в аналитическом виде.

Если учитывается трение в кинематических парах, то по установленным предварительным расчетом реакциям следует определить моменты трения. Для определения направлений моментов трения надо знать относительные угловые скорости, которые устанавливаются при помощи планов скоростей. Например, для определения направления момента M_{32} трения в кинематической паре *2—3* (рис. 5-98, *а*) надо воспользоваться соотношением

$$M_{32} = fP_{32}r_{32}, \tag{5-245}$$

где f — коэффициент трения на поверхностях соприкосновения пары *2—3*; r_{32} — радиус цапфы той же пары.

Чтобы установить направление M_{32}, воспользуемся планом скоростей (рис. 5-98, *д*), при помощи которого определяется относительная угловая скорость ω_{23}:

$$\omega_{23} = \omega_2 - \omega_3 = |\omega_2| - |\omega_3|, \tag{5-246}$$

где в соответствии с рис. 5-98, *а* и *д* ω_2 и ω_3 направлены в положительную сторону, а так как $|\omega_3| > |\omega_2|$, то $M_{23} < 0$ и $M_{32} > 0$.

Определив моменты трения во всех кинематических парах, следует произвести силовой расчет всего механизма с учетом указанных моментов трения.

§ 5-31. Кулачковые механизмы

По заданной силе $\mathbf{P}_2$, действующей на толкатель *2* (рис. 5-100), определить реакции в кинематических парах и движущий момент M_1.

Распределение реакций и сил трения в поступательной паре толкателя можно произвести на основании § 5-26.

Для толкателя *2* имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} -P'_{32} + P''_{32} + P_{2'2}\cos(\sigma^n_{2'2} + \varphi) &= 0,\\ -P_2 - fP'_{32} - fP''_{32} - P_{2'2}\sin(\sigma^n_{2'2} + \varphi) &= 0,\\ P'_{32}(a+l) - P''_{32}a - fP'_{32}b + fP''_{32}b - P^n_{2'2}fr_1 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5-247}$$

где $\sigma^n_{2'2}$ — заданный угол, устанавливающий направление нормали к профилю кулачка; φ — угол трения на поверхности цапфы ролика; r_1 — радиус цапфы; f_1 — коэффициент трения для цапфы ролика.

В системе уравнений (5-247) мы имеем следующие неизвестные: P'_{32}, P''_{32} и $P_{2'2}$, которые можно определить непосредственно или методом последовательных приближений.

Ролик *2'* со стороны толкателя *2* находится под воздействием силы $\mathbf{P}_{22'} = -\mathbf{P}_{2'2}$ и со стороны кулачка *1* — силы $\mathbf{P}_{12} = -\mathbf{P}^n_{22'}$.

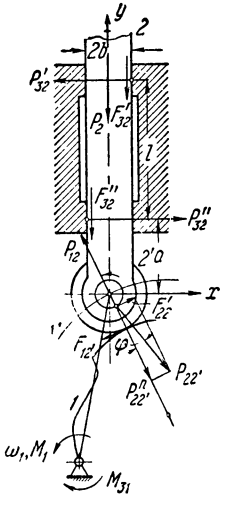


Рис. 5-100.

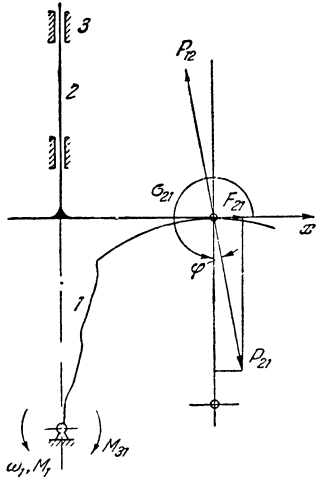


Рис. 5-101.

На кулачок *1* действуют силы $\mathbf{P}^n_{2'1} = \mathbf{P}^n_{22'}$, уравновешивающая пара сил с моментом M_1; в неподвижной опоре — искомая реакция $\mathbf{P}_{31}$ и пара сил трения с моментом $M_{31} = f_0 P_{31} r_2$, где f_0 — коэффициент трения на поверхности цапфы, радиус которой равен r_2.

Для определения P_{31}, σ_{31} и M_1 имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} P^n_{22'}\cos\sigma^n_{22'} + P_{31}\cos\sigma_{31} &= 0,\\ P^n_{22'}\sin\sigma^n_{22'} + P_{31}\sin\sigma_{31} &= 0,\\ M_1 - M_{31} - P^n_{22'}\,h^n_{22'} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}248)$$

где $h^n_{22'}$ — плечо силы $\mathbf{P}^n_{22'}$.

Система уравнений (5-248) решается известным способом.

Для определения к. п. д. рассматриваемого механизма следует определить $M^и_1$ — уравновешивающий момент — в предположении, что трение отсутствует, после чего получаем:

$$\eta = \frac{M^и_1}{M_1}.$$

После рассмотрения предыдущего механизма анализ механизма, изображенного на рис. 5-101, трудности не представляет. Здесь следует обратить внимание только на направление силы $\mathbf{P}_{21}$, действующей в контакте толкатель 2 — кулачок 1. Эта сила отклонена от перпендикуляра к диску под углом трения φ.

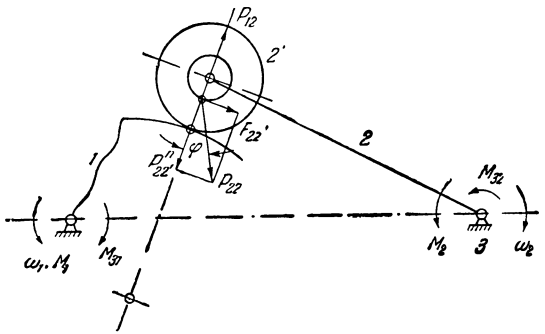


Рис. 5-102.

На рис. 5-102 изображена схема механизма с коромыслом. Определение реакций в кинематических парах и уравновешивающего момента M_1 производится так же, как и в случае механизма с толкателем и роликом на его конце.

Глава 5-10

УРАВНОВЕШИВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ [1]

§ 5-32. Уравновешивание вращающихся звеньев

Вращающееся звено оказывается уравновешенным, если главный вектор и главный момент центробежных сил инерции материальных точек его равны нулю. Опоры такого звена свободны от динамических давлений. Уравновесить, или отбалансировать, звено — это значит привести к нулю указанные главный вектор и главный момент. Достигается это добавлением или удалением массы определенной величины. Добавляемая масса называется *противовесом*. *Статическая балансировка* заключается в приведении к нулю главного вектора; *динамическая балансировка* — в приведении к нулю главного вектора и главного момента. Статическая балансировка производится одним противовесом, динамическая — двумя, установленными в двух различных параллельных плоскостях. Такие противовесы создают силу и уравновешивающую пару сил.

Пусть вращающееся звено разделено n плоскостями, перпендикулярными к оси x, причем для каждой части, расположенной между двумя соседними плоскостями, известно положение центра тяжести.

На рис. 5-103 показана одна из таких частей в виде массы m_i, сосредоточенной в центре тяжести. При заданной угловой скорости требуется определить давления P_I и P_{II}.

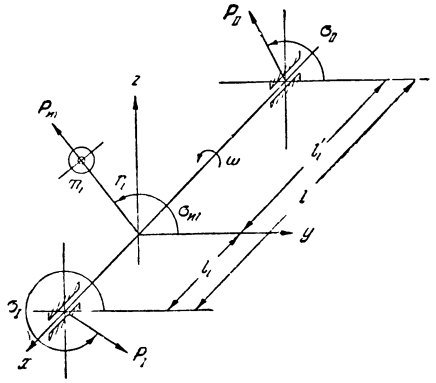


Рис 5-103.

Для решения поставленной задачи имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} P_I l \cos\sigma_I + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i' \cos\sigma_{mi} = 0, \\ P_I l \sin\sigma_I + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i' \sin\sigma_{mi} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}249)$$

$$\left.\begin{aligned} P_{II} l \cos\sigma_{II} + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i \cos\sigma_{mi} = 0, \\ P_{II} l \sin\sigma_{II} + \omega^2 \sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i \sin\sigma_{mi} = 0, \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}250)$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$.

Из (5-249):

$$\operatorname{tg}\sigma_I = \frac{-\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i' \sin\sigma_{mi}}{-\sum_{i=1}^{i=n} m_i r_i l_i' \cos\sigma_{mi}}. \quad (5\text{-}251)$$

Теперь P_I и σ_I можно определить из зависимости (5-219). Определение σ_{II} и P_{II} производится аналогично.

Чтобы освободить подшипники от динамических давлений, необходимо определить массы $m_{п1}$ и $m_{п2}$ противовесов и радиусы $r_{п1}$ и $r_{п2}$ их закрепления в двух выбранных плоскостях уравновешивания. Руководствуясь уравнениями (5-219) и (5-250), можно вычислить величины статических моментов масс $m_{п1}r_{п1}$ и $m_{п2}r_{п2}$ и затем, задавшись величинами $r_{п1}$ и $r_{п2}$, определить и величины масс.

Статическая балансировка опытным путем выполняется на призмах (рис. 5-104). Уравновешиваемое звено после качаний останавливается в положении устойчивого равновесия — центр его тяжести расположен на вертикали ниже центра вращения. Для уравновешивания в диаметрально противоположном направлении закрепляют противовес, массу $m_п$ которого при выбранном месте закрепления подбирают экспериментально. Такая балансировка применяется для узких звеньев, вращающихся с относительно небольшими скоростями.

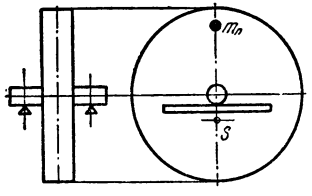


Рис. 5-104.

Динамическая балансировка производится на специальных станках. Схема одного из наиболее простых станков изображена на рис. 5-105, *а*. Подвижная часть *A* станка имеет ось вращения и пружину *B*. В подшипниках *C* устанавливают уравновешиваемое звено *D*, которое внешними средствами приводят в быстрое вращение. Так как звено не уравновешено, то подшипники *C* будут испытывать действие динамических давлений, приводящих станок в колебательное состояние; при этом векторы их вращаются. Амплитуда таких колебаний будет наибольшей тогда, когда наступит явление резонанса, т. е. когда периоды вынужденных и собственных колебаний станка станут равны. Амплитуда наибольших колебаний фиксируется стрелкой *E* на закопченной бумаге *F*. Наибольшая амплитуда x_0 пропорциональна статическому моменту m_0r_0 неуравновешенности.

Для определения коэффициента пропорциональности μ в произвольном месте плоскости I—I на расстоянии r_k от центра закрепляют небольшой груз с массой m_k и опытным путем определяют амплитуду x_1 неуравновешенности звена с грузом m_k. После этого переносят груз в диаметрально противоположное направление на то же расстояние от центра и вновь определяют амплитуду x_2 неуравновешенности. На рис. 5-105, *б* изображена векторная диаграмма, из которой видно, что $x_1 = x_0 + x_k$ и $x_2 = x_0 - x_k$. Представляя эту диаграмму в виде параллелограмма (рис. 5-105, *б*), можно написать: $2x_k^2 + 2x_0^2 = x_1^2 + x_2^2$, откуда имеем:

$$x_k = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_0^2}{2}}. \qquad (5\text{-}252)$$

Коэффициент пропорциональности:

$$\mu = \frac{m_k r_k}{x_k}. \qquad (5\text{-}253)$$

Статический момент противовеса:

$$m_{\text{п}} r_{\text{п}} = m_0 r_0 = \mu x_0. \tag{5-254}$$

Угол закрепления:

$$\alpha = \arccos \frac{x_0^2 + x_k^2 - x_1^2}{2 x_0 x_k}. \tag{5-255}$$

Какое из двух значений α, получаемых из уравнений (5-255), следует использовать, решается экспериментально после установки противовеса сначала под углом α_1, а затем под углом α_2. При правильном расположении противовеса станок не колеблется.

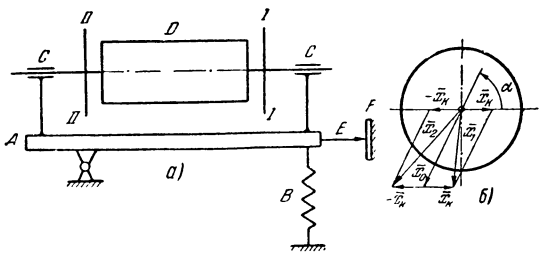


Рис. 5-105.

После выполнения описанных операций звено устанавливают так, чтобы плоскость I—I находилась над осью вращения. Для этого положения звена повторяют указанные выше эксперименты. После этого звено будет полностью уравновешено.

§ 5-33. Уравновешивание механизма на фундаменте

Во время движения механизма его стойка испытывает действие динамических давлений и приходит в колебание; колеблется и фундамент механизма. Чем массивнее фундамент, тем меньше амплитуда его колебаний. Динамические давления не вызывают колебаний, если главный вектор и главный момент сил инерции материальных точек звеньев механизма равны нулю. Приведение к нулю главного вектора и главного момента достигается установкой противовесов.

Механизм полностью уравновешен, если общий центр тяжести всех его материальных точек остается неподвижным и центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} всех его звеньев постоянны. В данном случае оси x и y располагаются в плоскости, параллельной плоскости движения механизма, а ось z перпендикулярна к указанным осям. Практически достаточно удовлетворить первому условию, если механизм имеет только одну плоскость движения. Если звенья механизма движутся в различных параллельных плоскостях, то пренебрежение вторым условием будет тем ощутительнее, чем дальше друг от друга расположены плоскости движения.

Уравновешивание кривошипно-шатунного механизма (рис. 5-106) можно произвести установкой двух противовесов с таким расчетом, чтобы центры S_1 и S_2 тяжести звеньев *1* и *2* располагались на

расстояниях

$$s_1 = -\frac{m_2 + m_3}{m_1} l_1, \qquad s_2 = -\frac{m_3}{m_2} l_2, \tag{5-256}$$

где m_1 и m_2 — массы кривошипа и шатуна вместе с противовесами; s_1 и s_2 — координаты центров тяжести кривошипа и шатуна вместе с противовесами; m_3 — масса ползуна.

Задаваясь s_1 и s_2 при заданной массе ползуна, можно определить величины необходимых масс звеньев *1* и *2*. Зная величины масс этих звеньев, вычисляют величины масс противовесов, после чего определяют места их закрепления.

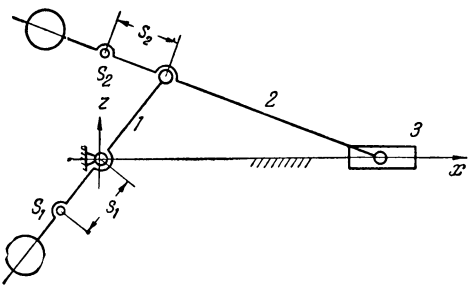


Рис. 5-106.

Установка противовеса на шатуне конструктивно неудобна, а потому часто довольствуются установкой одного противовеса на кривошипе и, таким образом, обеспечивают только частичное уравновешивание. В этом случае величина статического момента $m_1 s_1$ массы кривошипа вместе с противовесом определяется из соотношения

$$m_1 s_1 = -\frac{l_1}{l_2} m_2 (l_2 - s_2), \tag{5-257}$$

где s_2 — координата центра тяжести шатуна *2* (рис. 5-107).

Определение величины массы противовеса и места его закрепления производится аналогично предыдущему. В данном случае оказываются неуравновешенными силы инерции, направленные параллельно оси движения ползуна.

При уравновешивании сложных механизмов ограничиваются установкой противовесов только на вращающихся звеньях. Для определения масс противовесов можно пользоваться следующим методом. На рис. 5-108 приведена схема шестизвенного механизма, который можно частично уравновесить установкой противовесов на звеньях *1* и *3*.

Сосредоточим условно массу m_2 шатуна *2* в точках *B* и *C*. Для вычисления величин указанных масс воспользуемся уравнениями:

$$m_2' + m_2'' = m_2, \qquad m_2' s_2 = m_2'' (l_2 - s_2). \tag{5-258}$$

Аналогичными уравнениями можно воспользоваться для определения величин m_4' и m_4'' масс шатуна *4*, условно сосредоточенных в точках *E* и *F*. После этого вычисляют величины $m_{п1}$ и $m_{п2}$ масс противовесов,

устанавливаемых на звеньях *1* и *3*, из того условия, в соответствии с которым центры тяжести с указанными добавочными массами совпадали бы с центрами вращения.

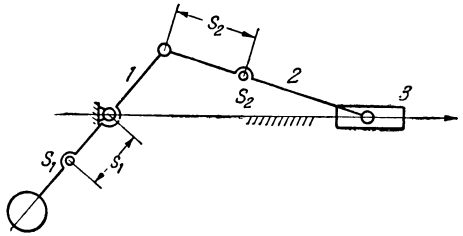


Рис. 5-107.

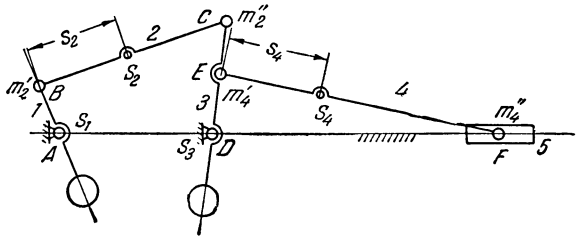


Рис. 5-108.

Уравновешивание сил инерции ползунов осуществляется усложнением конструкции механизма. Для этой цели в его конструкцию вводят зубчатые передачи, на колесах которых и устанавливают противовесы так, что их силы инерции, направленные перпендикулярно к оси движения ползуна, погашают друг друга, а направленные по его оси — противодействуют силе инерции ползуна.

Глава 5-11

ПРОЕКТИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМОВ [1, 2, 3, 9, 11, 13, 15]

§ 5-34. Основные задачи проектирования

Любой механизм предназначается для преобразования движения его ведущего звена в требуемое движение рабочего звена, либо осуществляющего перемещение твердых, жидких или газообразных тел, либо производящего обработку предметов, в результате которой изменяется форма их. В задачу проектирования, выполняемого на базе теории механизмов

и машин, входит выбор типа двигателя и структурной схемы механизма, обеспечивающей необходимое преобразование движения.

Для решения описанных выше задач движение рабочего звена может быть задано в одном из следующих видов.

1. Рабочее звено вращается: а) с постоянной угловой скоростью; б) с возможностью двигаться с одной из нескольких задаваемых постоянных угловых скоростей; в) с возможностью двигаться с любой постоянной угловой скоростью, устанавливаемой между заданными пределами; г) с переменной угловой скоростью, изменяющейся по заданному закону.

2. Рабочее звено движется поступательно со скоростью, которая может быть задана аналогично предыдущему (для вращающегося звена).

3. Рабочее звено совершает плоско-параллельное движение общего вида, часто задаваемое так, что одна из точек звена должна описывать заданную кривую.

Если требуемое движение имеет очень сложный характер, то его расчленяют на более простые, последовательно или одновременно осуществляемые рабочими звеньями нескольких механизмов. Пусть требуется спроектировать механизм, предназначенный переносить грузы из одного места в любое другое место ограниченного пространства. Такая задача решается, например, при помощи мостового крана. В состав такой машины входят три механизма: 1) для подъема груза; 2) для передвижения моста и 3) для передвижения тележки, которая может двигаться по мосту. Таким образом, в данном случае сложное движение в любом направлении раскладывается на три взаимно перпендикулярных движения. Разложение требуемого движения на отдельные составляющие в практике проектирования механизмов применяется часто.

Для выполнения задания 1,а) используются фрикционные, зубчатые, ременные и цепные передачи.

Задание 1,б) требует проектирования коробок скоростей, позволяющих изменять угловую скорость рабочего звена по ступеням. Для этой цели применяются зубчатые и ременные передачи.

Для механизмов, проектируемых в соответствии с заданием 1,в), используются фрикционные вариаторы скоростей (здесь не рассматриваются).

Варианты выполнения задания 1,г) чрезвычайно разнообразны в зависимости от заданного закона движения рабочего звена. В этом случае можно встретить применение механизмов самых разнообразных видов, включая стержневые механизмы с одними низшими парами.

Варианты выполнения задания 2 также весьма разнообразны, так как разнообразны задаваемые законы движения поступательно движущегося звена. Поступательное движение в большинстве случаев задают прямолинейным, которое в некоторых случаях осуществляется без поступательных пар.

Задание 3 предусматривает применение стержневых механизмов с низшими парами или комбинированных.

Гидравлические передачи здесь не рассматриваются.

Далее будут рассмотрены методы проектирования следующих механизмов: 1) фрикционных и зубчатых; 2) ременных; 3) мальтийских; 4) кулачковых; 5) стержневых с низшими парами.

§ 5-35. Фрикционные и зубчатые механизмы

Фрикционные механизмы применяются для передачи вращения между валами с параллельными и пересекающимися осями. Передаточное отношение для таких механизмов назначается не больше пяти. Для окружных скоростей колес таких механизмов рекомендуются величины не более 10 *м/сек*.

Применение зубчатых механизмов разнообразно. Цилиндрические механизмы с прямыми, косыми и шевронными зубьями колес могут

выполняться одноступенчатыми и многоступенчатыми (рис. 5-109) при $i_{12} \leqslant 10$ — одноступенчатый (рис. 5-109, *а*), $i_{13} = 10 \div 70$ — двухступенчатый с последовательными ступенями (рис. 5-109, *б*) и одноосный (рис. 5-109, *в*), $i_{14} = 70 \div 300$ (рис. 5-109, *г*).

Условие одноосности (рис. 5-109, *в*):

$$r_1 + r_2 = r_{2'} + r_3, \qquad \frac{r_2 r_3}{r_1 r_{2'}} = i_{13}. \tag{5-259}$$

В относительных единицах в последних двух уравнениях содержатся три неизвестных. Условию одноосности можно удовлетворить, если для получения однозначного решения задаться передаточным отношением

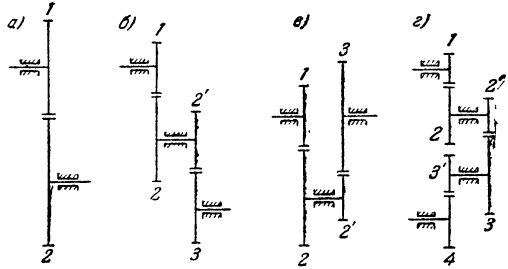


Рис. 5-109.

одной из ступеней. Обычно общее передаточное отношение разбивают так, что передаточное отношение быстроходной ступени оказывается больше, чем тихоходной. В таком случае для решения поставленной задачи можно воспользоваться равенствами:

$$r_2 = i_{12} r_1, \qquad r_{2'} = \frac{i_{12} + 1}{i_{23} + 1} r_1, \qquad r_3 = i_{23} \frac{i_{12} + 1}{i_{23} + 1} r_1. \tag{5-260}$$

Так как величины модулей должны быть стандартными, часто не удается выдержать первое равенство (5-259). В таких случаях обработка зубьев колес одной или обеих пар намечается со сдвигом исходного контура, или колеса выполняют с косыми зубьями со стандартными нормальными модулями и с торцовыми модулями, обеспечивающими выполнение первого равенства (5-259).

Если оси входного и выходного валов должны пересекаться (на практике большей частью под прямым углом), то при $i_{12} \leqslant 5$ применяются одноступенчатые конические передачи; при бо́льших передаточных отношениях, но не более 150 — коническо-цилиндрические двухступенчатые

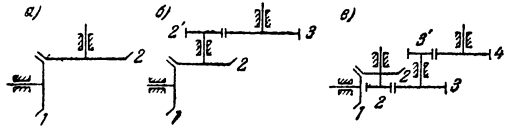


Рис. 5-110.

и трехступенчатые передачи (рис. 5-110). При таком же расположении валов и преимущественно при больших передаточных отношениях пользуются червячными передачами.

Наравне с зубчатыми обыкновенными механизмами в настоящее время для тех же целей применяются и планетарные механизмы различных схем. При больших передаточных отношениях планетарные механизмы часто характеризуются малым коэффициентом полезного действия. Чтобы до проектирования определить предварительную величину к. п. д., можно воспользоваться формулами:

$$\eta_{1H} = 1 - |(1 - i_{H1})|\,\psi_H; \qquad \eta_{H1} = \frac{1}{1 + |(1 - i_{H1})|\,\psi_H}, \tag{5-261}$$

где η_{1H} — к. п. д. планетарного механизма при передаче мощности от колеса к водилу; η_{H1} — то же при передаче мощности от водила к колесу; i_{H1} — передаточное отношение планетарного механизма от водила к колесу; $\psi_H = 1 - \eta$ — коэффициент потерь и η — к. п. д. механизма при остановленном водиле и освобожденном колесе, которое было неподвижным, т. е. при обращенном движении.

При определении к. п. д. механизма в обращенном движении следует иметь в виду, что к. п. д. пары зубчатых колес в зависимости от класса точности обработки равен: I класс — 0,99, II класс — 0,98, III класс — 0,96, IV класс — 0,93.

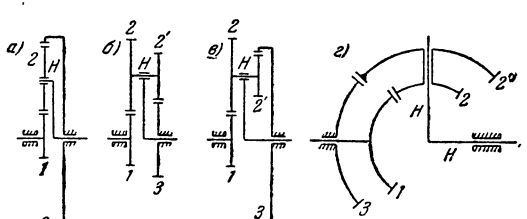


Рис. 5-111.

На рис. 5-111 показаны схемы простых планетарных механизмов. Для механизмов 5-111, *а*, *б* и *в* должно соблюдаться условие соосности, определяемое следующим образом:

рис. 5-111, *а* $$r_3 = r_1 + 2r_2, \tag{5-262}$$

рис. 5-111, *б* $$r_1 + r_2 = r_{2'} + r_3, \tag{5-263}$$

рис. 5-111, *в* $$r_1 + r_2 = r_3 - r_{2'}. \tag{5-264}$$

Условие соседства при нескольких сателлитах (рис. 5-112):

$$k_1 < \frac{\pi}{\arcsin \dfrac{z_2 + 2}{z_1 + z_2}}, \tag{5-265}$$

где k_1 — число сателлитов.

Теоретическое число сателлитов из *условия собираемости* без учета условия соседства:

рис. 5-111, *а* $$k_0 = z_1 i_{1H}, \tag{5-266}$$

рис. 5-111, *б* и *в* $$k_0 = \frac{z_1 z_{2'}}{ж}\, i_{1H}, \tag{5-267}$$

где *ж* — общий множитель чисел z_2 и $z_{2'}$.

Действительное число k устанавливаемых сателлитов принимается как один из множителей числа k_0.

При проектировании заданной схемы по заданному передаточному отношению следует наметить числа зубьев колес, которые удовлетворяли бы всем перечисленным выше условиям.

Пример 1. Дано: $i_{1H}=6$, схема рис. 5-111, *а*. Спроектировать планетарный механизм с пятью сателлитами.

Руководствуясь уравнением (5-266), видим, что целесообразно назначить число зубьев, кратное пяти. Принимаем $z_1=20$. В таком случае по зависимости (5-266) $k_0=20\cdot 6=120$. Таким образом, $k=5$ удовлетворяет условию сборки.

Так как $i_{1H}=1+\frac{z_3}{z_1}=6$, то $z_3=5z_1=100$, а в соответствии с уравнением (5-262) имеем: $z_2=(z_3-z_1)\cdot 0{,}5=(100-20)\cdot 0{,}5=40$.

Руководствуясь зависимостью (5-265), проверяем условие соседства:

$$k_1<\frac{\pi}{\arcsin\frac{40+2}{20+40}}=4.$$

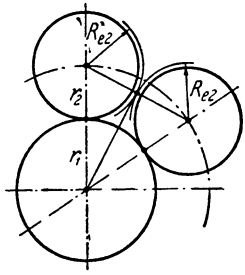


Рис. 5-112.

Таким образом, пять сателлитов в данном случае поставить нельзя. Можно установить не более трех сателлитов.

Пример 2. Дано: $i_{1H}=20$, схема рис. 5-111, *в*. Спроектировать планетарный механизм с тремя сателлитами, если модули обеих пар колес одинаковые.

Руководствуясь зависимостью (5-267), примем $z_1=24$, $z_{2'}=18$. В таком случае $k_0=\frac{8640}{ж}$; это свидетельствует о том, что при $k=3$ условие сборки удовлетворяется.

Для определения z_2 и z_3 имеем уравнения (5-264) $z_3=z_2+42$ и $i_{1H}=1+\frac{z_2z_3}{z_1z_{2'}}$, откуда получаем: $z_2=72$ и $z_3=114$.

Проверяя по зависимости (5-265) условие соседства, устанавливаем, что $k_0=3{,}56$, а это показывает, что заданное условие выполнимо.

Полагая, что колеса будут обработаны по II классу точности, имеем для рассматриваемого механизма в обращенном движении $\eta_{13}=\eta_{12}\eta_{23}=0{,}98\cdot 0{,}98=0{,}96$ и в соответствии с уравнением (5-261) получаем: $\eta_{1H}=1-\left|\left(1-\frac{1}{20}\right)\right|\cdot 0{,}04=0{,}96$.

Пример 3. Дано: $i_{14}\approx 150$, схема рис. 5-112. Спроектировать планетарный механизм, если модули всех зацеплений одинаковы.

Для получения формулы передаточного отношения воспользуемся картинами скоростей (рис. 5-113). Имеем:

$$\frac{v_1}{v_4}=\frac{\omega_1 z_1}{\omega_4 z_4}=\frac{2z_2}{z_3-z_4},$$

откуда получаем:

$$i_{14}=\frac{\omega_1}{\omega_4}=\frac{2z_2z_4}{z_1(z_3-z_4)}. \qquad (5\text{-}268)$$

Далее:

$$z_3 = z_1 + 2z_2 \quad \text{и} \quad z_4 - z_{2'} = z_1 + z_2. \tag{5-269}$$

Для дальнейшего решения имеем:

$$2z_2z_4 = i_{14}z_1(z_3 - z_4), \qquad z_4 - z_{2'} = z_3 - z_2. \tag{5-270}$$

Так как i_{14} велико, примем $z_3 - z_4 = 1$, вследствие чего получаем:

$$z_3 = z_4 + 1 \quad \text{и} \quad z_2 = z_{2'} + 1. \tag{5-271}$$

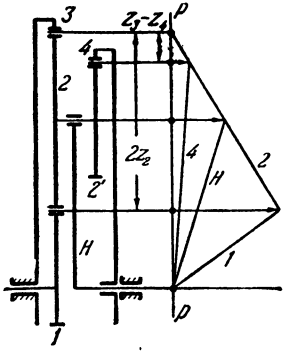


Рис. 5-113.

После этого решаем уравнение (5-270) относительно $z_{2'}$:

$$z_1 = \frac{2z_{2'}^2 + 3z_{2'} + 1}{0{,}5i_{1H} - z_{2'} - 1}. \tag{5-272}$$

Принимая $z_{2'} = 24$, устанавливаем, что $z_1 = \frac{1225}{50} = 24{,}5$. Решения в целых числах не получается, вследствие чего примем $i_{11} = 148$. В таком случае имеем: $z_1 = 25$. При этом значении числа зубьев остальных колес равны: $z_2 = 25$, $z_{2'} = 24$, $z_3 = 75$, $z_4 = 74$.

Для определения к. п. д. разложим заданный механизм на два с передаточными отношениями i_{1H} и i_{H4}, величины которых на основании рис. 5-113 следующие: $i_{1H} = 4$ и $i_{H4} = 37$. В обращенном движении к. п. д. первой ступени $\eta_{13}^H = \eta_{12}^H \eta_{23}^H = 0{,}98 \cdot 0{,}98 = 0{,}96$, соответственно второй ступени $\eta_{2'4}^H = 0{,}98$, где мы считаем, что колеса будут об-

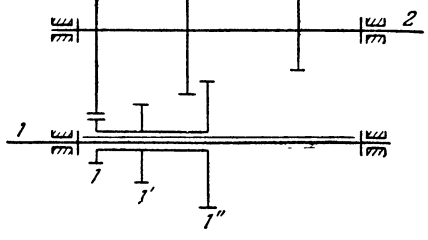


Рис. 5-114.

рабатываться по II классу точности. После подстановки имеющихся данных в уравнение (5-261) имеем: $\eta_{1H} = 0{,}97$, $\eta_{H4} = 0{,}58$ и $\eta_{14} = 0{,}97 \cdot 0{,}58 = 0{,}56$.

Из условия сборки по зависимости (5-266) имеем: $k_0 = z_1 i_{1H} = 25 \cdot 4 = 100$, а из условия соседства $k_1 = 5{,}5$. Таким образом можно устанавливать не более пяти сателлитов.

В тех случаях, когда требуется обеспечить возможность изменения угловой скорости рабочего звена по ступеням, применяются зубчатые коробки скоростей, схемы которых весьма разнообразны. Рассмотрим некоторые из них.

На рис. 5-114 показана обыкновенная трехступенчатая коробка скоростей, у которой вал *1* имеет направляющую шпонку или шлицы, благодаря чему блок колес *1* можно последовательно соединить с колесами *2*. По приведенной схеме можно спроектировать коробку с бо́льшим числом ступеней.

На рис. 5-115, *а* приведена схема четырехскоростной коробки скоростей, у которой вал *1* — ведущий, а вал *5* — ведомый. На рис. 5-115, *б* — *д* показаны картины скоростей для всех четырех ступеней, которые могут быть установлены последовательным закреплением колеса *3*, водила *H*, колеса *4* и жестким соединением колеса *1* с водилом *H*.

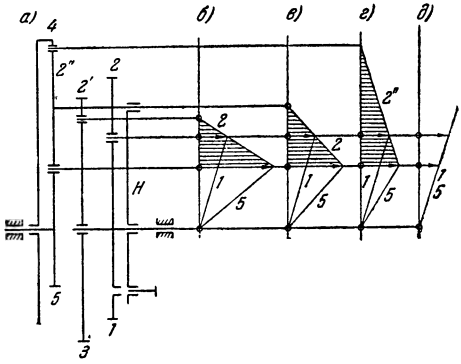


Рис. 5-115.

Пример. Дано: $i_{51} = 4, 3, 2, 1$, схема рис. 5-115, *а*. Определить числа зубьев колес, если модули всех зацеплений одинаковы.

На основании картин скоростей (рис. 5-115, *б* — *в*) составим расчетные уравнения, принимая угловую скорость ω_1 равной единице.

Рис. 5-115, *б* (закреплено колесо *3*):

$$\frac{v_5}{v_1} = \frac{\omega_5 z_5}{\omega_1 z_1} = i_{51} \frac{z_5}{z_1} = 4 \frac{z_5}{z_1} = \frac{z_3 - z_5}{z_3 - z_1},$$

откуда имеем:

$$4z_1 z_5 - 4z_3 z_5 = z_1 z_5 - z_1 z_3. \qquad (а)$$

Рис. 5-115, *в* (закреплено водило *H*):

$$\frac{v_5}{v_1} = \frac{\omega_5 z_5}{\omega_1 z_1} = 3 \frac{z_5}{z_1} = \frac{z_{2''}}{z_2},$$

откуда

$$3z_2 z_5 = z_1 z_{2''}. \qquad (б)$$

Рис. 5-115, *г* (закреплено колесо *4*):

$$\frac{v_5}{v_1}=\frac{\omega_5 z_5}{\omega_1 z_1}=2\frac{z_5}{z_1}=\frac{2z_{2''}}{z_2+z_{2''}}, \qquad z_1 z_{2''}=z_2 z_5+z_{2''}z_{5'} \qquad \text{(в)}$$

Рис. 5-115, *д* (колесо *1* жестко соединено с водилом): весь механизм работает как одно целое, а потому аналогичное предыдущему соотношение обращается в тождество.

Решение уравнений (а) — (в) производим в следующем порядке: (б): $\frac{z_{2''}}{z_2}=\frac{3}{z_1}z_5$; (в): $z_1\frac{z_{2''}}{z_2}=z_5+\frac{z_{2''}}{z_2}z_5$, откуда $z_5=\frac{2}{3}z_1$. Задаемся $z_1=60$, тогда $z_5=40$. Далее из (а) определяем: $z_3=72$ и, кроме того, имеем: $z_{2''}=2z_2$.

Числа зубьев остальных колес определяются из соотношений, устанавливаемых на основании рис. 5-115, *а*: $z_4=z_5+2z_{2''}$, $z_5+z_{2''}=z_1+z_2$, откуда получаем: $z_4=120$, $z_{2'}=8$, $z_{2''}=40$. Так как число $z_{2'}=8$ мало, то увеличиваем все числа зубьев вдвое. Окончательно имеем: $z_1=120$, $z_2=40$, $z_{2'}=16$, $z_{2''}=80$, $z_3=144$, $z_4=240$, $z_5=80$.

Таким образом, при проектировании коробок скоростей следует выбирать схему и затем для определения чисел зубьев колес составлять уравнения, подобные рассмотренным выше.

Зубчатые механизмы, при помощи которых можно воспроизводить переменные угловые скорости, собираются из некруглых колес. Такие механизмы здесь не рассматриваются.

§ 5-36. Ременные передачи [14]

Открытые передачи используются при вращении шкивов в одном и том же направлении (рис. 5-116). Рекомендуемые передаточные от-

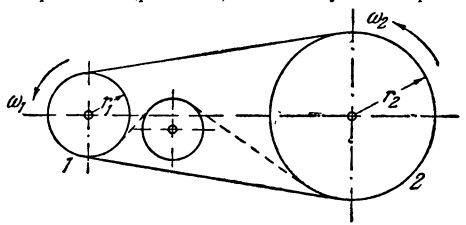


Рис. 5-116.

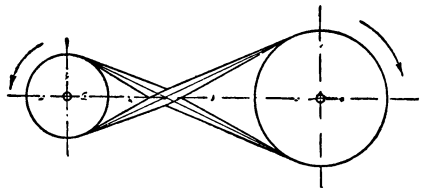


Рис. 5-117.

ношения $i_{12}\leqslant 5$. При наличии натяжного ролика — $i_{12}\leqslant 20$. Перекрестные передачи (рис. 5-117) из-за трения ветвей ремня имеют ограниченное применение.

Ременная передача допускает остановку ведомого вала, что осуществляется переводом ремня с рабочего шкива на холостой (на рис. 5-118 *вщ* — ведущий шкив, *р* — рабочий и *х* — холостой).

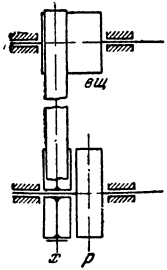


Рис. 5-118.

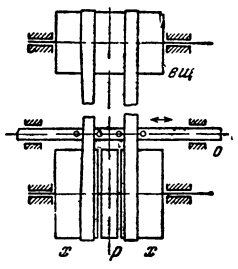


Рис. 5-119.

Применяя одновременно открытую и перекрестную передачи, можно изменять направление вращения ведомого вала (на рис. 5-119 *вщ* — ведущий, *р* — рабочий и *х* — холостой шкивы, *о* — отводка).

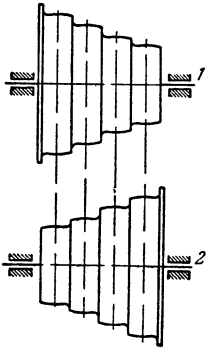


Рис. 5-120.

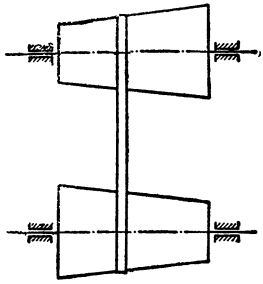


Рис. 5-121.

Для регулирования скорости ведомого вала по ступеням используются *ступенчатые шкивы* (рис. 5-120). Диаметры шкивов назначают такими, чтобы длина ремня на всех ступенях оставалась одинаковой, а передаточные отношения составляли бы геометрическую прогрессию:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i_{12}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2'} = \zeta i_{12}; \quad \frac{\omega_1}{\omega_2''} = \zeta^2 i_{12}; \ \ldots, \tag{5-273}$$

где $\zeta > 1$ и $i_{12} > 1$.

Ременные передачи можно проектировать и для плавного регулирования скорости ведомого шкива, что выполняется при помощи двух конических шкивов (рис. 5-121).

§ 5-37. Мальтийские механизмы

Как указывалось в § 5-9, мальтийские механизмы применяются для передачи вращения с остановками. Основным заданием при проектировании должно быть число прорезей z креста 2, чем определяется число остановок на одном его обороте (рис. 5-122).

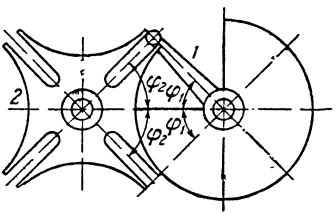


Рис. 5-122.

Угол $2\varphi_2$ поворота креста 2 за период времени его движения:

$$2\varphi_2 = \frac{2\pi}{z}. \qquad (5\text{-}274)$$

Угол поворота ведущего звена за тот же период времени движения:

$$2\varphi_1 = \pi\left(1 - \frac{2}{z}\right). \qquad (5\text{-}275)$$

Время $t_д$ движения креста:

$$t_д = \frac{30}{n_1}\left(1 - \frac{2}{z}\right), \qquad (5\text{-}276)$$

где n_1 — число оборотов ведущего звена в минуту.

Время $t_п$ покоя креста:

$$t_п = \frac{30}{n_1}\left(1 + \frac{2}{z}\right). \qquad (5\text{-}277)$$

Время T полного оборота звена 1 при одной цевке:

$$T = t_д + t_п. \qquad (5\text{-}278)$$

Таблица 5-5. Зависимость между величинами z, k, $\frac{t_д}{T}$ и $\frac{t_п}{T}$

z	$2\varphi_2$	$\frac{t_д}{T}$	$\frac{t_п}{T}$ при числе цевок, равном:			
			$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
3	120°	0,1667	0,8333	0,3333	0,1667	0,0833
4	96°	0,2500	0,7500	0,2500	0,0833	—
5	72°	0,3000	0,7000	0,2000	0,0333	—
6	60°	0,3333	0,6667	0,1667	—	—
7	51°26	0,3571	0,6429	0,1429	—	—
8	45°	0,3750	0,6250	0,1250	—	—
9	40°	0,3889	0,6111	0,1111	—	—
10	36°	0,4000	0,6000	0,1000	—	—
12	30°	0,4167	0,5833	0,0838	—	—

Примечание. z — число прорезей креста; k — число цевок; $t_д$ — время движения креста; $t_п$ — время покоя креста; T — время полного оборота ведущего звена; $2\varphi_2$ — угол поворота креста за период времени его движения.

Величины $t_д$ и $t_п$ в относительных единицах:

$$\frac{t_д}{T}=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}, \qquad \frac{t_п}{T}=\frac{1}{2}+\frac{1}{z}. \tag{5-279}$$

Возможное число цевок ведущего звена:

$$k<\frac{2}{1-\frac{2}{z}}. \tag{5-280}$$

Угол λ между двумя соседними цевками связан соотношением:

$$\frac{\lambda}{2\pi}=\frac{t_д+t_п}{T}, \tag{5-281}$$

где $t_п$ для рассматриваемого механизма зависит от угла λ.

Таблица 5-5 позволяет определить при проектировании основные параметры мальтийского механизма.

§ 5-38. Кулачковые механизмы

В § 5-7 было указано, что кулачковые механизмы в основном применяются для преобразования вращательного движения кулачка в поступательное движение толкателя или во вращательное движение коромысла при ограниченном угле его поворота.

При проектировании тихоходных механизмов обыкновенно задают зависимость пути ведомого звена от времени или угла поворота кулачка. Для быстроходных механизмов существенное значение имеет закон изменения ускорения со временем, так как при резких изменениях ускорений механизм работает неспокойно. В последнем случае двукратным интегрированием получают зависимость пути от времени, которую и используют при проектировании.

При кинематическом проектировании бывают заданы: 1) схема механизма и размеры звеньев; 2) ход ведомого звена; 3) рабочий угол кулачка; 4) закон его движения. Произвольно задаваться размерами звеньев нельзя, потому что в таких случаях не исключается возможность построения неработоспособного механизма, который получается из-за неблагоприятных углов давления.

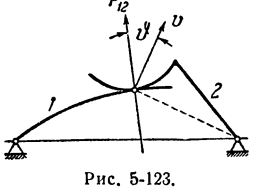


Рис. 5-123.

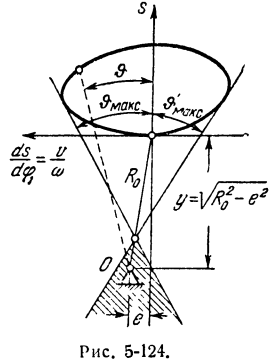


Рис. 5-124.

Угол давления — угол ϑ между линией действия силы P_{12}^n, приложенной к ведомому звену 2 со стороны ведущего звена 1 и направленной по нормали в точке соприкосновения, и скоростью точки

приложения этой силы (рис. 5-123). Работа силы P_{12}^n на некотором пути s равна:

$$A = \int_s P_{12}^n \cos\vartheta \, ds, \tag{5-282}$$

т. е. чем меньше ϑ, тем больше работа, совершаемая силой P_{12}^n.

Изменение угла давления в кулачковых механизмах можно исследовать графически. Для поступательного движения толкателя с острием (см. рис. 5-33, *а*) следует построить зависимость $v/\omega_1 = f(s)$ и затем на продолжении оси s отложить величину $\sqrt{R_0^2 - e^2}$, где R_0 — минимальная величина радиуса-вектора профиля кулачка и e — эксцентриситет (рис. 5-124). Угол ϑ определяют так, как показано на рис. 5-124.

При проектировании требуется удовлетворить тому условию, в соответствии с которым $\vartheta_{макс}$ должен быть не более заданной величины. В этом случае под углом $\vartheta_{макс}$ проводят касательные к диаграмме, после чего намечают центр O вращения кулачка в заштрихованной области (рис. 5-124). Этим определяется R_0 — минимальный радиус-вектор профиля кулачка.

Та же задача для механизма с коромыслом (см. рис. 5-33, *в*) решается так. В данном случае значения v/ω следует откладывать на продолжениях оси коромысла, повернутого под заданными углами (рис. 5-125). В нескольких положениях коромысла проводят прямые под углом $(90° - \vartheta_{макс})$. Заштрихованная область указывает место, где может быть выбран центр вращения кулачка.

При определении формы профиля кулачка применяется метод обращения движения.

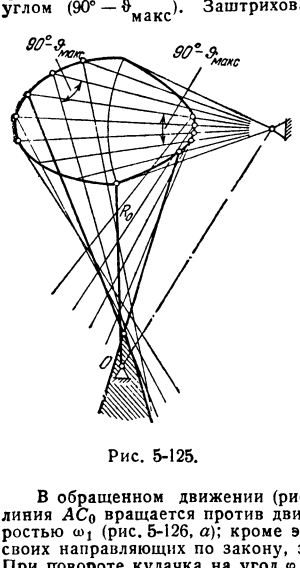


Рис. 5-125.

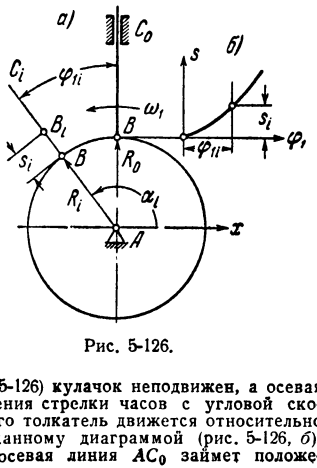


Рис. 5-126.

В обращенном движении (рис. 5-126) кулачок неподвижен, а осевая линия AC_0 вращается против движения стрелки часов с угловой скоростью ω_1 (рис. 5-126, *а*); кроме этого толкатель движется относительно своих направляющих по закону, заданному диаграммой (рис. 5-126, *б*). При повороте кулачка на угол φ_{1i} осевая линия AC_0 займет положе-

ние AC_i, точка B переместится вдоль оси AC_i на величину s_i и окажется в положении B_i. Величина радиуса-вектора $\mathbf{R}_i$ профиля кулачка в новом положении составляет:

$$R_i = R_0 + s_i. \qquad (5\text{-}283)$$

В случае механизма со смещенным толкателем (рис. 5-127, *а*) положение толкателя после его поворота в обращенном движении определяется как касательная к окружности эксцентриситета. В таком случае s_i откладывают от окружности, описанной радиусом R_0.

В соответствии с рис. 5-127 величина радиуса-вектора $\mathbf{R}_i$ составляет

$$R_i = \sqrt{e^2 + (y + s_i)^2}, \qquad (5\text{-}284)$$

где

$$y = \sqrt{R_0^2 - e^2}. \qquad (5\text{-}285)$$

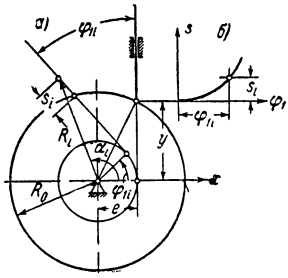


Рис. 5-127.

Для механизма с плоским тарельчатым толкателем (рис. 5-128) профиль кулачка строят как огибающую отдельных положений тарелки.

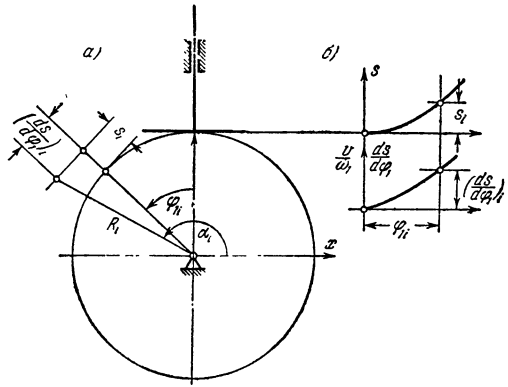


Рис. 5-128.

Положения ее определяют так же, как и для механизма на рис. 5-126. Для определения величины R_i радиуса-вектора в положении i нужна диаграмма v/ω_1 в функции угла φ_1 поворота кулачка (рис. 5-128, *б*). Имеем:

$$R_i = \sqrt{(R_0 + s_i)^2 + \left(\frac{ds}{d\varphi_1}\right)_i^2}. \qquad (5\text{-}286)$$

Построение профиля кулачка для механизма с коромыслом ясно из рис. 5-129. Радиус-вектор профиля в положении i можно определить

из уравнения

$$R_i = \sqrt{L^2 + l^2 - 2Ll\cos(\varphi_{20} + \varphi_{2i})}. \quad (5\text{-}287)$$

В § 5-7 указывалось, что на рабочем чертеже кулачка приводится таблица значений радиуса-вектора профиля при определенных значениях угла наклона радиуса-вектора к какому-либо зафиксированному на кулачке направлению.

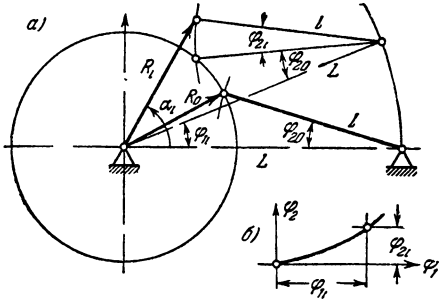


Рис. 5-129.

Обозначая эти углы через α с соответствующими индексами, имеем:

рис. 5-126:

$$\alpha_i = 90° + \varphi_i; \quad (5\text{-}288)$$

рис. 5-127:

$$\cos(\alpha_i - \varphi_{1i}) = \frac{e}{R_i}; \quad (5\text{-}289)$$

рис. 5-128:

$$\cos(\alpha_i - \varphi_{1i}) = -\frac{\left(\frac{ds}{d\varphi_1}\right)_i}{R_i}; \quad (5\text{-}290)$$

рис. 5-129:

$$\sin(\alpha_i - \varphi_{1i}) = \frac{l}{R_i}\sin(\varphi_{20} + \varphi_{2i}). \quad (5\text{-}291)$$

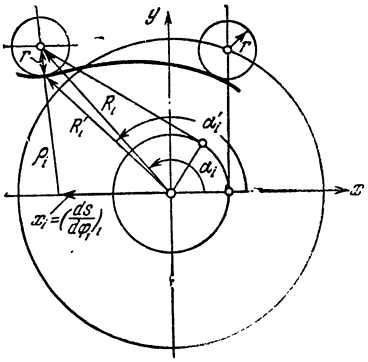


Рис. 5-130.

На рабочем чертеже кулачка приводится зависимость R'_i от α'_i. После определения аналогичной зависимости для теоретического профиля можно установить табличные значения указанной искомой зависимости. Для этой цели можно воспользоваться следующим способом.

Рис. 5-130.

$$\rho_i \cos\beta_i = -x_i + R_i \cos\alpha_i, \quad \rho_i \sin\beta_i = R_i \sin\alpha_i, \quad (5\text{-}292)$$

откуда

$$\operatorname{tg}\beta_i = \frac{R_i \sin\alpha_i}{-x_i + R_i\cos\alpha_i} \tag{5-293}$$

и ρ_i определяется из зависимостей (5-292) (β_i — угол отклонения вектора $\mathbf{r}$ относи x).

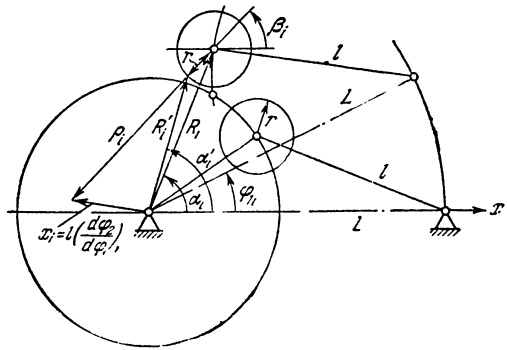


Рис. 5-131.

Для определения R_i' и α_i' имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} R_i' \cos\alpha_i' &= r\cos\beta_i + R_i\cos\alpha_i, \\ R_i' \sin\alpha_i' &= r\sin\beta_i + R_i\sin\alpha_i. \end{aligned}\right\} \tag{5-294}$$

Та же задача для механизма с коромыслом решается аналогично предыдущей при помощи рис. 5-131.

§ 5-39. Механизмы с низшими парами

Проектирование механизмов с низшими парами, выполняемое на базе теории механизмов и машин, сводится к определению параметров кинематической схемы по заданным условиям движения звеньев. Основными задачами проектирования механизмов с низшими парами являются: 1) задача о воспроизведении заданного закона движения; 2) задача о воспроизведении заданной траектории.

В настоящее время достаточно полно разработаны методы проектирования только четырехзвенных механизмов — плоских и пространственных. Мы рассмотрим только плоские механизмы. Методы проектирования изложим на примере механизма шарнирного четырехзвенника.

В задачах о воспроизведении заданной зависимости требуется определять параметры механизма, обеспечивающие приближенное воспроизведение зависимости $\varphi_3 = f(\varphi_1)$, где φ_3 — угол наклона коромысла *3* к заранее выбранному направлению x; φ_1 — угол наклона кривошипа *1* к тому же направлению. В условиях таких задач обыкновенно указы-

ваются пределы, между которыми должны двигаться звенья *1* и *3*. Решение названных задач производится методами: 1) наилучшего приближения; 2) квадратического приближения; 3) интерполирования; 4) кратного интерполирования. Далее будут изложены последние три метода.

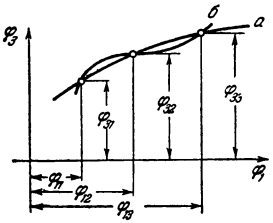


Рис. 5-132.

При использовании метода интерполирования на кривой, иллюстрирующей заданную зависимость, намечают несколько точек (узлов интерполирования), определяемых углами φ_{11}, $\varphi_{12}, \ldots$ наклона кривошипа и углами $\varphi_{31}, \varphi_{32}, \ldots$ наклона коромысла (рис. 5-132), в которых заданная и воспроизводимая зависимости пересекаются. Между узлами кривые расходятся. Число узлов равно числу вычисляемых параметров механизма. Максимальное число вычисляемых параметров шарнирного четырехзвенника в единицах относительно длины l_1 кривошипа равно пяти: l_2, l_3, l_4, φ_4 и φ_{31} — начальный угол наклона коромысла *3* к выбранному направлению оси x. Наиболее просто решается задача по одному, по двум и по трем параметрам.

Графическое решение. Спроектировать шарнирный четырехзвенник, у которого при заданных положениях кривошипа AB, определяемых точками B_1, B_2 и B_3, коромысло DC в трех положениях располагается так, что углы между его осями равны заданным величинам (рис. 5-133). Следует определить длины l_2, l_3 и угол φ_{31} при заданном l_4.

Задаваясь длинами кривошипа AB и коромысла DC, намечаем точками B_1, B_2, B_3 и C_1, C_2, C_3— заданные их положения при произвольно

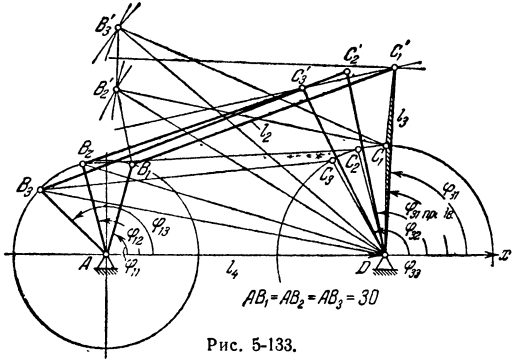


Рис. 5-133.

выбранном угле φ_{31}. Выбрав положения точек C в произвольном месте окружности коромысла, нельзя ожидать, что расстояния между соответственными точками B и C окажутся равными. Чтобы определить истинные положения C_1', C_2' и C_3' точки C, следует поступать так.

Определим положение B_2' точки B относительно точки C_1 во втором положении механизма. Для этого на стороне DC_1 следует постро-

ить треугольник $DC_1B'_2$, равный треугольнику DC_2B_2 (рис. 5-133). Аналогично устанавливается относительное положение B'_3 точки B, соответствующее третьему положению механизма. Чтобы определить начальное положение DC'_1 коромысла, следует найти центр C'_1 окружности, проходящей через точки B_1, B'_2 и B'_3. Остальные положения коромысла устанавливаются заданными углами. Таким методом в пределах точности графических построений можно обеспечить совпадение воспроизводимой и заданной зависимостей в трех точках.

Аналитическое решение. По заданным трем положениям кривошипа *1* и коромысла *3* определить l_2, l_3 и l_4 (рис. 5-133). Дано: $l_1 = 1$, φ_{11}, φ_{12}, φ_{13}, φ_{31}, φ_{32}, φ_{33}, $\varphi_4 = 0$.

Для решения используем систему следующих трех уравнений:

$$u - c_{1i}\, l_4 - c_{2i}\, l_3 + c_{3i}\, l_3\, l_4 = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{5-295}$$

где

$$2u = 1 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2, \tag{5-296}$$

$$\left.\begin{aligned} c_{1i} &= \cos(\varphi_{1i} - \varphi_4), \qquad c_{2i} = \cos(\varphi_{1i} - \varphi_{3i}), \\ c_{3i} &= \cos(\varphi_4 - \varphi_{3i}), \qquad i = 1, 2, 3. \end{aligned}\right\} \tag{5-297}$$

Вычитанием из первого уравнения (5-295) второго и третьего получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} (-c_{11} + c_{12}) + (-c_{21} + c_{22})\frac{l_3}{l_4} + (c_{31} - c_{32})\, l_3 = 0, \\ (-c_{11} + c_{13}) + (-c_{21} + c_{23})\frac{l_3}{l_4} + (c_{31} - c_{33})\, l_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5-298}$$

Из последних уравнений сначала определяем l_3, затем $\lambda = \frac{l_3}{l_4}$, откуда $l_4 = \frac{l_3}{\lambda}$. Далее из одного из уравнений (5-295) вычисляем u и из уравнения (5-296) l_2.

При проектировании механизма по трем параметрам трудно обеспечить точность воспроизведения заданной зависимости на большом участке кривой, ее изображающей. Более точных результатов можно добиться, если составить уравнения вида (5-295) не для трех значений исходных данных, а для значительно большего их числа. Однако такие уравнения могут оказаться совместными только в очень редких исключительных случаях. Чтобы сделать их приближенно совместными, т. е. допустить небольшие отклонения δ_i их левых частей от нуля, можно воспользоваться *методом наименьших квадратов*. Покажем, как применяется названный метод при решении n уравнений с k неизвестными, где n значительно больше k. Эти уравнения в общем случае таковы, что их левые части отклоняются от нуля, т. е. имеют вид:

$$a_i x_1 + b_i x_2 + \ldots + g_i x_k + h_i = \delta_i, \tag{5-299}$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; δ_i — отклонение левой части уравнения i от нуля.

Из этих уравнений можно получить k новых с такими коэффициентами, которые обеспечивают получение минимального значения $\Delta_{кв}$ среднего квадратического отклонения, равного $\Delta_{кв} = \sqrt{\frac{S}{n}}$,

где

$$S = \sum_{i=1}^{i=n} \delta_i \,. \tag{5-300}$$

Указанные k уравнений имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum a_i^2 \cdot x_1 + \sum a_i b_i \cdot x_2 + \ldots + \sum a_i g_i \cdot x_k + \sum a_i \cdot h_i = 0,\\
&\sum b_i a_i \cdot x_1 + \sum b_i^2 \cdot x_2 + \ldots + \sum b_i g_i \cdot x_k + \sum b_i \cdot h_i = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum g_i a_i \cdot x_1 + \sum g_i b_i \cdot x_2 + \ldots + \sum g_i^2 \cdot x_k + \sum g_i \cdot h_i = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{5-301}$$

где суммирование следует производить от 1 до n.

В рассмотренных случаях $k = 3$, а для величины n следует выбирать число значительно более трех, например шесть и более.

Метод кратного интерполирования применяется тогда, когда требуется обеспечить касание высокого порядка в общих точках воспроизводимой и заданной зависимостей. В таком случае несколько производных той и другой зависимостей соответственно должны попарно равняться. Проектируя указанным образом механизм, можно получить хорошее приближение воспроизводимой зависимости к заданной в небольшой окрестности узлов интерполирования. При вычислении трех параметров в случае одного узла интерполирования следует использовать одно уравнение (5-295), второе, получаемое дифференцированием по углу φ_1 указанного уравнения, и третье — то, которое получается в результате второго дифференцирования.

Пусть дано: $l_1 = 1$, φ_1, φ_3, $\varphi_3' = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}$, $\varphi_3'' = \frac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$. Определить: l_2, l_3 и l_4. Для решения имеем:

$$\left.\begin{aligned}
u - c_1 l_4 - c_2 l_3 + c_3 l_3 l_4 &= 0,\\
-c_1' l_4 - c_2' l_3 + c_3' l_3 l_4 &= 0,\\
-c_1'' l_4 - c_2'' l_3 + c_3'' l_3 l_4 &= 0,
\end{aligned}\right\} \tag{5-302}$$

где

$$c_1 = \cos(\varphi_1 - \varphi_4),\quad c_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_3),\quad c_3 = \cos(\varphi_4 - \varphi_3); \tag{5-303}$$

$$\left.\begin{aligned}
c_1' &= -\sin(\varphi_1 - \varphi_4),\ c_2' = \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\ (\varphi_3' - 1),\\
c_3' &= \sin(\varphi_4 - \varphi_3)\ \varphi_3';
\end{aligned}\right\} \tag{5-304}$$

$$c_1'' = -\cos(\varphi_1 - \varphi_4),\ c_2'' = \cos(\varphi_1 - \varphi_3)\ (-1 + 2\varphi_3' - \varphi_3'^2) +$$
$$+ \sin(\varphi_1 - \varphi_3)\ \varphi_3'',\ c_3'' = \cos(\varphi_4 - \varphi_3)\ \varphi_3'^2 + \sin(\varphi_4 - \varphi_3)\ \varphi_3''. \tag{5-305}$$

Решение системы уравнений (5-302) трудностей не представляет; его мы рассматривать не будем.

При двух узлах интерполирования можно спроектировать механизм, воспроизводящий зависимость так, что в одном узле будет обеспечено касание, а в другом — обе зависимости будут иметь общую точку.

Рассмотренные задачи можно решать и графически. Пусть дано: $l_1 = 30$, $l_4 = 90$, $\varphi_{11} = 45°$, $\varphi_{12} = 90°$, $\varphi_{31} = 60°$, $\varphi_{32} = 80°$, $\varphi_3' = \frac{1}{3}$. Спроектировать механизм, обеспечивающий заданные условия (рис. 5-134).

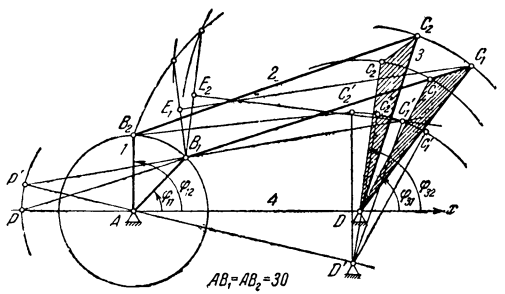


Рис. 5-134.

Решение поставленной задачи аналогично рассмотренной выше (рис. 5-133). При заданных двух положениях кривошипа и коромысла можно определить только геометрическое место E_1C_1, на котором располагается искомая точка C_1, определяющая первое положение коромысла, удовлетворяющее заданным условиям. Второе геометрическое место устанавливается на основании следующего: линия действия делит линию центров на части, обратно пропорциональные угловым скоростям. В данном случае линией действия служит направление B_1C_1, а линией центров — линия AD, потому имеем: $\frac{PA}{PD} = \frac{1}{3}$. Определив положение точки P (рис. 5-134), точку C_1 найдем на пересечении линий E_1C_1 и PB_1. На рис. 5-134 на основании изложенного построен механизм AB_1C_1DA. Там же изображен второй вариант решения той же задачи, полученный в результате смещения стойки AD (механизм $AB_1C_1'D_1'A$). Регулированием параметров AD и угла наклона AD к оси x можно спроектировать механизм, удовлетворяющий дополнительным условиям, например, можно потребовать, чтобы в другом положении воспроизводимая и заданная зависимости касались. Такое дополнительное условие можно выполнить приближенно.

Графически можно решить задачу, в которой поставлено условие о касании второго порядка заданной и воспроизводимой зависимостей в заданном положении механизма. Дано: $l_1 = 30$, $\varphi_1 = 45°$, $l_3 = 60$, $\varphi_3 = 90°$, $\varphi_3' = 0{,}5$, $\varphi_3'' = 0{,}2$.

Такая задача решается построением планов скоростей и ускорений. Принимая постоянную угловую скорость ω_1 кривошипа равной единице, имеем: $v_B = l_1 = 30$, $v_C = \varphi_3' l_3 = 0{,}5 \cdot 60 = 30$; соответственно для ускорений получаем: $a_B = l_1 = 30$, $a_C^n = \varphi_3'^2 l_3 = 0{,}25 \cdot 60 = 15$, $a_C^t = \varphi_3'' l_3 = 0{,}2 \cdot 60 = 12$; наконец, для определения l_2 можно исполь-

зовать следующую зависимость: $l_2 = \frac{v_{CB}^2}{a_{CB}^n}$. Здесь величины v и a подразумеваются выраженными в относительных единицах.

На рис. 5-135 построены повернутый на 90° план скоростей и план ускорений, у которого векторы абсолютных ускорений точек b и c направлены к полюсу π. Соединяя точки b и c плана скоростей, получаем вектор $v_{CB} = \overline{bc}$. Этим вектором устанавливается направление шатуна BC. Соединяя точки b и c плана ускорений, имеем вектор $a_{CB} = \overline{bc}$ полного относительного ускорения точки C. Разложив его по направлению BC и перпендикулярно ему, определим $a_{CB}^n = n_{CB}b$. Для рассматриваемого примера получаем: $l_2 = 88$. После этого следует построить схему заданного механизма в требуемом положении (рис. 5-135).

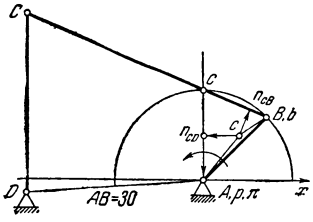


Рис. 5-135.

В данном случае регулируемыми параметрами являются длина коромысла DC и угол наклона кривошипа AB к оси x. Эти параметры можно использовать, если требуется удовлетворить дополнительным условиям, например, если необходимо обеспечить в другом заданном положении механизма пересечение воспроизводимой и заданной зависимостей. Такая задача может быть решена приближенно.

Рассмотрим еще случай проектирования механизма, у которого при равномерном вращении кривошипа времена прямого и обратного хода неодинаковы. В условиях такой задачи должно быть задано отношение углов поворота кривошипа, соответствующих прямому и обратному ходам коромысла. Имея в виду, что сумма указанных углов поворота кривошипа равна 360°, можно по заданному их отношению определить и сами углы. Кроме того, следует задать размер коромысла (его можно принять равным единице) и его угол размаха. В соответствии с расчетной схемой (рис. 5-136) имеем исходные данные: φ_{11}, φ_{12}, $\varphi_{21} = \varphi_{11}$, $\varphi_{22} = \varphi_{12} - 180°$, $l_3 = 1$, φ_{31}, φ_{32}. Определить l_1, l_2, X_4, Y_4, где $X_4 = l_4 \cos \varphi_4$, $Y_4 = l_4 \sin \varphi_4$.

Для определения неизвестных воспользуемся уравнениями проекций на оси координат замкнутых контуров схемы механизма. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} l_1 \cos \varphi_{11} + l_2 \cos \varphi_{11} &= X_4 + \cos \varphi_{31}, \\ l_1 \sin \varphi_{11} + l_2 \sin \varphi_{11} &= Y_4 + \sin \varphi_{31}, \\ l_1 \cos \varphi_{12} - l_2 \cos \varphi_{12} &= X_4 + \cos \varphi_{32}, \\ l_1 \sin \varphi_{12} - l_2 \sin \varphi_{12} &= Y_4 + \sin \varphi_{32}. \end{aligned}\right\} \quad (5\text{-}306)$$

В данном случае мы имеем систему линейных уравнений с четырьмя неизвестными, решение которой трудностей не представляет.

Ту же задачу можно решить графически. Обозначая φ'/φ'' через k, из рис. 5-136 имеем:

$$k = \frac{\varphi'}{\varphi''} = \frac{180° + \psi}{180° - \psi}, \text{ откуда } \psi = 180° \frac{k-1}{k+1}$$

По заданному k следует вычислить ψ. Построив заданные крайние положения коромысла, соединяем точки C_1 и C_2 и на отрезке C_1C_2 строим окружность — геометрическое место вершин углов ψ. Для

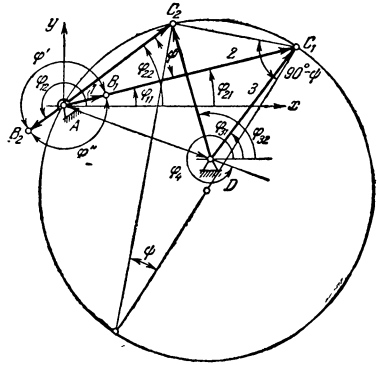


Рис. 5-136.

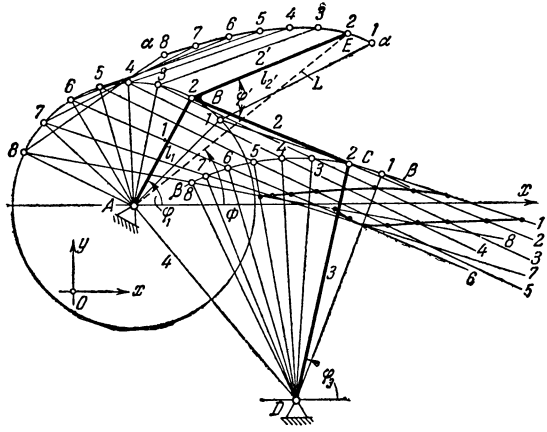


Рис. 5-137.

этого в точке C_2 восставляем перпендикуляр и из точки C_1 проводим прямую под углом $90° - \psi$ к C_1C_2. Пересечение указанных двух направлений устанавливает третью точку, через которую должна проходить искомая окружность. В произвольном месте этой окружности

можно наметить точку A, которая и будет центром вращения кривошипа AB. Центр A вращения кривошипа следует намечать с таким расчетом, чтобы углы между шатуном и коромыслом не были слишком малыми, так как в противном случае в шарнире C будут возникать относительно большие реакции.

Задача о воспроизведении заданной траектории может быть решена приближенно графически и аналитически. Графический метод основан на многочисленных поисках таких размеров звеньев механизма, которые при заданной траектории $\alpha - \alpha$ определили бы механизм, одна точка которого хотя бы приближенно описывала дугу окружности $\beta - \beta$ (рис. 5-137). Порядок решения рассматриваемой задачи следующий.

Пусть кривая $\alpha - \alpha$ задана в системе Oxy зависимостью $L(\Phi)$. По этим данным заданная кривая может быть вычерчена (рис. 5-137). Намечая центр A вращения кривошипа AB и его размер l_1, задаемся длиной l_3' стержня $2'$. После этого по нескольким положениям кривошипа AB проверяем характер движения стержня $2'$ (резкие изменения положения стержня $2'$ свидетельствуют о неудачном выборе указанных параметров). Далее задаемся величиной угла φ', определяющего направление шатуна 2 относительно стержня $2'$. Выбирая длину шатуна 2, отмечаем точки траектории его конца. Варьируя размер l_2, делаем попытку найти траекторию, приближенно совпадающую с дугой окружности или с прямой линией. Рис. 5-137 иллюстрирует последний этап поисков механизма, точка E которого приближенно описывает заданную траекторию.

Поставленная задача значительно облегчается, если под руками имеется атлас шатунных кривых, который позволяет найти кривую, похожую на заданную, так что можно сразу начать поиски искомого решения в области, где расположена кривая, приближенно совпадающая с заданной [3, 15].

Та же задача может быть решена аналитически, но в таком случае приходится иметь дело с уравнениями высоких степеней [11].

Литература. 1. Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, Гостехиздат, 1953. 2. Артоболевский И. И., Левитский Н. И. и Черкудинов С. А., Синтез плоских механизмов, Гостехиздат, 1944. 3. Атлас по кинематическому расчету кривошипно-шатунных механизмов, Изд. АН СССР, 1942. 4. Гавриленко В. А., Цилиндрическая эвольвентная зубчатая передача, Машгиз, 1956. 5. Жегалова Т. С., Геометрия эвольвентного зацепления, Машгиз, 1952. 6. Зиновьев В. А., Аналитические методы расчета плоских механизмов, Гостехиздат, 1949. 7. Зиновьев В. А., Кинематическое исследование кулачковых механизмов аналитическим методом, Труды Института машиноведения, семинар по теории машин и механизмов, т. XV, вып. 58, Изд. АН СССР, 1955. 8. Зиновьев В. А., Пространственные механизмы с низшими парами, Гостехиздат, 1952. 9. Кудрявцев В. Н., Выбор типов передач, Машгиз, 1955. 10. Левитский Н. И., Методы расчета кулачковых механизмов, Машгиз, 1954. 11. Левитский Н. И., Проектирование плоских механизмов с низшими парами, Изд. АН СССР, 1950. 12. Решетов Л. Н., Кулачковые механизмы, Машгиз, 1953. 13. Решетов Л. Н., Расчет планетарных механизмов, Машгиз, 1952. 14. Детали машин, Сборник материалов по расчету и конструированию, изд. второе, книга 1, под ред. проф. Н. С. Ачеркана, Машгиз, 1953. 15. Hrones, Nelson, Analysis of the Four-Bar Linkage, New York, 1951.

НЕКОТОРЫЕ НЕМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ МЕР

В Англии и Америке для измерения длины (площади, объема) и массы (веса) широко применяются свои национальные системы мер; большинство единиц в этих системах являются общими, некоторые различия между английской и американской системами мер далее указываются.

Кроме того, иногда приходится встречаться с прежней русской системой мер, применявшейся в дореволюционной России.

Ниже в таблицах приводятся указанные системы мер и даются переводные коэффициенты для перехода от этих мер к метрическим и обратно.

1. Английская система мер

Основные единицы:
1) ярд английский (Brit. yard, yd); 1 yd = 0,914398 *м*;
2) фунт английский (pound, lb. av); 1 lb. av = 0,453592 *кг*.

Меры длины

Единицы	Английское назв.	Производные ед.	В метр. ед.
Английская миля	Statute mile (st. mi.)	1760 ярдов	1,60934 *км*
Ярд	yard (yd.)	3 фута	0,91440 *м*
Фут	foot (ft.)	12 дюймов	30,47997 *см*
Дюйм	inch (in.)	—	2,539996 *см*
Морская миля	Nautical mile (n. mi.)	10 кабельтов	1,85318 *км*
Кабельтов	Cable's length	608 футов	185,318 *м*
Цепь	chain	66 футов	20,117 *м*

Меры поверхности

Единицы	Английское назв.	Производные ед.	В метр. ед.
Англ. кв. миля	Square st. mile (sq. mi. и mi ^{2})	640 акров	2,58998 $км^2$
Акр	Acre	4860 кв. ярдов	4046,842 $м^2$
Кв. ярд	Square yard (sq. yd. и yd ^{2})	9 кв. футов	0,83612 $м^2$
Кв. фут	Square foot (sq. ft. и ft ^{2})	144 кв. дюйма	9,2903 $дм^2$
Кв. дюйм	Square inch (sq. in. и in ^{2})	—	6,4516 $см^2$

Меры объема

Единицы	Английское назв.	Производные ед.	В метр. ед.
Англ. регистр. тонна	Register ton (reg. tn)	100 куб. футов	2,83167 $м^3$
Куб. ярд	Cubic yard (cu. yd. и yd ^{3})	27 куб. футов	0,76455 $м^3$
Куб. фут	Cubic foot (cu. ft. и ft^3)	1728куб.дюймов	28,3167 $дм^3$
Куб. дюйм	Cubic inch (cu. in. и in^3)	—	16,3870 $см^3$

Меры емкости

Единицы	Английское назв.	Производные ед.	В метр. ед.
Квартер	Quarter	8 бушелей	290,949 *л*
Бушель	Bushel (bu)	8 галлонов	36,369 *л*
Галлон	Imperial gallon (gal)	4 кварты	4,546 *л*
Кварта	Quart (qt)	2 пинты	1,1365 *л*
Пинта	Pint (pt)	4 джиля	0,56826 *л*
Джиль	Gill (gi)	—	0,14206 *л*

Меры массы (веса)

Единицы	Английское назв.	Производные ед.	В метр. ед.
Английская тонна	longton, ton (tn. l и tn)	20 центнеров	1,01605 *т*
Центнер	Hundredweight (cwt. l)	112 фунтов	50,8023 *кг*
Фунт	Pound (lb. av)	16 унций	0,45359 *кг*
Унция	Ounce (oz. av)	16 драхм	28,34953 *г*
Драхма	Dram (dm. av)	—	1,77184 *г*
Аптекарский фунт	Apothecary pound (lb. ap)	16 апт. унций	0,37324 *кг*
Аптекарская унция	Apothecary ounce (oz. ap)	8 апт. драхм	31,1035 *г*
Аптекарская драхма	Apothecary dram (dm. ap)	3 скрупула	3,88793 *г*
Скрупул	Scruples (s. ap.)	20 гран	1,29598 *г*
Гран (1/7000 lb. av)	Grain (gr)		64,79892 *мг*

2. Американская система мер

В США принята английская система мер с некоторыми изменениями, которые в основном таковы:

1. Американский дюйм незначительно отличается от английского (стр. 381) и равен 2,5400051 *мм*; соответственно этому отличаются от английских и другие американские меры длины, а также меры поверхностей и объемов, но эти отличия настолько незначительны, что при практических расчетах значения не имеют.

2. Площадь, равная 36 кв. милям, в США является отдельной единицей, называемой тауншип (township); 1 тауншип = 93,240 $км^2$, точнее, 93,2399 $км^2$.

3. В США применяется галлон (gallon, gal), отличный от английского (стр. 382), равный 0,83268 англ. галлона; 1 амер. галлон = 3,7853 *л*, соответственно этому изменяются остальные единицы емкости. Кроме того, 42 галлона образуют 1 баррель (barrel), который применяется для измерения объема жидкостей (нефть, керосин и т. п.) и равняется 158,9826 *л*, но для измерения объема спиртных напитков применяется баррель (barrel), равный 31,5 галлона, или 119,23695 *л*.

4. Кроме английской тонны, в США применяется еще малая тонна (short ton, tn. sh), равная 2000 английских фунтов; 1 малая тонна = = 0,90718 *т*.

3. Прежняя русская система мер

Меры длины

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Миля (мл.)	7 верст	1 мл. = 7,46760 *км*;	1 *км* = 0,13391 мл.
Верста (врс.)	500 саженей	1 врс. = 1,06680 *км*;	1 *км* = 0,93740 врс.
Сажень (с.)	3 аршина, или 7 футов	1 с. = 2,13360 *м*;	1 *м* = 0,46870 с.
Аршин (а.)	16 вершков, или 28 дюймов	1 а. = 0,71120 *м*;	1 *м* = 1,40607 а.
Вершок (врш.)	—	1 врш. = 4,4450 *см*;	1 *см* = 0,22497 врш.
Фут [1] (фт.)	12 дюймов	1 фг. = 3,0480 *дм*;	1 *дм* = 0,32808 фт.
Дюйм (дм.)	10 линий	1 дм. = 2,54 *см*;	1 *см* = 0,39370 дм.
Линия (лн.)	10 точек	1 лн. = 2,54 *мм*;	1 *мм* = 0,39370 лн.
Точка (тчк.)	—	1 тчк. = 0,254 *мм*;	1 *мм* = 3,9370 тчк.
Сотка [2]	—	1 сотка = 2,1336 *см*;	1 *см* = 0,46869 сотки

Примечания к таблице. [1]) Русские фут и дюйм равнялись английским футу и дюйму.
[2]) Сотая часть сажени.

Меры поверхности

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Кв. миля	49 кв. врс.	1 мл.^{2} = 55,76494 *км*^{2};	1 *км*^{2} = 0,017929 мл.^{2}
Кв. верста	250000 кв. с.	1 врс.^{2} = 1,13806 *км*^{2};	1 *км*^{2} = 0,87869 врс.^{2}
Десятина (дес.)	2400 кв. с.	1 дес. = 1,09254 *га*;	1 *га* = 0,91530 дес.
Кв. сажень	9 кв. а., или 49 кв. фт.	1 с.^{2} = 4,55225 *м*^{2};	1 *м*^{2} = 0,21967 с.^{2}
Кв. аршин	256 кв. врш.	1 а.^{2} = 0,50580 *м*^{2};	1 *м*^{2} = 1,9770 а.^{2}
Кв. вершок	—	1 врш.^{2} = 19,7580 *см*^{2},	1 *см*^{2} = 0,05061 врш.^{2}
Кв. фут	144 кв. дм.	1 фт.^{2} = 9,2903 *дм*^{2};	1 *дм*^{2} = 0,10763 фт.^{2}
Кв. дюйм	100 кв. лн.	1 дм.^{2} = 6,4516 *см*^{2};	1 *см*^{2} = 0,1550 дм.^{2}
Кв. линия	100 кв. тчк.	1 лн.^{2} = 6,4516 *мм*^{2};	1 *мм*^{2} = 0,1550 лн.^{2}
Кв. сотка	10^{-4} кв. с.	1 кв. сотка = 4,55225 *см*^{2};	1 *см*^{2} = 0,21967 сотки^2

Меры объема

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Куб. сажень	27 куб. а., или 343 куб. фт.	1 с.^{3} = 9,71268 *м*^{3};	1 *м*^{3} = 0,10296 с.^{3}
Куб. аршин	4096 куб. врш., или 21952 куб. дм.	1 а.^{3} = 0,35973 *м*^{3};	1 *м*^{3} = 2,77987 а.^{3}
Куб. вершок	—	1 врш.^{3} = 87,8244 *см*^{3};	1 *см*^{3} = 0,01139 врш.^{3}
Куб. фут	1728 куб. дм.	1 фт.^{3} = 28,3168 *дм*^{3};	1 *дм*^{3} = 0,03531 фт.^{3}
Куб. дюйм	1000 куб. лн.	1 дм.^{3} = 16,3871 *см*^{3};	1 *см*^{3} = 0,06104 дм.^{3}
Куб. линия	—	1 лн.^{3} = 16,3871 *мм*^{3};	1 *мм*^{3} = 0,06104 лн.^{3}

Меры емкости для жидкостей

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Бочка (боч.)	40 ведер	1 боч. = 0,492 *кл*;	1 *кл* = 2,033 боч.
Ведро (в.)	10 штофов, или 20 бутылок	1 в. = 12,299 *л*;	1 *л* = 0,0813 в.
Штоф (шт.)	10 чарок	1 шт. = 1,230 *л*;	1 *л* = 0,813 шт.
Чарка	—	1 чарка = 0,123 *л*;	1 *л* = 8,13 чарки
Бутылка	—	1 бутылка = 0,615 *л*;	1 *л* = 1,626 бутылки

Меры емкости для сыпучих тел

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Четверть (чт.)	2 осьмины или 8 четвериков	1 чт. = 2,099 *гл*;	1 *гл* = 0,476 чт.
Осьмина	4 четверика	1 осьм. = 10,495 *дл*;	1 *дл* = 0,0953 осьм.
1 четверик (чк.)	8 гарнцев	1 чк. = 2,624 *дл*;	1 *дл* = 0,381 чк.
Гарнц	—	1 гарнц = 3,2798 *л*;	1 *л* = 0,3049 гарнца

Меры массы (веса)

Единицы	Производные ед.	Соотношения с метр. ед.	
Берковец (бер.)	10 пудов	1 бер. = 1,638 *ц*:	1 *ц* = 0,6105 бер.
Пуд (п.)	40 фунтов	1 п. = 16,3805 *кг*;	1 *кг* = 0,06105 п.
Фунт (фн.)	32 лота, или 96 золотников	1 ф. = 0,40951 *кг*;	1 *кг* = 2,4419 ф.
Лот (л.)	3 золотника	1 л. = 12,797 *г*:	1 *г* = 0,07814 л.
Золотник (з.)	96 долей	1 з. = 4,266 *г*;	1 *г* = 0,2344 з.
Доля (дл.)	—	1 дл. = 44,44 *мг*:	1 *мг* = 0,0225 дл.

4. Таблицы для перевода английских мер в метрические и обратно

Перевод дюймов в миллиметры

При вычислениях принято: 1 англ. дюйм = 25,4000 *мм*

Доли дюйма

Доли дм.	В десятич. дробях	*мм*	Доли дм.	В десятичн. дробях	*мм*	Доли дм.	В десятичн. дробях	*мм*	Доли дм.	В десятичн. дробях	*мм*
1/64	0,015625	0,396875	17/64	0,265625	6,746875	33/64	0,515625	13,09688	49/64	0,765625	19,44688
1/32	0,03125	0,793750	9/32	0,28125	7,143750	17/25	0,53125	13,49375	25/32	0,78125	19,84375
3/64	0,046875	1,190625	19/64	0,296875	7,540625	35/64	0,546875	13,89063	51/64	0,796876	20,24063
1/16	0,0625	1,587500	5/16	0,3125	7,937500	9/16	0,5625	14,28750	13/64	0,8125	20,63750
5/64	0,078125	1,984375	21/64	0,328125	8,334375	37/64	0,578125	14,68438	53/64	0,828125	21,03438
3/32	0,09375	2,381250	11/32	0,34375	8,731250	19/32	0,59375	15,08125	27/32	0,84375	21,43125
7/64	0,109375	2,778125	23/64	0,359375	9,128125	39/64	0,609375	15,47813	55/64	0,859375	21,82813
1/8	0,125	3,175000	3/8	0,375	9,525000	5/8	0,625	15,87500	7/8	0,875	22,22500
9/64	0,140625	3,571875	25/64	0,390625	9,921875	41/64	0,640625	16,27188	57/64	0,890625	22,62188
5/32	0,15625	3,968750	13/32	0,406250	10,31875	21/32	0,65625	16,66875	29/32	0,90625	23,01875
11/64	0,171875	4,365625	27/64	0,421875	10,71563	43/64	0,671875	17,06563	59/64	0,921875	23,41563
3/16	0,1875	4,762500	7/16	0,4375	11,11250	11/16	0,6875	17,46250	15/16	0,9375	23,81250
13/64	0,203125	5,159375	29/64	0,453125	11,50938	45/64	0,703125	17,85938	61/64	0,953125	24,20938
7/32	0,21875	5,556250	15/32	0,46875	11,90625	23/32	0,71875	18,25625	31/32	0,96875	23,60625
15/64	0,234375	5,953125	31/64	0,484375	12,30313	47/64	0,734375	18,65313	63/64	0,984375	25,00313
1/4	0,25	6,350000	1/2	0,5	12,70000	3/4	0,75	19,05000	1	1	25,40000

Целые дюймы

дм.	мм	дм.	мм	дм.	мм	дм.	мм	дм.	мм
0	0	20	508,0	40	1016,0	60	1524,0	80	2032,0
1	25,4	21	533,4	41	1041,4	61	1549,4	81	2057,4
2	50,8	22	558,8	42	1066,8	62	1574,8	82	2082,8
3	76,2	23	584,2	43	1092,2	63	1600,2	83	2108,2
4	101,6	24	609,6	44	1117,6	64	1625,6	84	2133,6
5	127,0	25	635,0	45	1143,0	65	1651,0	85	2159,0
6	152,4	26	660,4	46	1168,4	66	1676,4	86	2184,4
7	177,8	27	685,8	47	1193,8	67	1701,8	87	2209,8
8	203,2	28	711,2	48	1219,2	68	1727,2	88	2235,2
9	228,6	29	736,6	49	1244,6	69	1752,6	89	2260,6
10	254,0	30	762,0	50	1270,0	70	1778,0	90	2286,0
11	279,4	31	787,4	51	1295,4	71	1803,4	91	2311,4
12	304,8	32	812,8	52	1320,8	72	1828,8	92	2336,8
13	330,2	33	838,2	53	1346,2	73	1854,2	93	2362,2
14	355,6	34	863,6	54	1371,6	74	1879,6	94	2387,6
15	381,0	35	889,0	55	1397,0	75	1905,0	95	2413,0
16	406,4	36	914,4	56	1422,4	76	1930,4	96	2438,4
17	431,8	37	939,8	57	1447,8	77	1955,8	97	2463,8
18	457,2	38	965,2	58	1473,2	78	1981,2	98	2489,2
19	482,6	39	990,6	59	1498,6	79	2006,6	99	2514,6

Перевод сантиметров в дюймы

При вычислениях принято: 1 *см* = 0,393700 англ. дюйма

см \ 0,1 *см*	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	—	0,03937	0,07874	0,11811	0,15748	0,19685	0,23622	0,27559	0,31496	0,35433
1	0,39370	0,43307	0,47244	0,51181	0,55118	0,59055	0,62992	0,66929	0,70806	0,74803
2	0,78740	0,82677	0,86614	0,90551	0,94488	0,98425	1,0236	1,0630	1,1024	1,1417
3	1,811	1,2205	1,2598	1,2992	1,3386	1,3780	1,4179	1,4567	1,4961	1,5354
4	1,5748	1,6142	1,6535	1,6929	1,7323	1,7717	1,8110	1,8504	1,8898	1,9291
5	1,9685	2,0079	2,0472	2,0866	2,1260	2,1654	2,2047	2,2441	2,2835	2,3228
6	2,3622	2,4016	2,4409	2,4803	2,5197	2,5591	2,5984	2,6378	2,6772	2,7165
7	2,7559	2,7953	2,8346	2,8740	2,9134	2,9528	2,9921	3,0315	3,0709	3,1102
8	3,1496	3,1890	3,2283	3,2677	3,071	3,3465	3,3857	3,4252	3,4646	3,5039
9	3,5433	3,5827	3,6220	3,6614	3,7008	3,7402	3,7795	3,8189	3,8583	3,8976
10	3,9370	3,9764	4,0158	4,0551	4,0945	4,1339	4,1732	4,2126	4,2520	4,2913
11	4,3307	4,3701	4,4094	4,4488	4,4882	4,5276	4,5669	4,6063	4,6457	4,6850
12	4,7244	4,7638	4,8031	4,8425	4,8819	4,9213	4,9606	5,000	5,0394	5,0787
13	5,1181	5,1585	5,1968	5,2362	5,2756	5,3150	5,3543	5,3937	5,4331	5,4724
14	5,5118	5,5512	5,5905	5,6299	5,6693	5,7087	5,7480	5,7874	5,8268	5,8661
15	5,9055	5,9449	5,9842	6,0236	6,0630	6,1024	6,1417	6,1811	6,2205	6,2598
16	6,2992	6,3386	6,3779	6,4173	6,4567	6,4961	6,5354	6,5748	6,6142	6,6535
17	6,6929	6,7323	6,7716	6,8110	6,8504	6,8898	6,9291	6,9685	7,0079	7,0472
18	7,0866	7,1260	7,1653	7,2047	7,2441	7,2835	7,3228	7,3622	7,4016	7,4409
19	7,4803	7,5197	7,5590	7,5984	7,6378	7,6772	7,7559	7,7559	7,7953	7,8346
20	7,8740	7,9134	7,9527	7,9921	8,0315	8,0709	8,1102	8,1496	8,1890	8,2283
21	8,2766	8,3071	8,3464	8,3858	8,4252	8,4646	8,5039	8,5433	8,5827	8,6220
22	8,6614	8,7008	8,7401	8,7795	8,8189	8,8583	8,8976	8,9370	8,9764	9,0157
23	9,0551	9,0945	9,1338	9,1732	9,2126	9,2520	9,2913	9,3307	9,3701	9,4094
24	9,4488	9,4882	9,5275	9,5669	9,6063	9,6457	9,6850	9,7244	9,7638	9,8031

Продолжение

см \ 0,1 см	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
25	9,8425	9,8819	9,9212	9,9606	10,000	10,039	10,079	10,118	10,157	10,197
26	10,236	10,276	10,315	10,354	10,394	10,433	10,472	10,512	10,551	10,591
27	10,630	10,669	10,709	10,748	10,787	10,827	10,866	10,905	10,945	10,984
28	11,024	11,063	11,102	11,142	11,181	11,220	11,260	11,299	11,339	11,378
29	11,417	11,457	11,496	11,535	11,575	11,614	11,654	11,693	11,732	11,772
30	11,811	11,850	11,890	11,929	11,968	12,008	12,047	12,087	12,126	12,165
31	12,205	12,244	12,283	12,323	12,362	12,402	12,441	12,480	12,520	12,559
32	12,598	12,638	12,677	12,717	12,756	12,795	12,835	12,874	12,914	12,953
33	12,992	13,031	13,071	13,110	13,150	13,189	13,228	13,268	13,307	13,346
34	13,386	13,425	13,465	13,504	13,543	13,583	13,622	13,661	13,701	13,740
35	13,780	13,819	13,858	13,898	13,937	13,976	14,016	14,055	14,094	14,134
36	14,173	14,213	14,252	14,291	14,331	14,370	14,409	14,449	14,488	14,528
37	14,567	14,606	14,646	14,685	14,724	14,764	14,803	14,842	14,882	14,921
38	14,961	15,000	15,039	15,079	15,118	15,157	15,197	15,236	15,276	15,315
39	15,354	15,394	15,433	15,472	15,512	15,551	15,591	15,630	15,669	15,709
40	15,748	15,787	15,827	15,866	15,905	15,945	15,984	16,024	16,063	16,102
41	16,142	16,181	16,220	16,260	16,299	16,339	16,378	16,417	16,457	16,496
42	16,535	16,575	16,614	16,654	16,693	16,732	16,772	16,811	16,850	16,890
43	16,929	16,968	17,008	17,047	17,087	17,126	17,165	17,205	17,244	17,283
44	17,323	17,362	17,402	17,441	17,480	17,520	17,559	17,598	17,638	17,677
45	17,717	17,756	17,795	17,835	17,874	17,913	17,953	17,992	18,031	18,071
46	18,110	18,150	18,189	18,228	18,268	18,307	18,346	18,386	18,425	18,465
47	18,504	18,543	18,583	18,622	18,661	18,701	18,740	18,779	18,819	18,858
48	18,898	18,987	18,976	19,016	19,056	19,094	19,134	19,173	19,213	19,252
49	19,291	19,331	19,370	19,409	19,449	19,488	19,528	19,567	19,606	19,646

Продолжение

0,1 *см* / *см*	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
50	19,685	19,724	19,764	19,803	19,842	19,882	19,921	19,961	20,000	20,039
51	20,079	20,118	20,157	20,197	20,236	20,276	20,315	20,354	20,394	20,433
52	20,472	20,512	20,551	20,591	20,630	20,669	20,709	20,748	20,787	20,827
53	20,866	20,905	20,945	20,984	21,024	21,063	21,102	21,142	21,181	21,220
54	21,260	21,299	21,339	21,378	21,417	21,457	21,496	21,535	21,575	21,614
55	21,654	21,693	21,732	21,772	21,811	21,850	21,890	21,929	21,968	22,008
56	22,047	22,087	22,126	22,165	22,205	22,244	22,283	22,323	22,362	22,402
57	22,441	22,480	22,520	22,559	22,598	22,638	22,677	22,716	22,756	22,795
58	22,835	22,874	22,913	22,953	22,992	23,031	23,071	23,110	23,150	23,189
59	23,228	23,268	23,307	23,346	23,386	23,425	23,465	23,504	23,543	23,583
60	23,622	23,661	23,701	23,740	23,779	23,819	23,858	23,898	23,937	23,976
61	24,016	24,055	24,094	24,134	24,173	24,213	24,252	24,291	24,331	24,370
62	24,409	24,449	24,488	24,528	24,567	24,606	24,646	24,685	24,724	24,764
63	24,803	24,842	24,882	24,921	24,961	25,000	25,039	25,079	25,118	25,157
64	25,197	25,236	25,276	25,315	25,354	25,394	25,433	25,472	25,512	25,551
65	25,591	25,630	25,669	25,709	25,748	25,787	25,827	25,866	25,905	25,945
66	25,984	26,024	26,063	26,102	26,142	26,181	26,220	26,260	26,299	26,339
67	26,378	26,417	26,457	26,496	26,535	26,575	26,614	26,653	26,693	26,732
68	26,772	26,811	26,850	26,890	26,929	26,968	27,008	27,047	27,087	27,126
69	27,165	27,205	27,244	27,283	27,323	27,362	27,402	27,441	27,480	27,520
70	27,559	27,598	27,638	27,677	27,716	27,756	27,795	27,835	27,874	27,913
71	27,953	27,992	28,031	28,071	28,110	28,150	28,189	28,228	28,268	28,307
72	28,346	28,386	28,425	28,465	28,504	28,543	28,583	28,622	28,661	28,701
73	28,740	28,779	28,819	28,858	28,898	28,937	28,976	29,010	29,055	29,094
74	29,134	29,173	29,213	29,252	29,291	29,331	29,370	29,409	29,449	29,488

Продолжение

см \ 0,1 см	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
75	29,528	29,567	29,606	29,646	29,685	29,724	29,764	29,803	29,842	29,882
76	29,921	29,961	30,000	30,030	30,079	30,118	30,157	30,197	30,236	30,276
77	30,315	30,354	30,394	30,433	30,472	30,512	30,551	30,590	30,630	30,669
78	30,709	30,748	30,787	30,827	30,866	30,905	30,945	30,984	31,024	31,063
79	31,102	31,142	31,181	31,220	31,260	31,299	31,339	31,378	31,417	31,457
80	31,496	31,535	31,575	31,614	31,653	31,693	31,732	31,772	31,811	31,850
81	31,890	31,929	31,968	32,008	32,047	32,087	32,126	32,165	32,205	32,244
82	32,283	32,323	32,362	32,402	32,441	32,480	32,520	32,559	32,598	32,638
83	32,677	32,716	32,756	32,795	32,835	32,874	32,913	32,953	32,992	33,031
84	33,071	33,110	33,150	33,189	33,228	33,268	33,307	33,346	33,386	33,425
85	33,465	33,504	33,543	33,583	33,622	33,661	33,701	33,740	33,779	33,819
86	33,858	33,898	33,937	33,976	33,016	34,055	34,094	34,134	34,173	34,213
87	34,252	34,291	34,331	34,370	34,409	34,449	34,488	34,527	34,567	34,606
88	34,646	34,685	34,724	34,764	34,803	34,842	34,882	34,921	34,961	35,000
89	35,039	35,079	35,118	35,157	35,197	35,236	35,276	35,315	35,354	35,394
90	35,433	35,472	35,512	35,551	35,590	35,630	35,669	35,709	35,748	35,787
91	35,827	35,866	35,905	35,945	35,984	36,024	36,063	36,102	36,142	36,181
92	36,220	36,260	36,299	36,339	36,378	36,417	36,457	36,496	36,535	36,575
93	36,614	36,653	36,693	36,732	36,772	36,811	36,850	36,890	36,929	36,968
94	37,008	37,047	37,087	37,126	37,165	37,205	37,244	37,283	37,323	37,362
95	37,402	37,441	37,480	37,520	37,559	37,598	37,638	37,677	37,716	37,756
96	37,795	37,835	37,874	37,913	37,953	37,992	38,031	38,071	38,110	38,150
97	38,189	38,228	38,268	38,307	38,346	38,386	38,425	38,464	38,504	38,543
98	38,583	38,622	38,661	38,701	38,740	38,779	38,819	38,858	38,898	38,937
99	38,976	39,016	39,055	39,094	39,34	39,173	39,213	39,252	39,291	39,331

Перевод ярдов в метры и обратно

При вычислениях принято: 1 ярд = 0,914398 *м*

ярды	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,91440	1,82880	2,74320	3,65759	4,57199	5,48639	6,40079	7,31519	8,22959
10	9,14398	10,0584	10,9728	11,8872	12,8016	13,7160	14,6304	15,5448	16,4592	17,3736
20	18,2880	19,2024	20,1168	21,0312	21,9456	22,8600	23,7744	24,6888	25,6032	26,5176
30	27,4320	28,3464	29,2607	30,1751	31,0895	32,0039	32,9183	33,8327	34,7471	35,6615
40	36,5759	37,4903	38,4047	39,3191	40,2335	41,1479	42,0623	42,9767	43,8911	44,8055
50	45,7199	46,6343	47,5487	48,4631	49,3775	50,2919	51,2063	52,1207	53,0351	53,9495
60	54,8639	55,7783	56,9927	57,6071	58,5215	59,4359	60,3503	61,2647	62,1791	63,0935
70	64,0079	64,9223	65,8367	66,7511	67,6655	68,5799	69,4943	70,4087	71,3231	72,2375
80	73,1518	74,0663	74,9807	75,8951	76,8905	77,7230	78,6383	79,5527	80,4671	81,3815
90	82,2958	83,2103	84,1247	85,0391	85,9535	86,8678	87,7822	88,6966	89,6110	90,5254
100	91,4398	92,3542	93,2686	21,1830	95,0974	96,0118	06,9262	97,8406	98,7550	99,6604

При вычислениях принято: 1 *м* = 1,093615 ярда

метры	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,09362	2,18723	3,28085	4,37446	5,46808	6,56169	7,65531	8,74892	9,84254
10	10,9362	12,0298	13,1234	14,2170	15,3106	16,4042	17,4978	18,5915	19,6851	20,7787
20	21,8723	22,9659	24,0595	25,1531	26,2468	27,3404	28,4340	29,5276	30,6212	31,7148
30	32,8085	33,9021	34,9957	36,0893	37,1829	38,2765	39,3701	40,4638	41,5574	42,6510
40	43,7446	44,8382	45,0318	47,0255	48,1191	49,2127	50,3063	51,3999	52,4935	53,5871
50	54,6808	55,7744	56,8680	57,9616	59,0552	60,1488	61,2425	62,3361	63,4297	64,5233
60	65,6169	66,7105	67,8041	68,8978	69,9914	71,0850	72,1786	73,2722	74,3658	75,4594
70	76,5531	77,6467	78,7403	79,8339	80,9275	82,0211	83,1148	84,2084	85,3020	86,3956
80	87,4892	88,5828	89,6764	90,7701	91,8637	92,9573	94,0509	95,1445	96,2381	97,3318
90	98,4254	99,5190	100,613	101,706	102,800	103,893	104,987	106,081	107,174	108,268
100	109,362	110,455	111,549	112,642	113,736	114,830	115,923	117,017	118,110	119,204

Перевод метров в футы и обратно

При вычислениях принято: 1 *м* = 3,280833 фута
1 фут = 0,30480 *м*

м	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	футы	метры
0	. . .	3,2808	6,5617	9,8425	13,123	16,401	19,685	22,966	26,247	29,527	1	0,30480
10	32,808	36,089	39,370	42,651	45,932	49,212	52,493	55,774	59,055	62,336	2	0,60960
20	65,617	68,897	72,178	75,459	78,740	82,021	85,302	88,583	91,863	95,144	3	0,91440
30	98,425	101,71	104,99	108,27	111,55	114,83	118,11	121,39	124,67	127,95	4	1,21920
40	131,23	134,51	137,80	141,08	144,36	147,64	150,92	154,20	157,48	160,76	5	1,52400
50	164,04	167,32	170,60	173,88	177,16	180,45	183,73	187,01	190,29	193,57	6	1,82880
60	196,85	200,13	203,41	206,69	209,97	213,25	216,53	219,82	223,10	226,38	7	2,13360
70	229,66	232,94	236,22	239,50	242,78	246,06	249,34	252,62	255,90	259,19	8	2,43840
80	262,47	265,75	269,03	272,31	275,59	278,87	282,15	285,43	288,71	291,99	9	2,74320
90	295,27	298,56	301,84	305,12	308,40	311,68	314,96	318,23	321,52	324,80	10	3,04800

Перевод километров в мили и обратно

При вычислениях принято: 1 *км* = 0,62137 мили
1 миля = 1,60934 *км*

км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	мили	километры
0	. . .	0,62137	1,2427	1,8641	2,4855	3,1069	3,7282	4,3496	4,9710	5,5923	1	1,60934
10	6,2137	6,8351	7,4564	8,0778	8,6992	9,3206	9,9419	10,563	11,185	11,806	2	3,21868
20	12,427	13,049	13,670	14,292	14,913	15,534	16,156	16,777	17,398	18,020	3	4,82802
30	18,641	10,262	19,884	20,505	21,127	21,748	22,369	22,991	23,612	24,233	4	6,43736
40	24,855	25,476	26,098	26,719	27,340	27,962	28,583	29,204	29,826	30,447	5	8,04671
50	31,069	31,690	32,311	32,933	33,554	34,175	34,797	35,418	36,039	36,661	6	9,65605
60	37,282	37,904	38,525	39,146	39,768	40,389	41,010	41,632	42,253	42,875	7	11,26539
70	43,496	44,117	44,739	45,360	45,981	46,603	47,224	47,845	48,467	49,088	8	12,87473
80	49,710	50,331	50,952	51,574	52,19	52,816	53,438	54,059	54,681	55,302	9	14,48407
90	55,923	56,945	57,166	57,787	58,409	59,030	59,652	60,273	60,894	61,516	10	16,09341

Перевод английских морских миль в километры и обратно

При вычислениях принято: 1 англ. морская миля = 1,853181 *км*

англ. морск. мили	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,85318	3,70636	5,55954	7,41272	0,26590	11,1191	12,9723	14,8454	16,6786
10	18,5318	20,3850	22,2382	24,0914	25,9445	27,7977	29,6509	31,5041	33,3573	35,2104
20	37,0636	38,9168	40,7700	42,6232	44,4763	46,3295	48,1827	50,0359	51,8891	53,7422
30	55,5954	57,4486	59,3018	61,1550	63,0081	64,8613	66,7145	68,5677	70,4209	72,2741
40	74,1272	75,9804	77,8336	79,6868	81,5400	83,3931	85,2463	87,0995	88,9527	90,8059
50	92,6590	94,5122	96,3654	98,2186	100,072	101,925	103,778	105,631	107,484	109,338
60	111,191	113,044	114,898	116,750	118,604	120,457	122,310	124,163	126,016	127,869
70	129,723	131,576	133,429	135,282	137,135	138,989	140,842	142,695	144,548	146,401
80	148,254	150,108	151,961	153,814	155,667	157,520	159,374	161,227	163,086	164,933
90	166,786	168,639	170,493	172,346	174,199	176,052	177,905	179,759	181,612	183,465
100	185,318	187,171	189,024	190,878	192,731	194,584	196,437	198,290	200,144	201,997

При вычислениях принято: 1 *км* = 0,5396127 англ. морск. мили

км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,53961	1,07923	1,61884	2,15845	2,69806	3,23768	3,77729	4,31690	4,85651
10	5,39613	5,93574	6,47535	7,01497	7,55458	8,09419	8,63380	9,17342	9,71303	10,2526
20	10,7923	11,3319	11,8715	12,4111	12,9507	13,4903	14,0299	14,5695	15,1092	15,6488
30	16,1884	16,7280	17,2676	17,8072	18,3468	18,8864	19,4261	19,9657	20,5053	21,0449
40	21,5846	22,1241	22,6637	23,2033	23,7430	24,2826	24,8222	25,3618	25,9014	26,4410
50	26,9806	27,5202	28,0599	28,5995	29,1391	29,6787	30,2183	30,7579	31,2975	31,8372
60	32,3768	32,9164	33,4560	33,9956	34,5352	35,0748	35,6144	36,1541	36,6937	37,2333
70	37,7729	38,3125	38,8521	39,3917	39,9313	49,4710	41,0106	41,5502	42,0898	42,6294
80	43,1690	43,7086	44,2482	44,7879	45,3275	45,8671	46,4067	46,9463	47,4859	48,0255
90	48,5651	49,1048	49,6444	50,1840	50,7236	51,2632	51,8028	52,3424	52,8820	53,4217
100	53,9613	54,5009	55,0405	55,5801	56,1197	56,6593	57,1990	57,7386	58,2782	58,8178

Перевод кв. дюймов в кв. сантиметры и обратно

При вычислениях принято: 1 кв. дюйм = 6,45158 *кв. см*

кв. дюймы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	6,45158	12,9032	19,3547	25,8063	32,2579	38,7095	45,1611	51,6126	58,0642
10	64,5158	70,9674	77,4190	83,8705	90,3221	96,7737	103,225	109,677	116,128	122,580
20	129,032	135,483	141,935	148,386	154,838	161,290	167,741	174,193	180,644	187,096
30	193,547	199,999	206,451	212,902	219,354	225,805	232,257	238,708	245,160	251,612
40	258,063	264,515	270,966	277,418	283,870	290,321	296,773	303,224	309,676	316,127
50	322,579	329,031	335,482	341,934	348,385	354,837	361,288	367,740	374,192	380,643
60	387,095	393,546	399,998	406,450	412,901	419,353	425,804	432,256	438,707	445,159
70	451,611	458,062	464,514	470,965	477,417	483,869	490,320	496,772	503,223	509,675
80	516,126	522,578	529,030	535,481	541,933	548,384	554,836	561,287	567,739	574,191
90	580,642	587,094	593,545	599,997	606,449	612,900	619,352	625,255	632,255	638,706
100	645,158	651,610	658,061	664,513	670,964	677,416	683,867	690,319	696,771	703,222

При вычислениях принято: 1 *кв. см* = 0,155001 кв. дюйма

кв. см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,155001	0,310002	0,465003	0,620004	0,775005	0,930006	1,08501	1,24001	1,39501
10	1,55001	1,70501	1,86001	2,01501	2,17001	2,32502	2,48002	2,63502	2,79002	2,94502
20	3,10002	3,25502	3,41002	3,56502	3,72002	3,87503	4,03003	4,18503	4,34003	4,49503
30	4,65003	4,80503	4,96003	5,11503	5,27003	5,42504	5,58004	5,73504	5,89004	6,04504
40	6,20004	6,35504	6,51004	6,66504	6,82004	6,97505	7,13005	7,28505	7,44005	7,59505
50	7,75005	7,90505	8,06005	8,21505	8,37005	8,52506	8,68006	8,83506	8,99006	9,14506
60	9,30006	9,45506	9,61006	9,76506	9,92006	10,0751	10,2301	10,3851	10,5401	10,6951
70	10,8501	11,0051	11,1601	11,3151	11,4701	11,6251	11,7801	11,9351	12,0901	12,2451
80	12,4001	12,5551	12,7101	12,8651	13,0201	13,1751	13,3301	13,4851	13,6401	13,7951
90	13,9501	14,1051	14,2601	14,4151	14,5701	14,7251	14,8801	15,0351	15,1901	15,3451
100	15,5001	15,6551	15,8101	15,9651	16,1201	16,2751	16,4301	16,5851	16,7401	16,8951

Перевод кв. футов в метрические единицы и обратно

При вычислениях принято: 1 кв. фут = 9,29027 *кв. дм*

кв. футы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	9,29027	18,5805	27,8708	37,1611	46,4514	55,7416	65,0319	74,3222	83,6124
10	92,9027	102,193	111,483	120,774	130,064	139,354	148,644	157,935	167,225	176,515
20	185,805	195,096	204,386	213,676	222,966	232,257	241,547	250,837	260,128	269,418
30	278,708	287,998	297,289	306,579	315,869	325,159	334,450	343,740	353,030	362,321
40	371,611	380,901	390,191	399,482	408,772	418,062	427,352	436,643	445,933	455,223
50	464,514	473,804	483,094	492,384	501,675	510,065	520,255	529,545	538,636	548,126
60	557,416	566,706	575,097	585,287	594,577	603,868	613,158	622,448	631,738	641,029
70	650,319	659,609	668,899	678,190	687,480	696,770	706,061	715,351	724,641	733,931
80	743,222	752,512	761,802	771,092	780,383	789,673	798,963	808,253	817,544	826,834
90	836,124	845·415	854,705	863,995	873,285	882,576	891,866	901,156	910,446	919,737
100	929,027	938,317	947,608	956,898	966,188	975,478	984,769	994,059	1003,35	1012,64

При вычислениях принято: 1 *кв. м* = 10,7639 кв. фута

кв. м	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	10,7639	21,5279	32,2918	43,0558	53,8197	64,5837	75,3476	86,1116	96,8755
10	107,639	118,403	129,167	139,931	150,695	101,459	172,223	182,937	193,751	204,515
20	215,279	226,043	236,807	247,571	258,335	269,099	270,863	290,627	301,391	312,154
30	322,918	333,682	344,446	355,210	365,974	376,738	387,502	398,266	409,030	419,794
40	430,558	441,322	452,086	462,850	473,614	484,378	495,142	505,906	516,669	527,433
50	538,197	548,961	559,725	570,489	581,253	592,017	602,731	613,545	624,309	635,073
60	645,837	656,601	667,365	678,129	688,893	699,657	710,421	721,184	731,958	742,712
70	753,476	764,240	775,004	785,768	796,532	807,296	818,060	828,824	839,588	850,352
80	861,116	871,880	882,644	893,408	904,172	914,936	925,700	936,463	947,727	957,991
90	968,755	979,519	990,283	1001,05	1011,81	1022,58	1033,34	1044,19	1054,87	1065,63
100	1076,39	1087,16	1097,92	1108,69	1119,45	1130,21	1140,98	1151,74	1162,51	1173,27

Перевод кв. ярдов в кв. метры и обратно

При вычислениях принято: 1 кв. ярд = 0,836124 *кв. м*

кв. ярды	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,836124	1,67225	2,50837	3,34450	4,18062	5,01674	5,85287	6,68899	7,52512
10	8,36124	9,19736	10,0335	10,8696	11,7057	12,5419	13,3780	14,2141	15,0502	15,8864
20	16,7225	17,5586	18,3947	19,2309	20,0670	20,9031	21,7392	22,5753	23,4115	24,2476
30	25,0837	25,9198	26,7560	27,5921	28,4282	29,2643	30,1005	30,9366	31,7727	32,6088
40	33,4450	34,2811	35,1172	35,9533	36,7895	37,6256	38,4617	39,2978	40,1340	40,9701
50	41,8062	42,6423	43,4784	44,3146	45,1507	45,9868	46,8229	47,6591	48,4952	49,9701
60	50,1674	51,0036	51,8397	52,6758	53,5319	54,3481	55,1842	56,0203	56,8564	57,6926
70	58,5287	59,3648	60,2009	61,0371	61,8732	62,7093	63,5454	64,3815	65,2177	66,0538
80	66,8899	67,7260	68,5622	69,3983	70,2344	71,0705	71,9067	72,7428	73,5789	74,4150
90	75,2512	76,0873	76,9234	77,7593	78,5957	79,4318	80,2679	81,1040	81,9402	82,7763
100	83,6124	84,4485	85,2846	86,1208	86,9369	87,7930	88,6291	89,4653	90,3014	91,1375

При вычислениях принято: 1 *кв. м* = 1,19599 кв. ярда

кв. м	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,19599	2,39199	3,58798	4,78398	5,97997	7,17597	8,37196	9,56796	10,7639
10	11,9599	13,1559	14,3519	15,5479	16,7439	17,9399	19,1359	20,3319	21,5279	22,7239
20	23,9199	25,1159	26,3119	27,5079	28,7039	29,8999	31,0958	32,2918	33,4878	34,6838
30	35,8798	37,0758	38,2718	39,4678	40,6638	41,8598	43,0558	44,2518	45,4478	46,6438
40	47,8398	49,0358	50,2318	51,4277	52,6237	53,8197	55,0157	56,2117	57,4077	58,6037
50	59,7997	60,9957	62,1917	63,3877	64,5837	65,7797	66,9757	68,1717	69,3677	70,5637
60	71,7597	72,9556	74,1516	75,3476	76,5436	77,7396	78,9356	80,1316	81,3276	82,5236
70	83,7196	84,9156	86,1116	87,3076	88,5036	89,6996	90,8956	92,0916	93,2875	94,4835
80	95,6795	96,8755	98,0715	99,2675	100,464	101,660	102,855	104,051	105,247	106,443
90	75,2512	108,835	110,031	111,227	112,423	113,619	114,815	116,011	117,207	118,403
100	83,6124	120,795	121,991	123,187	124,383	125,579	126,775	127,971	129,167	130,363

Перевод куб. дюймов в метрические единицы и обратно

При вычислениях принято: 1 куб. дюйм = 16,38698 *куб. см*

куб. дюймы	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	16,3876	32,7740	49,1609	65,5479	81,9349	98,3219	114,3219	131,096	147,483
10	163,870	180,257	196,644	213,031	229,418	245,805	262,192	278,579	294,966	311,353
20	327,740	344,127	360,514	376,901	393,288	409,675	426,061	442,448	458,835	475,222
30	491,609	507,996	524,383	540,770	557,157	573,544	589,931	606,318	622,705	639,092
40	655,479	671,866	688,253	704,640	721,027	737,414	753,801	770,188	786,575	802,962
50	819,349	835,736	852,123	868,510	884,807	901,284	917,671	934,058	950,445	966,832
60	983,219	999,606	1015,99	1032,38	1048,77	1065,15	1081,54	1097,93	1114,31	1130,70
70	1147,09	1163,48	1179,86	1196,25	1212,64	1229,02	1245,41	1261,80	1278,18	1294,57
80	1310,96	1327,35	1343,73	1360,12	1376,51	1392,89	1409,28	1425,67	1442,05	1458,44
90	1474,83	1491,22	1507,60	1523,99	1540,38	1556,76	1573,15	1589,54	1605,92	1622,31
100	1638,70	1655,08	1671,47	1687,86	1704,25	1720,63	1737,15	1753,41	1769,79	1786,18

При вычислениях принято: 1 *куб. дм* = 61,024044 куб. дюйма

куб дм	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	61,0240	122,048	183,072	244,996	305,120	366,144	427,168	488,192	549,216
10	610,240	671,264	732,289	793,313	854,337	915,361	976,385	1037,41	1098,43	1159,46
20	1220,48	1281,50	1342,53	1403,55	1464,58	1525,50	1586,63	1647,65	1708,67	1769,70
30	1830,72	1891,75	1952,77	2013,79	2074,82	2135,84	2196,87	2257,89	2318,91	2379,94
40	2440,96	2501,99	2563,01	2624,03	2685,06	2746,08	2807,11	2868,13	2929,15	2990,18
50	3051,20	3112,23	3173,25	3234,27	3295,30	3356,32	3417,35	3478,37	3539,39	3600,42
60	3661,44	3722,47	3783,49	3844,51	3905,54	3966,56	4027,59	4088,61	4149,63	4210,66
70	4271,68	4332,71	4393,73	4454,76	4515,78	4576,80	4637,83	4698,85	4759,88	4820,90
80	4881,92	4942,95	5003,97	5065,00	5126,02	5187,04	5248,07	5509,09	5370,12	5431,14
90	5492,16	5553,19	5614,21	5675,24	5736,26	5797,28	5858,31	5919,33	5980,36	6041,38
100	6102,40	6163,43	6224,45	6285,48	6346,50	6407,52	5468,55	6529,57	6590,60	6651,62

Перевод куб. ярдов в куб. метры и обратно

При вычислениях принято: 1 куб. ярд = 0,764551 *куб. м*

куб. ярды	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,764551	1,52910	2,29365	3,05820	3,82276	4,58731	5,35186	6,11641	6,88096
10	7,64551	8,410006	9,17461	9,93916	10,7037	11,4683	12,2328	12,9974	13,7619	14,5265
20	15,2910	16,0556	16,8201	17,5847	18,3492	19,1138	19,8783	20,6429	21,4074	22,1720
30	22,0365	23,7011	24,4656	25,2302	25,9947	26,7593	27,5238	28,2884	29,0529	29,8175
40	30,5820	31,3466	32,1111	32,8757	33,6402	34,4048	35,1693	35,9339	36,6984	37,4630
50	38,2276	38,9921	39,7567	40,5212	41,2858	42,0503	42,8149	43,5794	44,3440	45,1085
60	45,8731	46,6376	47,4022	48,1667	48,9313	49,6958	50,4604	51,2249	51,9895	52,7540
70	53,5186	54,2831	55,0477	55,8122	56,5768	57,3413	58,1059	58,8704	59,6350	60,3995
80	61,1641	61,9286	62,6932	63,4577	64,2223	64,9868	65,7514	66,5159	76,2805	68,0450
90	68,8096	69,5741	70,3387	71,1032	71,8678	72,6323	73,3969	74,1614	74,9260	75,6905
100	76,4551	77,2197	77,9842	78,7488	79,5133	80,2779	81,0424	81,8070	82,5715	83,3361

При вычислениях принято: 1 *куб. м* = 1,307957 куб. ярда

куб. м	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1,30796	2,61591	3,92387	5,23183	6,53979	7,84774	9,15570	10,4637	11,7716
10	13,0796	14,3875	15,6955	17,0034	18,3114	19,6194	20,9273	22,2353	23,5432	24,8512
20	26,1591	27,4671	28,7751	30,0830	31,3910	32,6989	34,0069	35,3148	36,6228	37,9308
30	39,2387	40,5467	41,8546	43,1626	44,4705	45,7785	47,0865	48,3944	49,7024	51,0103
40	52,3183	53,6263	54,9342	56,2422	57,5501	58,8581	60,1660	61,4740	62,7819	64,0899
50	65,3979	66,7058	68,0138	69,3217	70,6297	71,9376	72,2456	74,5535	75,8615	77,1695
60	78,4774	79,7854	81,0933	82,4013	83,7092	85,0172	86,3252	87,6331	88,9411	90,2490
70	91,5570	92,8649	94,1729	95,4809	96,7888	98,0968	99,4047	100,713	102,021	103,329
80	104,637	105,945	107,252	108,560	109,868	111,176	112,484	113,792	115,100	116,408
90	117,716	119,024	120,332	121,640	122,948	124,256	125,564	126,872	128,872	129,488
100	130,796	132,104	133,412	134,720	136,028	137,335	138,643	139,951	141,259	142,507

Перевод килограммов в англ. фунты и обратно

При вычислениях принято: 1 *кг* = 2,204622 англ. фунта
1 англ. фунт = 0,453592 *кг*

кг	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	англ. фунт	*кг*
0	—	2,2046	4,4092	6,6139	8,8185	11,023	13,228	15,432	17,637	19,842	1	0,45359
10	22,046	24,251	26,455	28,660	30,865	33,069	35,274	37,479	39,683	41,888	2	0,90718
20	44,092	46,297	48,502	50,706	52,911	55,116	57,320	59,525	61,729	63,934	3	1,36078
30	66,139	68,343	70,548	72,753	74,957	77,162	79,366	81,571	83,776	85,980	4	1,81437
40	88,185	90,390	92,594	94,799	97,003	99,208	101,41	103,62	105,82	108,03	5	2,26796
50	110,23	112,44	114,64	116,84	119,05	121,25	123,46	125,66	127,87	130,07	6	2,72155
60	132,28	134,48	136,69	138,89	141,10	143,30	145,51	147,71	149,91	152,12	7	3,17515
70	154,32	156,53	158,73	160,94	163,14	165,35	167,55	169,76	171,96	174,17	8	3,62874
80	176,37	178,57	180,78	182,98	185,19	187,39	189,60	191,80	194,01	196,21	9	4,08233
90	198,42	200,62	202,83	205,03	207,23	209,44	211,64	213,85	216,05	218,26	10	4,53592

Единицы давления в различных системах

	дн/см²	*г/см²*	*кг/м²*	*мм* рт. ст.	норм. *ат*	англ. фунт/дюйм²	англ. фунт/фут²
дн/см²	1	$1{,}0198 \cdot 10^{3}$	$1{,}0198 \cdot 10^{-2}$	$7{,}5010 \cdot 10^{4}$	$9{,}8697 \cdot 10^{-7}$	$1{,}4504 \cdot 10^{-5}$	$2{,}0887 \cdot 10^{3}$
г/см²	980,6	1	10	$7{,}3551 \cdot 10^{-1}$	$9{,}6777 \cdot 10^{-4}$	$1{,}4223 \cdot 10^{-2}$	2,0481
кг/м²	98,06	10	1	$7{,}3551 \cdot 10^{-2}$	$9{,}6777 \cdot 10^{-5}$	$1{,}4223 \cdot 10^{-3}$	$2{,}0481 \cdot 10^{1}$
мм рт. ст.	1332	1,3595	13,595	1	$1{,}3158 \cdot 10^{3}$	$1{,}9337 \cdot 10^{-2}$	2,7845
норм. *ат*	1 013 200	1033,3	10333	760	1	14,696	2116,32
англ. фунт/дюйм²	68944	70,308	703,12	51,715	$6{,}8046 \cdot 10^{-2}$	1	144
англ. фунт/фут²	478,78	$4{,}883 \cdot 10^{1}$	4,883	$3{,}5912 \cdot 10^{-1}$	$4{,}7252 \cdot 10^{-1}$	$6{,}9445 \cdot 10^{-3}$	1

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Аксоид неподвижный 22, 33
— подвижный 22, 33
Амплитуда колебания 15, 72
Аналитическая геометрия, основные зависимости 296
Арка бесшарнирная круговая 254
— двухшарнирная 254
— параболическая бесшарнирная 255
— — двухшарнирная 255
Аршин 384

Балансировка динамическая 354
— статическая 354, 356
Балки двутавровые, табличные данные 204—205
— на упругом основании 224
— — — — длинные 225
— — — —, коэффициент постели 224
— — — —, уравнение прогибов 227
— — — —, функции влияния 225, 226, 227
— равного сопротивления изгибу, консоль 216
— — — —, простая балка 217
Берковец, мера веса 386
Бинормаль к траектории 68
Бочка, мера емкости 385
Бутылка, мера емкости 385
Бушель 382

Ведро, мера емкости 385
Вектор гироскопического момента 112
— момента пары 46
— свободный 46
— силы 38
— системы сил главный 48
— скорости центра инерции 80
— статического момента 56
— — — системы 80
— угловой скорости фигуры 26
— ускорения центра инерции 81
Верста 384
Вершок 384
Взаимодействие механическое 37
Винт динамический 49
Вириал 65
Врубки 184
Вязкость абсолютная 320
— — масел 336, 337

Галлон 382
Гарнец, мера емкости 386
Геликоид 312
Гироскоп 111
— уравновешенный 111
Годограф радиуса-вектора 80
Головка зуба 306
Гран 383
Группа Ассура 277
— — двухповодковая 277
— — трехповодковая 278
— — четырехповодковая 279

Давление точки 78
Двигатель 317
Движение апериодическое 136
— замедленное 17
— карданово 31
— колебательное 73
— машинного агрегата нестационарное 323
— — — стационарное 323
— — — установившееся 323, 327
— переносное 34
— плоско-параллельное (плоское) 25
— равномерное 13
— равнопеременное 17
— составное (сложное) 34
— тела вращательное 21
— — мгновенно-поступательное 21
— — поступательное 20
— точки относительное 76
— — поступательное 11
— — прямолинейное 70
— тяжелой точки 68

Движение ускоренное 17
— фигур поступательное 19
Декремент колебаний логарифмический 73, 136
Деталь 273
Деформация в наклонных направлениях 177
— главная 153
— изотропная 154
— остаточная 163
— относительная конического сосуда 178
— — кругового кольца 178
— — объемная 153
— — сферического сосуда 178
— — тора 178
— — цилиндрического сосуда 178
— при изгибе в кольце 235
— упругая 163
Деформирование скоростное 160
Джиль, мера емкости 382
Диаграмма Максвелла-Кремоны 181
— растяжения 162
Динама 49
Динамика 65
Длина кругового маятника 74
— физического маятника приведенная 105
Добавки динамические 104
Долбяк 310
Доля, мера веса 386
Драхма, мера веса 383
Дуга зацепления 303
Дюйм русский 384

Единицы давления в разных системах 401

Жесткость цилиндрическая 255

Задача о воспроизведении заданной траектории 380
— — скоростях и ускорениях в плоских механизмах 281
— — — — —, графический метод решения 382
— — — — — для кривошипно-коромыслового механизма 301
— — — — — кривошипно-шатунного механизма 299
— — — — — кулачкового механизма 296
— — — — —, свойство подобия 284
Задачи проектирования механизмов 359
Зазор относительный 336, 337
Заклепки 183
Закон Гука 154, 162, 182, 185
— — при изгибе 192
Закон движения точки 11
— Ньютона 144
— парности 150
— передачи вращательного движения 287
— равенства действия и противодействия 44
— сохранения механической энергии 91, 128, 130, 133
— — — — системы 93
— упругости обобщенный 154
— — объемный 155
Зацепление внешнее 306
— зубчатое коническое 315
— — —, силовой расчет 346
— — М. Л. Новикова 313
— — с косозубыми колесами 312
— колес 309
— при $\xi = 0$ 307
— рейки с зубчатым колесом 306
— сферическое 315
— червячное 316
— —, силовой расчет 347
— эвольвентное 303
— —, интерференция 306
Звено 273
— базисное 278
— ведомое 292
— —, коромысло 292
— —, толкатель 292
— ведущее 277
—, главный вектор 321
—, — момент 321
— приведения 322
Золотник 386
Зона мертвая 73
Зубья 303

Изгиб 191
— косой 256
— —, положение нейтральной оси 256
Изгибающий момент 208
Изменения координаты точки виртуальные 113
Импульс мгновенный 142
— обобщенный 129
— — циклический 129
— силы 82
— — элементарный 82
Инвариант приведения второй 50
— — первый 50
Инварианты тензора деформаций 153
Инволюта угла 304
— —, табличные значения 305
Интеграл геометрический 82
— Мора 230
— полный эллиптический первого рода 75

Интеграл энергии 128
Интегралы уравнений Лагранжа циклические 129
Интенсивность деформации 154
— напряжения 152
Исследование движения машинного агрегата 322
— кулачковых механизмов 293
— цепи кинематической, общий метод 276

Кабельтов 381
Касательная к траектории 68
Кварта 382
Квартер 382
Кинематика 10
Колебание главное 134
— крутильное 106
Колебания гармонические 15
— — прямолинейные 15
— затухающие 72
— изохронные 71
— малые вынужденные без сопротивления 140
— — — с сопротивлением 137
— останавливающиеся 73
— при наличии трения 73
— расходящиеся вынужденные 141
— системы малые 131
— — с двумя степенями свободы 134
— — — одной степенью свободы 132, 262
— — — — — — затухающие 134
— — — — — —, коэффициенты динамические 263
— — — n степенями свободы 264
— скорости агрегата непериодические 331
— тавтохронные 71
— точки гармонические 71, 72
— — на отрезке 71
Колеса зубчатые 303
— косозубые, силовой расчет 345
Колесо ведущее 348
Количество движения системы 83
— — частицы 81
Компоненты данной силы 38
— тензора моментов инерции 97
Конус трения 45, 319
Конусы дополнительные 316
Координата обобщенная циклическая 129
— секторная 193
— системы обобщенная 114
Корытное сечение, табличные данные 206—207
Косинусы направляющие 12, 23, 77
Коэффициент восстановления 144
— высоты 306
Коэффициент гидродинамического трения 337
— динамический 167
— динамичности 138
— жидкостного трения 320
— запаса 156
— — сцепления 339
— концентрации 158
— — при изгибе 159
— — — кручении 159
— неоднородности 173
— неравномерности регулятора 332
— — — полный 332
— — хода 327
— нечувствительности регулятора 332
— перекрытия 303
— полезного действия 324
— — — кулачкового механизма 353
— — — пары зубчатых колес 362
— полноты диаграммы 163
— потерь 324
— Пуассона 154
— сдвига 307
— статического трения 45
— трения 319
— — качения 320
— — скольжения 45
— — условный 335
— чувствительности материала 158
Коэффициенты квазиинерционные 132
— квазиупругие 132
— перегрузок 173
— постели грунтов 171
— трения в фрикционных передачах 340
— уравнения эллипсоида инерции 97
— условий работы 172, 173
Кривая динамически гладкая 73
Кривизна при изгибе 192
Кривые начальные 287
Круг Бресса 30
— Лагира 30
— Мора 192
Круги предельные 78
Кручение с изгибом 259
— стесненное 189
— чистое 188
Кулачок 292

Линия геодезическая 78
— зацепления 303
—, мера длины 384
— узлов 23
Локсодрома 13
Лот 386
Лошадиная сила 89

Масла индустриальные 337
Масса приведенная 323
— системы 79
— точки 65
Машина рабочая 317
Машинный агрегат с электродвигателем 327
— — ударного действия 330
Маятник конический 79
— математический круговой 74
— сферический 78
— физический 105
Меридианная кривая 177
Метод Ассура 277
— векторный 294
— геометрических мест 281
— графического дифференцирования 293
— деформаций 219
— —, расчет рамы 231
— кинетостатический 122
— Мора графоаналитический 215
— начальных параметров 218
— обращения движения 293
— сечений 160
— сил 218
— шаблонов 281
Механизм 273
— грузоподъемной лебедки 291
— дифференциальный 289
— — замкнутый 291
— зубчатый 303
— —, силовой расчет 340
— —, применение 360
— —, проектирование 361
— исполнительный 317
— кривошипно-коромысловый 300
— кривошипно-шатунный 298
— кулачковый, применение 369
— —, проектирование 369
— —, силовой расчет 352
— мальтийский (крест) 296
— —, применение 368
— —, проектирование 368, 369
— многоступенчатый зубчатый 289
— одноосный 289
— одноступенчатый фрикционный 288
— планетарный 289, 362
— —, передаточное отношение 289
— плоский 277
— с коромыслом 370
— — низшими парами, проектирование 373
— — — —, —, метод интерполирования 374
— — — —, —, — квадратического приближения 375
— — — —, —, — кратного интерполирования 376
Механизм с роликом 292
— соосный 289
— трехзвенный кулачковый 292
— фрикционный, применение 360
— —, проектирование 361
— —, силовые исследования 339
Механизмы плоские с низшими парами 348
— — — — —, ведущее звено 351
— — — — —, треугольник 348
— — — — —, четырехугольник 350
Миля английская 381
— морская 381
— русская 384
Многоугольник Вариньона замкнутый (веревочный) 53, 54
— опорный 64
— сил 53
— силовой 45
Множители Лагранжа 118
Модуль вектора момента пары 46
— зубчатого зацепления 303
— — —, стандартные величины 303
— касательный 163
— Ламэ 154
— нормальный косозубого колеса 313
— осевой 313
— сдвига 182
— секущий 163
— скорости 12
— торцовый (окружной) 313
— упругости 154
— — объемный 155
— ускорения 16
Момент инерции геометрический 95
— — главный 97
— — относительно оси 94, 96
— — — плоскости 94
— — — точки 94
— — секторный 193
— — условный 186, 187
— — центробежный 97, 120
— — экваториальный 96
— — — при изгибе 195—199
— кинетический осевой 85
— — тела 101
— количества движения 84
— опрокидывающий 64
— осевой 84
— секторно-линейный 193
— секторный статический 193
— силы относительно оси 42
— — — точки 41
— системы кинетический 85
— — сил главный 48
— — — наименьший 48
— сопротивления сечения условный 186, 187

Момент сопротивления экваториальный при изгибе 195—199
— статический около оси 56
— удара 143
— уравновешивающий 322
— устойчивости 64
— ядровый 258
Моменты инерции главные центральные диска 98
— — — — кольца кругового 98
— — — — конуса круглого прямого 100
— — — — объема круглого цилиндра 99
— — — — — сферы 99
— — — — параболоида вращения 101
— — — — пирамиды с прямоугольным основанием 100
— — — — поверхности круглого цилиндра 99
— — — — — сферы 99
— — — — прямоугольника 99
— — — — прямоугольного параллелепипеда 100
— — — — стержня 98
— — — — тора 101
— — — — цилиндрического слоя 100
— — — — эллипсоида трехосного 101
Мощность 89

Нагрузки повторно-переменные 159
Наклеп 163
Направление оси положительное 23
Напряжение объемное 151
— октаэдрическое касательное 152
— расчетное 156
— —, выражение в теории наибольшей потенциальной энергии 157
— —, — — — наибольших касательных напряжений 156
— —, — — — — нормальных деформаций 156
— —, — — — — — напряжений 156
— —, — — — прочности Баландина 158
— —, — — — — Миролюбова 157
— —, — — — — Мора 157
— —, — — — энергии изменения формы 157
— смятия 184
Напряжения в наклонных направлениях 177
— главные 151
— — при кручении 185
— допускаемые 165, 167, 168, 169, 170, 171
Напряжения допускаемые нормальные 156
— — при кручении 188
— —, расчетная формула 171
— касательные при кручении 185
— критические по Эйлеру 247
— наибольшие касательные 151
— прямоугольной пластинки 241
Начало виртуальных скоростей (возможных перемещений) 117
Неметрические системы мер 381
Нечувствительность регулятора 332
Нить гибкая, учет собственного веса 174
Ножка зуба 306
Нормаль главная 68

Окружность делительная 306
— начальная 288, 302, 316
— основная 303
— перегибов 30
Определение положений звеньев 280
— приращения кинетической энергии 325
Оси инерции тела главные 97
— — — центральные 98
— подвижные 23
— свободного вращения 104
Ось винтовая мгновенная 32
— вращения 21
— гироскопа 111
— качания физического маятника 105
— системы сил центральная 50
Осьмина, мера емкости 386
Отношение передаточное 287
— — фрикционных и зубчатых механизмов 288

Падение точки при сопротивлении 70
— — свободное 69
— — —, учет вращения 70
Пара винтовая 338
— вращательная 335
— вращений 35
— кинематическая 273, 333
— — высшая 274
— — низшая 274
— поступательная 333
— сил 46
Параметр винта 33
— — динамического 49
Параметры зуба 309
— зубчатого зацепления 303
— косозубого колеса 313
— Лагранжа независимые 114
— положения звена 274

Перевод английских морских миль в километры и обратно 395
— дюймов в миллиметры 387
— квадратных дюймов в квадратные сантиметры 396
— — футов в метрические единицы 397
— — ярдов в квадратные метры 398
— килограммов в английские фунты и обратно 401
— километров в мили и обратно 394
— кубических дюймов в метрические единицы 399
— — ярдов в кубические метры и обратно 400
— метров в футы и обратно 394
— сантиметров в дюймы 389
— ярдов в метры и обратно 393
Перегрузки 104
Передача зубчатая 288
— ременная, применение 366
— —, проектирование 366 и д.
— фрикционная 288
Перемещение конструкции действительное 173
— точки 11
— — элементарное 11
— фигур винтовое 20
Перемещения виртуальные 112
Перенос сил параллельный 47
Период размаха маятника 75
— системы собственный 133
Пинта 382
Пластинки круглые и симметричные 243
— — — —, частные случаи 244
— прямоугольные, основные соотношения 240
Плечо пары 46
— силы 41
Плита на упругом основании 245
Плоскость движения 25
— самотормозящаяся 319
Площадка косая 152
Площадки октаэдрические 151
Площадь скалывания 184
Поверхность архимедова винтовая 316
— гладкая 40, 44
— делительная 317
— динамически гладкая 77
— уровня 91
— эвольвентная винтовая 316
— эквипотенциальная 91
Подбор сечений на жесткость 190
— — — прочность 190
— — сжатых стержней 248
Подрезание ножки зуба 308
Поле силовое 88
— — потенциальное 88
— — стационарное 88
Положение точек системы возможное 112
Полюс 25
— зацепления 301
Поперечная сила Q при изгибе 208
Правило Резаля 86, 109, 111
Предел выносливости 150
— пропорциональности 162
— прочности 156, 162
— текучести 156, 162
— упругости 162
— усталости 159
Прецессия гироскопа регулярная 111
Приведение сил и масс 322
Принцип д'Аламбера 348
— независимости динамики 66
— относительности динамики 67
— Торричелли 119
Прогибы 208, 209
— балок под действием сосредоточенной силы 215
— — с защемленными концами 221
— — — подвижной опорой и ползуном 214
— консоли 209, 210
— конструкций допускаемые 174
— простой балки 211—213
Проекции вектора скорости 12
— ускорения 16, 17, 18
Проекция силы на ось 39
Произведения инерции 97
Производная радиус-вектора геометрическая 12
Противовес 354
Профиль зубьев колес, условия 301
— кулачка 371
— — практический 292
— — теоретический 292
Пружина коническая 260
— цилиндрическая 259
Прямая модульная 306
— образующая 303
Пуд 386
Путь точки 11

Работа виртуальная 115
— наибольшая избыточная 327
— полная 89
— сил поля полная 90
— силы элементарная 87
— удельная упругая 164
— цапфы в условиях жидкостного трения 336
— элементарная удельная 163
Равновесие астатическое 57

Равновесие устойчивое 130
Равнодействующая 38
Радиус инерции 94
Размах колебания 15
Рама простая плоская 229
Расстояние ядровое 258
Растяжение стержней центральное 161
Расчет балок на изгиб (в области упруго-пластических деформаций 239
— — — — по первому предельному состоянию 240
— — — — — состоянию разрушения 237
— — — — — упругому состоянию 237
— вала 190
— колец, результаты 236
— на действие температуры 176
— по допускаемым напряжениям 175
— — несущей способности 171
— — предельным состояниям стержней 176
— — состоянию разрушения 171, 176
— простейших рам, результаты 233
Реакция 92
— динамическая закрепленных точек оси 103
— заданной линии 41
— кривой динамическая 73
— окружности 76
— поверхности 40
— — динамическая 77
— связей 44
— условная 341
Регулятор 331
— непрямого действия 331
— прямого действия 331
Редуктор 289
Резонанс 139
Ряд Маклорена 131

Сажень 384
Свойство скоростей точек твердого тела 20
Связи 44, 92
— виртуально совершенные 117
— длительные 146
— идеальные 117
— неинтегрируемые 113
— нестационарные 113
— реономные 113
— склерономные 113
— совершенные 92, 117
— стационарные 113
Сдвиг абсолютный 307
Сдвиг наибольший 153
— октаэдрический 154
— реечного исходного контура 307
Сервомотор 331
Сжатие осевое цилиндрической оболочки 256
Сила 38
— активная (заданная) 67
— движущая 317
— инерции 320
— — д'аламберова 119
— — движущейся точки 119
— — касательная д'аламберова 120
— — нормальная 321
— — — д'аламберова 120
— — тангенциальная 321
— критическая для пластинки 255
— нажатия для фрикционного механизма 339
— ньютонова притяжения 89
— обобщенная 116
— позиционная 70
— полезного сопротивления 317
— приведенная 322
— производственного сопротивления 317
— реактивная 84
— сопротивления 317
— трения качения 320
— — скольжения 45
— тяжести 88
— центральная 69, 88
— центробежная 120
— ударная 142
— уравновешивающая 322
Силы внешние 43, 92
— внутренние 92
— — стержней и пластинок 160
— заданные 92
— кориолисовы 66
—, уравновешенные на теле 43
—, — — точке 39
— фиктивные 66
Система голономная 113
— инерциальная 65
— консервативная 93
— мер американская 393
— — английская 381
— — прежняя русская 384
— механическая 79
— неголономная 113
— несвободная 112
— относительная 33
— отсчета 10
— — основная (абсолютная) 10, 33
— сил параллельная 56
— — плоская 53
— — сходящаяся 45
— — уравновешенная 43
— — эквивалентная 44

Система шарнирно-стержневая 179
Системы мер несимметричные 381
Скалывание 184
Скорость абсолютная 34
— алгебраическая 12
— — угловая 14
— материальной точки до удара 142
— — — после удара 142
— мгновенного центра 28
— обобщенная 123
— относительная 34
— переносная 34
— потерянная 146
— секторная 15, 69, 84
— точки 11
— — виртуальчая 113
— угловая абсолютная 32
— — мгновенная 22
— — плоского движения 25
— — тела 21
Скрупул 383
Смятие 183, 184
Соединения сварные 184
Сопротивление нормативное 172
— поверхности нормальное 45
— предельное 172
— расчетное 172, 173
Состояния конструкций предельные 172
— — — по несущей способности 172
— — — — образованию трещин или повреждений 172
— — — — развитию чрезмерных деформаций 172
Сосуд сферический толстостенный в упругой стадии 261
Сотка 384
Соударение абсолютно неупругое 145
— — упругое 145
— прямое центральное 144
Способ вырезания узлов 180
— общего уравнения, расчет рамы 232
— расчета без решения канонических уравнений 220
Срез 183
— двойной 183
Статика 37
— аналитическая 112
Степени свободы 114
Степень статической неопределимости 218, 229
Стержни гибкие 258
— криволинейные, изгиб 234
— на упругих опорах 254
— переменной жесткости 250
— плавно-переменного момента инерции 250
Стержни растянутые 158
— составные 252
— ступенчато-переменного момента инерции 252
Стойка 274, 292
Ступень механизма 289
Сумма векторов моментов сил пары 46
— элементарных работ 107, 108

Таблицы перевода мер 389 и д.
Тело абсолютно твердое 43
— несвободное 44
— однородное 58
Тензор 150
— деформации 153
— — девиатор 154
— — объемный 154
— моментов инерции 97
— напряжения девиатор 152
— — объемный 152
Тензорная форма записи закона изменения объема 155
— — — — — формы 156
Тензоры напряжений направляющие 156
Теорема Вариньона 43
— д'Аламбера—Эйлера 19
— Жуковского 322
— Лежен-Дирихле 130
— Паппа—Гюльдена 60
— параллелограмма скоростей 34
— Эйлера—Шаля 19
Теории прочности 156, 157, 158
Теория свободных малых колебаний 132
Точка 384
— материальная 37
— — изолированная 67
— приложения силы 38
— Риттера 180
— схода 45
Точки сопряженные 302
Траектория точки 11
Трение 319
— верчения 319
— гибкой нити по неподвижному цилиндру 339
— граничное 319
— жидкостное 319
— качения 319
— полужидкостное 319
— полусухое 319
— скольжения 319
— сухое 319
— чистое 319
Треугольник моментный 41

Углы поворота касательной 208, 209

Углы поворота касательной для балки с подвижной опорой и ползуном 214
— — — — консоли 209, 210
— — — — простой балки 211—213
— Эйлера 23
Угол взаимного поворота сечений при изгибе 192
— давления 369
— зацепления 306
— — монтажный 309
— наклона зуба по основному цилиндру 312
— нутации 23
— поворота тела 21
— — фигуры 25
— прецессии 23
— сдвига 182
— собственного вращения 23
— трения 319
Угольники неравнобокие, табличные данные 202—203
— равнобокие, табличные данные 200—201
Удар 142
—, коэффициент динамический 265
— крутящий, коэффициент динамический 266
— центральный 145
Удельный вес 58
Удлинение октаэдрическое 153
— стержня абсолютное 161
— — относительное 161
Унция 383
Уравнение вращения тела 21, 102
— движения ракеты 83
— — центра инерции 81
— — — — тела 106
— замкнутости векторное 277
— изгиба кольца и арки 254
— — сжатого стержня 245
— колебаний 71
— локсодромы 14
— Мещерского 83
— Навье—Софи Жермен 241
— общее Лагранжа—д'Аламбера 122
— прогибов общее 227
— траектории 69
— упругой кривой 208
— частот 134
— Эйлера для гироскопа 111
Уравнения аналитической системы общие 117
— движения голономной системы канонические 130
— — звена приведения 323
— — изолированной точки 67
— — координатные (векторные) 11
— — несвободной системы 121
Уравнения движения свободного тела 110
— — точки тела 31
— для φ и v балок переменного сечения 214
— замкнутости 276
— Лагранжа 132, 135
— — второго рода 126
— — первого рода 122
— плоского движения 25
— равновесия голономной системы 118
— — материальной точки 40
— системы механической 114
— Эйлера динамические 110
Уравновешивание вращающихся звеньев 354
— механизмов 354
— — на фундаменте 357
Усилие расчетное 172
Ускорение абсолютное 34
— — угловое точек тела 33
— алгебраическое угловое 18
— вращательное 28
— — точек тела 24
— дополнительное 36
— касательное 16
— —, вычисление 17
— кориолисово 36
— нормальное 16
— —, вычисление 17
— относительное 34
— переносное 34
— поворотное 36
— свободного падения 66
— тангенциальное 16
— точки 16
— угловое тела 21, 24
— центростремительное 16, 28
— — (осестремительное) точек тела 25
Условие собираемости 362
— соседства 362
— уравновешенности системы пар 47
Условия потери устойчивости 249—250
— равновесия тел 51
— — — несвободных 51
— связи 277

Фаза колебания 15, 72
Ферма 179
—, графическое решение 181
— полураскосная 181
— с параллельными поясами 180
— шпренгельная 181
Фигура взаимная 54
— Лиссажу 134
Фокусное отношение 234

Формула Журавского 191
— изменения количества движения точки 82
— Карно 146
— Кельвина 143
— Кенига 92, 109
— Кориолиса 36
— Мора 230
— Савари 31
— Тетмайера—Ясинского 247
— Эйлера 21
Функция влияния 225, 226—227, 229
— Гамильтона характеристическая 130
— гиперболо-круговая 228—229
— обобщенная силовая 116
— потенциальная 91
— Рэлея диссипативная 135
— силовая 88, 93
— эвольвентная 304
Фунт английский 381
— русский 386
Фут 381
— русский 384

Характеристика материалов механическая 164
— механическая 317
— нагрузочная 324
— сечения геометрическая 173, 192
— скоростная 324

Цапфа 336
Центр вращения 22
— — мгновенный 26
— изгиба 193, 194
— инерции системы 80
— качания физического маятника 105
— колебания 72
— масс точек 80
— мгновенный в относительном движении звеньев 287
— момента 41
— объема тела 59, 63
— отсчета главный 193
— параллельной системы 56
— приведения 48
— сил 45
— системы 65
— скоростей мгновенный 26
— тяжести линии 59, 61
— — поверхности 59, 62
— — системы 80
— — тела 58
— ускорения мгновенный 29
Центроида неподвижная 27
— подвижная 27

Цепь кинематическая 274
Цикл 323
Цилиндр толстостенный в пластической стадии 261
— — — упругой стадии 260

Чарка, мера емкости 385
Части реакций статические 104
Частица материальная 37
Червяк 316
— ведущий 347
Четверик, мера емкости 386
Четверть, мера емкости 386
Число степеней свободы 114, 275

Шаг зубчатого зацепления 303
— нормальный косозубого колеса 313
— осевой 313
— торцовый (окружной) 313
Швеллер, таблица 206—207
Широтный круг 177
Штоф, мера емкости 385

Эвольвента окружности 303
Эллипсоид инерции 97
Энергия деформации потенциальная 163
— изгиба потенциальная 192
— кинетическая в обобщенных скоростях 125
— консервативной системы механическая 93, 94
— механическая 91
— — системы 93
— при кручении удельная 186
— сдвига удельная 182
— системы в поле потенциальная 117
— — кинетическая 91
— — механическая полная 130
— твердого тела кинетическая 108
— точки кинетическая 89
— — потенциальная 91
Эпюра скоростей 27
— ускорений 29
— фиктивной нагрузки 215
Эпюры для расчета вала 190
— φ и v 208
— Q и M балок 208, 209, 211—213, 214, 221—223
— изменения координат для швеллера 194
— напряжений для круглого стержня 183

Ядро поперечного сечения 257
Ярд английский 381

Краткий
физико-технический справочник, том II.

Редактор *В. И. Рыдник*
Технический редактор *С. Н. Ахламов.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 5/V 1959 г. Подписано к печати 4/IV 1960 г. Бумага 70 × 92$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л 12,875. Условн. печ. л. 15,06. Уч.-изд л. 26,36. Тираж 100 000 экз. Т-01067. Цена книги 8 руб. 90 коп. С 1/I 1961 г. — 89 к. Заказ № 1292.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет
народного хозяйства.
Управление полиграфической
промышленности. Типография № 1
«Печатный Двор» имени А. М Горького.
Ленинград, Гатчинская, 26.

КРАТКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ СПРАВОЧНИК

II

ФИЗМАТГИЗ • 1960